ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

Sono ben note le identità algebriche fra i simboli di Riemann a quattro indici, nella teoria delle forme differenziali quadratiche. Non sembra invece che siano state ancora osservate le identità *differenziali* che li legano ai simboli di Christoffel a tre indici, di cui tratto nella presente Nota (1). Queste formole, per sè notevoli, consentono un'immediata applicazione ad un bel teorema trovato da Schur (2) e da lui dimostrato per altra via.

1.

Indichiamo con

$$f = \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

una forma differenziale quadratica negli n differenziali

$$dx_1,\, dx_2 \ldots dx_n$$

delle variabili indipendenti $x_1, x_2 \ldots x_n$, dove i coefficienti a_{rs} sono funzioni

(1) Ho stabilito queste identità nelle lezioni da me date nello scorso anno presso la Università di Pisa.

(2) *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen.* (Math. Annalen Bd. 27).

finite e continue delle x (nel campo di variabilità che si considera), che ammettono derivate parziali fino al terzo ordine, tutte finite e continue. Si suppone inoltre che il discriminante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Con A_{rs} indichiamo il quoziente della divisione per a del complemento algebrico di a_{rs}. I simboli di Christoffel di prima specie sono definiti dalla formola

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right); \tag{1}$$

e quelli di seconda specie dall' altra

$$\begin{Bmatrix} ik \\ \lambda \end{Bmatrix} = \sum_l^{1\dots n} A_{\lambda l} \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Un simbolo di Riemann a quattro indici (rk, ih) è definito dalla formola

$$(rk, ih) = \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix} + \sum_{\lambda,\mu}^{1\dots n} A_{\lambda\mu}\left\{\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}\right\} \tag{3}$$

È ben noto che fra i simboli di Riemann sussistono le identità date dalle formole seguenti:

$$(kr, ih) = -(rk, ih), (ih, rk) = (rk, ih), (rk, ih) + (ri, hk) + (rh, ki) = 0, \tag{4}$$

in virtù delle quali il numero di questi simboli distinti si riduce a

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Indicando ora con rk, ihl cinque indici qualunque presi nella serie 1, 2, ... n, dimostriamo che hanno luogo le seguenti identità differenziali:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk, ih) + \frac{\partial}{\partial x_i}(rk, hl) + \frac{\partial}{\partial x_h}(rk, li) = \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}(kt, lh) +$$
$$+ \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}(kt, il) + \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} rl \\ t \end{Bmatrix}(kt, hi) + \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} ki \\ t \end{Bmatrix}(rt, hl) + \sum_t\begin{Bmatrix} kh \\ t \end{Bmatrix}(rt, li) +$$
$$+ \sum_t\begin{Bmatrix} kl \\ t \end{Bmatrix}(rt, ih). \tag{A}$$

Si possono porre le identità precedenti sotto un'altra forma, introducendo con Christoffel [1] simboli *a cinque* indici $(rk\,,ihl)$ colla formola:

$$(\alpha)\qquad (rk\,,ihl)=\frac{\partial}{\partial x_l}(rk\,,ih)-\sum_t^{1\ldots n}\left\{ {lr \atop t} \right\}(tk\,,ih)-\sum_t^{1\ldots n}\left\{ {lk \atop t} \right\}(rt\,,ih)-$$

$$-\sum_t^{1\ldots n}\left\{ {li \atop t} \right\}(rk\,,th)-\sum_t^{1\ldots n}\left\{ {lh \atop t} \right\}(rk\,,it),$$

ossia, come si esprime il Ricci, formando le derivate covarianti dei simboli Riemanniani, allora la (A) può scriversi sotto la forma equivalente:

$$(\mathrm{A}^*)\qquad (rk\,,ihl)+(rk\,,hli)+(rk\,,lih)=0\,.$$

È da osservarsi per altro che le (A), o le equivalenti (A*), si riducono a pure identità formali se $r=k$ ed anche se due dei tre indici i, h, l sono eguali.

2.

Per dimostrare la (A) cominciamo dall'osservare che le derivate delle $\mathrm{A}_{\lambda\mu}$ rispetto alle x si esprimono linearmente per le A stesse e pei simboli a tre indici di Christoffel colla formola:

$$(a)\qquad \frac{\partial \mathrm{A}_{\lambda\mu}}{\partial x_l}=-\sum_t^{1\ldots n}\mathrm{A}_{\lambda t}\left\{ {lt \atop \mu} \right\}-\sum_t^{1\ldots n}\mathrm{A}_{\mu t}\left\{ {lt \atop \lambda} \right\}.$$

E infatti indicando con $\varepsilon_{s\lambda}$ lo zero o l'unità, secondo che $s \neq \lambda$ o $s=\lambda$, si ha

$$\sum_i^{1\ldots n} a_{si}\,\mathrm{A}_{\lambda i}=\varepsilon_{s\lambda}\,,$$

che derivata rapporto ad x_l porge

$$\sum_i^{1\ldots n} a_{si}\frac{\partial \mathrm{A}_{\lambda i}}{\partial x_l}=-\sum_i^{1\ldots n}\mathrm{A}_{\lambda i}\frac{\partial a_{si}}{\partial x_l}.$$

ossia

$$\sum_i^{1\ldots n} a_{si}\frac{\partial \mathrm{A}_{\lambda i}}{\partial x_l}=-\sum_i^{1\ldots n}\mathrm{A}_{\lambda i}\left[{sl \atop i} \right]-\sum_i^{1\ldots n}\mathrm{A}_{\lambda i}\left[{il \atop s} \right].$$

Moltiplicando questa per $\mathrm{A}_{s\mu}$ e sommando da $s=1$ a $s=n$ coll'osservare la (2), risulta appunto la (a). Ciò posto formando dalla (3) la

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk\,,ih)\,,$$

[1] *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Crelle's, Journal Bd. 70). V. § 6.

ed applicando la (a), troviamo dapprima:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ik)=\frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_l}\begin{bmatrix}ri\\k\end{bmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_l}\begin{bmatrix}rh\\k\end{bmatrix}+\sum_{\lambda,\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}rh\\\lambda\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}ik\\\mu\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}ik\\\mu\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}rh\\\lambda\end{bmatrix}-\sum_{\lambda,\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}ri\\\lambda\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix}-\sum_{\lambda\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}ri\\\lambda\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\dots n}A_{\lambda t}\begin{Bmatrix}lt\\\mu\end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}ri\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}rh\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ik\\\mu\end{bmatrix}\right)+$$

$$+\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\dots n}A_{\mu t}\begin{Bmatrix}lt\\\lambda\end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}ri\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}rh\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ik\\\mu\end{bmatrix}\right).$$

Trasformiamo ora le due ultime somme triple nel secondo membro col processo seguente, che indichiamo per esteso per uno dei termini, p. e. pel primo. Abbiamo per la (2)

$$\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\dots n}A_{\lambda t}\begin{Bmatrix}lt\\\mu\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}ri\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix}=\sum_{\mu t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}lt\\\mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ri\\t\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix}=\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}ri\\t\end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}lt\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix};$$

e similmente procedendo per gli altri termini delle somme triple, vediamo che, cangiando leggermente le notazioni per gli indici, si può scrivere:

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ih)=\frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_l}\begin{bmatrix}ri\\k\end{bmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_l}\begin{bmatrix}rh\\k\end{bmatrix}+\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}rh\\t\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}ik\\t\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}ik\\t\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}rh\\t\end{bmatrix}-\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}ri\\t\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}hk\\t\end{bmatrix}-\sum_{t}\begin{Bmatrix}hk\\t\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}ri\\t\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}ri\\t\end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}hk\\\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}lt\\\lambda\end{bmatrix}+\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}hk\\t\end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}ri\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}lt\\\mu\end{bmatrix}-$$

$$-\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}rh\\t\end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}ik\\\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}lt\\\lambda\end{bmatrix}-\sum_{t}^{1\dots n}\begin{Bmatrix}ik\\t\end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\dots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}rh\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}lt\\\mu\end{bmatrix}.$$

Ora, se in questa permutiamo una prima, poi una seconda volta, circolarmente gli indici i, h, l e le due formole ottenute addizioniamo colla (4) stessa, ne risulta appunto l'enunciata formola (A), *c. d. d.*

3.

Al § 7 della citata memoria del sig. Schur si trova stabilito il teorema: *Se la curvatura Riemanniana dello spazio, definito da*

$$ds^2=\sum_{i,k}^{1\dots n}a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

è costante attorno ad ogni singolo punto in qualunque orientazione, essa non può variare nemmeno da punto a punto, cioè lo spazio è a curvatura assolutamente costante.

Per dimostrare questo teorema Schur ha fatto uso di considerazioni geometriche sulle superficie geodetiche. Mi propongo qui di far vedere come si arriva direttamente al teorema stesso, applicando le identità (A).

Nella ipotesi che la curvatura Riemanniana K sia una funzione delle coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ del punto, ma indipendente dall' orientazione attorno al punto, per la formola stessa che dà la curvatura Riemanniana dovremo avere, per ogni quaderna di indici r, k, i, h, le relazioni

$$(5) \qquad (rk, ih) = \mathrm{K}\,(a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik}).$$

Ora partiamo dall' osservazione, d' immediata verifica, che le formole (A) risultano identicamente soddisfatte ponendovi in luogo dei simboli (rk, ih) di Riemann i corrispondenti minori del 2° ordine

$$a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik}$$

del discriminante a. Ed invero, formando, secondo (α), le derivate covarianti di questi minori (che formano un sistema quadruplo covariante secondo le dominazioni del Ricci) si vede che esse sono identicamente nulle. Sostituendo nelle identità (A) pei simboli di Riemann i loro valori supposti (5), queste diventano:

$$(a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} + (a_{rh}\,a_{lk} - a_{rl}\,a_{hk})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_i} + (a_{rl}\,a_{ik} - a_{ri}\,a_{kl})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = 0.$$

Moltiplicando questa per A_{ri} e sommando da $r = 1$ a $r = n$ (col ricordare che i, h, l sono supposti diversi) si ha semplicemente

$$a_{hk}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} - a_{lk}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = 0.$$

Se teniamo fissi h, l e diamo a k tutti i valori da 1 a n, *non* sussistendo le proporzioni:

$$a_{h1} : a_{h2} : \ldots : a_{hn} = a_{l1} : a_{l2} : \ldots a_{ln}$$

(giacchè a non è nullo), se ne trae

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} = 0.$$

E poichè ciò vale per tutti i valori degli indici h, l, se ne deduce appunto

$$\mathrm{K} = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}},$$

ciò che dà il teorema di Schur.

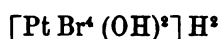
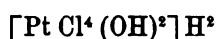
Botanica. — *Origine e differenziazione degli elementi vascolari primarî nella radice delle Monocotiledoni.* Nota I del Socio R. PIROTTA.

Matematica. — *Sugli spazî plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazî.* Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Socio SEGRE.

Queste due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul tetrajoduro di platino* (1). Nota di ITALO BELLUCCI, presentata dal Socio CANNIZZARO.

Da ricerche recenti è noto come il tetracloruro (2) ed il tetrabromuro (3) di platino, in soluzione acquosa si comportino come anidridi, associandosi a due molecole di acqua per dar luogo alla formazione degli acidi bibasici:

$$[Pt\,Cl^4\,(OH)^2]\,H^2 \qquad\qquad [Pt\,Br^4\,(OH)^2]\,H^2$$

Ho creduto di un certo interesse di provare se anche il tetrajoduro di platino si comportasse in modo analogo ai composti clorurato e bromurato, ora menzionati, per quanto, sembrasse ciò, a prima vista, poco probabile, data la nessuna solubilità del tetrajoduro nell'acqua.

Ho potuto tuttavia dimostrare che adoperando una soluzione alcoolica di tetrajoduro di platino, si può ottenere per mezzo dei sali metallici composti analoghi a quelli che si ottengono dalle soluzioni acquose di tetracloruro e di tetrabromuro. I risultati ottenuti formano appunto l'oggetto della presente Nota.

Il tetrajoduro di platino PtI^4 si ottiene nel modo più conveniente seguendo il processo indicato dal Topsoë (4), trattando cioè una soluzione di acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con una di acido jodidrico; salvo che il Topsoë consiglia di agire a freddo, mentre io ho trovato, per ripetuti tentativi, ottenersi un composto più puro e con maggior sollecitudine agendo a caldo. Precisamente ho trattato a bagno-maria una soluzione abbastanza concentrata

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) A. Miolati, Zeitschr. f. anorg. Chemie, XXII, 445.

(3) A. Miolati ed I. Bellucci, Gazz. chim. ital., XXX, 2ª, 580.

(4) Topsoë, Chem. Centralblatt, *1870*, 683.

di acido cloroplatinico con un leggero eccesso di soluzione di acido jodidrico, esente di Jodio libero. In tal modo non tarda a precipitare, in seno al liquido intensamente colorato, il tetrajoduro di platino, come polvere nera e pesante: dopo aver prolungato per una mezz'ora l'azione del bagno-maria, ho decantato il liquido sovrastante e lavato ripetutamente con acqua bollente e per decantazione il tetrajoduro depostosi. Raccoltolo poi su filtro e seccato in stufa a 100°, prima di impiegarlo, ho voluto sottoporlo ad analisi i di cui risultati, concordanti con la formola PtI^4, sono i seguenti:

1° Grammi 0,3821 di sostanza, calcinati in crogiuolo di platino, lasciarono per residuo gr. 0,1056 di platino.

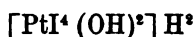
2° Grammi 0,2780 di sostanza, egualmente calcinati, dettero gr. 0,0764 di platino.

Ossia in 100 parti:

	Trovato		Calcolato per PtJ^4
	I	II	
Pt	27,64	27,48	27,74

Accertatomi così della purezza del tetrajoduro, ho preparato una sua soluzione nell'alcool etilico, avendo cura di operare a freddo per evitare qualche possibile decomposizione. Il tetrajoduro di platino lasciato infatti, alla temperatura ordinaria, per una mezza giornata di tempo, a contatto con una sufficiente quantità di alcool etilico a 95°, vi si discioglie completamente, colorando il liquido in bruno marrone intensissimo. Così però si comporta il tetrajoduro preparato da tempo e perfettamente secco, giacchè quello di preparazione recente ed ancora non seccato, cioè umido di acqua, si discioglie con grande rapidità nell'alcool.

La soluzione alcoolica del tetrajoduro conservato alla luce in capo a qualche tempo si decompone, colorandosi in giallo-verde, onde va tenuta all'oscuro e più che altro è bene prepararla volta per volta che può occorrere. Essa non lascia precipitare il tetrajoduro che per aggiunta di almeno tre volumi di acqua. Ha reazione nettamente acida e scompone i carbonati. Trattando questa soluzione alcoolica con soluzioni acquose molto concentrate di sali di argento, piombo, tallio e mercurio, si ottengono dei precipitati che analizzati risultarono essere i sali di un acido tetrajodoplatinico:

$$[PtI^4 (OH)^2] H^2$$

perfettamente analogo ai due acidi, clorurato e bromurato, menzionati in principio.

Sale di Argento.

La soluzione alcoolica di tetrajoduro di platino trattata a temperatura ordinaria con leggero eccesso di soluzione acquosa di nitrato di argento al

dieci per cento, fornì un precipitato color marrone-scuro, il quale ben lavato con acqua, nella quale non si scioglie affatto, ed essicato nel vuoto, offrì i seguenti dati analitici:

1° Grammi 0,4874 di sostanza ridotti in crogiuolo di Rose a mezzo di una corrente di idrogeno, lasciarono per residuo gr. 0.2115 di platino ed argento.

2° Grammi 0,4656 di sostanza, identicamente trattati, dettero gr. 0,1994 di platino ed argento.

3° Grammi 0,4414 di sostanza, identicamente trattati, dettero gr. 0,1896 di platino ed argento. Questo residuo staccato con cura dal crogiuolo e trattato ripetute volte con acido solforico concentrato lasciò indisciolti gr. 0,0888 di platino.

4° Grammi 0,3928 di sostanza fusi con idrato sodico dettero gr. 0,3852 di joduro di argento, pari a gr. 0,2081 di Jodio.

Riferendosi a 100 p. di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Ag^2$
	I	II	III	IV	
Pt + Ag^2	43,4	42,83	42,96	—	43,13
Pt	—	—	20,12	—	20,46
Ag	—	—	22,84	—	22,67
J	—	—	—	53,0	53,30

Sale di piombo.

È un precipitato grigio marrone che si ottenne trattando la soluzione alcoolica del tetrajoduro, a temperatura ordinaria, con una acquosa concentrata di acetato di piombo neutro. Lavato bene con acqua, ed essicato nel vuoto su acido solforico, si sottopose all'analisi, e fornì i dati seguenti:

1° Grammi 0,3948 di sostanza trattati con acido solforico concentrato, in crogiuolo di platino, dettero gr. 0,2653 di platino e di solfato di piombo.

2° Grammi 0,2166 di sostanza ugualmente trattati dettero gr. 0,1452 di platino e di solfato di piombo.

3° Grammi 0,4705 di sostanza egualmente trattati dettero gr. 0,3177 di platino e solfato di piombo. Questo residuo esaurito con soluzione di acetato di ammonio lasciò indietro gr. 0,0791 di platino.

4° Grammi 0,3716 di sostanza, fusi con idrato sodico, dettero gr. 0,2955 di joduro di argento, pari a gr. 0,1597 di Jodio.

Riportando questi risultati a 100 p. di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Pb, Pb(OH)^2$
	I	II	III	IV	
Pt + Pb SO⁴	67,20	67,04	67,52	—	67,63
Pt	—	—	16,81	—	16,45
Pb	—	—	34,63	—	34,95
J	—	—	—	42,97	42,85

Sale di tallio.

È un precipitato color rosso-marrone che si ottenne, a temperatura ordinaria, dalla soluzione alcoolica del tetrajoduro con soluzione acquosa concentrata di acetato talloso. Ben lavato con acqua ed essicato nel vuoto fornì all'analisi i seg. risultati:

1° Grammi 0,4104 di sostanza calcinati in navicella di porcellana ed in corrente di acido cloridrico lasciarono per residuo gr. 0,0710 di platino.

2° Grammi 0,5426 di sostanza, per i quali si adoperò il metodo di separazione, usato nell'analisi del sale di tallio dell'acido tetracloroplatinico (1), dettero gr. 0,0932 di platino e gr. 0,3115 di joduro talloso, pari a gr. 0,1921 di tallio.

3° Grammi 0,3124 di sostanza, fusi con idrato sodico, dettero gr. 0,2570 di joduro di argento, pari a gr. 0,1388 di Jodio.

Questi risultati riferiti a 100 p. di sostanza, dànno:

	Trovato			Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Tl^2$
	I	II	III	
Pt	17,30	17,18	—	17,03
Tl	—	35,41	—	35,68
J	—	—	44,45	44,35

Sale di mercurio.

Trattando la soluzione alcoolica di tetrajoduro, a temperatura ordinaria, con soluzione acquosa concentrata di cloruro mercurico, in presenza di acetato di sodio, si ebbe un precipitato color marrone, il quale lavato con acqua ed essicato nel vuoto su acido solforico, fornì i seguenti dati analitici:

(1) A. Miolati, loc. cit.

1° Grammi 0,3233 di sostanza calcinati lasciaron per residuo gr. 0,0672 di platino.

2° Grammi 0,3199 di sostanza vennero calcinati in corrente d'aria, raccogliendo opportunamente il mercurio distillato e dosando poi questo come solfuro. Si ottennero così gr. 0,0662 di platino e gr. 0,0804 di solfuro di mercurio, pari a gr. 0,0693 di mercurio.

3° Grammi 0,3426 di sostanza fusi con idrato sodico dettero gr. 0,3413 di joduro di argento, pari a gr. 0,1844 di Jodio.

Riferendosi a 100 p. di sostanza, si ha:

	Trovato			Calcolato per $[PtI^4(OH)^2]Hg$
	I	II	III	
Pt	20,78	20,70	—	20,80
J	—	53,83	—	54,18
Hg	—	—	21,67	21,39

Ho fatto anche dei tentativi per ottenere il sale di bario cristallizzato, neutralizzando la soluzione alcoolica del tetrajoduro con una acquosa di barite. Per tale aggiunta, a temperatura ordinaria, la soluzione si scolora fino a diventare giallognola, rimanendo limpida; in capo però a pochi minuti essa si riduce e precipita platino metallico, e non mi fu in tal modo possibile di preparare il sale suddetto.

Dalle ricerche suesposte risulta perciò completa l'analogia fra i tre composti alogenati platinici $PtCl^4$, $PtBr^4$, PtI^4, i quali sono da considerarsi come anidridi acide alogenate.

Chimica. — *Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento dell'iodio* [1]. Nota IV di G. Oddo [2], presentata dal Socio Paternò.

È nota l'interessante relazione ch'esiste tra le pressioni parziali in un miscuglio di due vapori e le concentrazioni di esso e della soluzione che lo fornisce.

(1) Vedi note precedenti: Oddo e Serra, Gazz. chim. ital. 1899, II, 318 e 343; Rendic. Acc. Lincei 1899, 244 e 281; Oddo, Gazz. chim. ital., ibid. 330 e Rend. Acc. Lincei, ibid. 252

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale dell'Università di Cagliari.

Studiata già da molti (1), venne espressa da Planck (2) con la formola:

$$c - c_1 = \frac{p - p_1}{p}$$

e da Nernst (3) con l'altra:

$$c - c^1 = \frac{p - p_1}{p} \left(\frac{1}{1 + \frac{n}{N}} \right)$$

nelle quali c indica la concentrazione molecolare della soluzione, c_1 quella del vapore, p la tensione di vapore del solvente e p_1 quella della soluzione, n il numero delle molecole del corpo disciolto e N quelle del solvente.

Per soluzioni diluite la formola di Nernst acquista quasi il valore di quella di Planck, poichè $\frac{1}{1 + \frac{n}{N}}$ si avvicina all'unità.

Beckmann e Stock (4) se ne avvalsero per determinare il valore della correzione d'apportare ai pesi molecolari ricavati col metodo ebullioscopico, quando la sostanza disciolta è volatile col solvente. Basterà adottare invece della nota espressione:

$$\text{(I)} \qquad M = \frac{g_2 \cdot \Gamma}{\Delta}$$

l'altra

$$\text{(II)} \qquad M = \frac{(g_2 - g_1)\,\Gamma}{\Delta}$$

nelle quali M esprime il peso molecolare che si cerca, g_2 la concentrazione della soluzione, g_1 quella del vapore, Γ la costante d'inalzamento molecolare d'ebollizione e Δ l'inalzamento del punto d'ebollizione.

E poichè

$$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$$

è quasi costante per le diverse concentrazioni, si può fare anche uso di quest'altra formola:

$$\text{(III)} \qquad M = \frac{g_2\,(1 - \alpha)\,\Gamma}{\Delta}$$

(1) Wied. Ann. *14*, 48 (1881).
(2) Zeits. phys. Ch. II, 408 (1888).
(3) Zeits. phys. Ch. VIII, 110 (1891).
(4) Zeits. phys. Ch. XVII, 110 (1895).

Quindi per determinare il peso molecolare col metodo ebullioscopico delle sostanze volatili occorre conoscere, oltre i soliti dati, la concentrazione del vapore.

Per raggiungere questo scopo Beckmann e Stock hanno pensato di distillare separatamente una soluzione di concentrazione conosciuta della sostanza da esaminare e raccoglierne diverse frazioni: determinato il peso della sostanza distillata col solvente, calcolavano la concentrazione di ciascuna frazione (che indicava quella del vapore corrispondente (g_1)), inoltre la concentrazione che aveva la soluzione bollente che le aveva fornite, al principio e alla fine, ne pigliavano la media (g_2), e ottenuti così i valori di g_1 e g_2 ricavavano α. Eseguivano poscia, in una seconda serie d'esperienze, le determinazioni ebullioscopiche col processo ordinario, e nelle grandezze molecolari osservate per le diverse concentrazioni introducevano la correzione indicata da tale rapporto secondo la formola (III).

Questo processo è lungo e costoso, perchè richiede per ogni sostanza due serie diverse d'esperienze; le quali poi, appunto perchè eseguite in serie, possono condurre per un cumulo di piccoli errori a dei risultati del tutto erronei. Ciò difatti credo sia capitato a Beckmann e Stock nell'applicare il loro metodo allo studio delle soluzioni bollenti di iodio, come dimostrerò nel corso di questa Memoria.

Col metodo che io descrivo, invece, una sola esperienza è sufficiente a fornirci tutti i dati necessarî per il calcolo del peso molecolare con le formole (II) o (III), ed in modo così semplice e rapido, che chiunque lo può subito eseguire se, compita la determinazione ebullioscopica, gl' insorga il dubbio, per i risultati ottenuti, che la sostanza disciolta sia volatile col solvente.

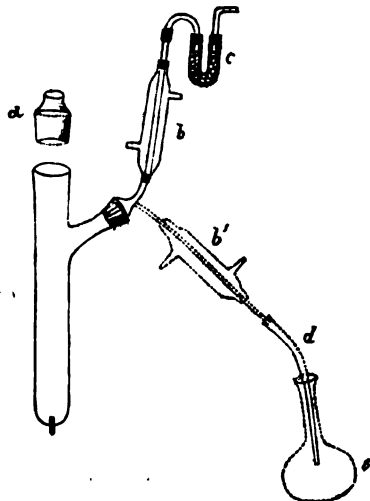
Io ho fatto uso nelle mie ricerche del solito apparecchio Beckmann [1] con refrigerante [2]; ma al tubo ebullioscopico, per la natura delle sostanze da studiare, adattai turaccioli di vetro a smeriglio, anzichè, come si suole, di sughero. Quello destinato al passaggio del termometro aveva la forma *a*, rappresentata nella figura, affinchè vi si potesse adattare o per mezzo d' un anello di sughero d' un millimetro circa di spessore o a dirittura a smeriglio.

L'altro turacciolo, pure pervio, era saldato ad una canna d' un piccolo refrigerante a corrente d' acqua, e questa canna era piegata ad angolo tale che il refrigerante potesse mettersi o in posizione quasi verticale (*b*) a ricadere, ovvero, facendola girare di 180°, in posizione inclinata (b_1) per distillare, lasciando tutto il resto dell'apparecchio immutato.

Le determinazioni venivano condotte nel seguente modo: eseguivo anzitutto al solito la lettura del punto d'ebollizione del solvente, aggiungevo la

(1) Zeits. phys. Ch. VIII, 224 (1891).
(2) Ibid. XV, 663 (1894).

sostanza da studiare e, tenendo il refrigerante del tubo ebullioscopico a ricadere (b) e chiuso con tubo ad U a cloruro di calcio (c), eseguivo la lettura del punto d'ebollizione della soluzione. Quindi, sospendendo per comodità per pochi istanti il riscaldamento, facevo ruotare il refrigerante sino a condurlo alla posizione (b_1), al tubo ad U sostituivo un piccolo allunga (d) unito anch'esso a smeriglio alla canna del refrigerante, destinato a portare il li-

quido che distillava nel fondo d'una boccetta (e) a turacciolo smerigliato e tarata, circondata di ghiaccio. Raccolta una certa quantità di liquido, leggevo di nuovo la temperatura, staccavo l'allunga e ritornavo a pesare la boccetta. Nel liquido raccolto determinavo la quantità di sostanza distillata col solvente e quindi calcolavo tutti gli altri dati necessarî, come risulta dalle tavole.

Quando la titolazione della sostanza distillata col solvente si può eseguire volumetricamente, come nel caso dell'iodio, tutto il processo dell'operazione non richiede più di due ore e in cinque ore senza disagio se ne possano compire bene tre successive.

La quantità di solvente che impiegavo in ciascuna determinazione era tale da superare di circa un centimetro il bulbo del termometro, e sospendevo la distillazione quando il livello del liquido raggiungeva quasi l'apice del bulbo, evitando sempre che rimanesse in parte scoperto.

Pel bagno esterno impiegavo il medesimo solvente, al quale aggiungevo piccola quantità di altra sostanza non volatile.

Fissato il metodo, ho ripreso lo studio delle soluzioni bollenti di iodio e di alcune cloroanidridi inorganiche, a complemento delle ricerche precedentemente pubblicate da me in collaborazione col dott. E. Serra, citate avanti.

I.

Iodio.

Nel lavoro predetto [1], dopo aver riassunto le divergenze inesplicabili che esistono nei risultati sperimentali, pubblicati da diversi chimici, sulla grandezza molecolare dell'iodio in soluzione, facemmo notare come anche alcuni dei nostri, ricavati col metodo ebullioscopico, differivano di molto da quelli trovati da Beckmann e Stock, e segnatamente le determinazioni eseguite in soluzione in benzolo e in alcool etilico. Difatti, calcolando il peso molecolare con la formola (I), noi abbiamo ottenuto 273-279 nel benzolo e 265-275 nell'alcool; e Beckmann e Stock invece 335-360 nel primo e 330-342 nel secondo solvente; mentre $I_2 = 253,70$.

Essi attribuirono le cifre così elevate ottenute alla volatilità dell'iodio; e difatti, determinando α della formola (III), trovarono che raggiungeva un altissimo valore (0,27-0,30 e 0,27-0,33) e, apportata questa correzione, i pesi mole colari osservati si riducevano rispettivamente a 223-235 e 235-241, cioè per la molecola di 2 atomi.

Sicuri delle nostre esperienze più volte ripetute, non esitammo a sollevare dei dubbi anche sul valore della correzione introdotta da questi due chimici; scrivemmo difatti allora [2]. « Noi non sappiamo spiegare questa grande divergenza nei risultati sperimentali; siamo però convinti, per ripetute esperienze, che durante le determinazioni la quantità di iodio che si volatizza è piccolissima tanto da colorare talvolta poco o quasi affatto i vapori del solvente, e quindi anche i valori della correzione introdotta dai predetti chimici non si possono ritenere del tutto esatti ».

E non ci eravamo ingannati! Stabilito il metodo sperimentale, che ho descritto, ho voluto ripetere gran parte dell'esperienze ebullioscopiche di Beckmann e Stock, ed ho potuto dimostrare che questi due chimici son caduti in grave errore sia nelle determinazioni ebullioscopiche che in quelle per fissare il valore di α della formola (III).

I risultati, da me ottenuti, sono riportati nelle seguenti tavole, dove con l'espressione « concentrazione iniziale e finale » intendo dire quelle che aveva la soluzione bollente prima d'eseguire la distillazione e alla fine di questa; sotto l'espressione « molecola osservata » riporto i valori che risultano calcolando il peso molecolare con la formola (I), e con « molecola corretta » quelli che risultano calcolando con la formola (II) o (III).

Riporto inoltre brevemente per comodità del lettore, sotto la rubrica « Nostri risultati precedenti » quelli pubblicati da me e Serra per i solventi che allora studiammo, assieme ai risultati di Beckmann e Stock per $\frac{g_1}{g_2} = \alpha$ e per la

[1] Gazz. chim. ital. 1899, II, 343-347 e Rend. Acc. Lincei 1899, 282-284.
[2] Loco citato.

molecola osservata e corretta, affinchè se ne possa constatare la grave divergenza.

In cloroformio.

$\Gamma = 36{,}6$ $\quad I_2 = 253{,}70$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,0397	5,2865	5,3754
	iodio in essa contenuto	0,0026	0,0047	0.0080
	solvente	4,0371	5,2818	5,3674
	concentrazione (g_1)	0,0644	0,0889	0.1491
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,4148	2,0499	3,5724
	» finale	1,6241	2,4895	4,2906
	media (g_2)	1,51945	2,2697	3,9315
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,04	0,04	0,04
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,198	0°,246	0°,445
	» finale	0, 216	0, 298	0, 511
	media (Δ)	0, 207	0, 272	0, 478
Molecola	osservata	268	305	301
	corretta	257	292	289

In questo e in tutti i casi consimili, che riscontreremo in questo lavoro, ho tralasciato d' introdurre anche la correzione che deriva dal fatto che il corpo in soluzione è in parte polimerizzato, mentre non lo è forse allo stato di vapore mescolato con quello del solvente. Beckmann e Stock trovarono invece in cloroformio:

$$\alpha = 0{,}27 \;;\; 0{,}28 \;;\; 0{,}26 \;;\; 0{,}28 \;;\; 0{,}27$$

e per le concentrazioni:		0,800	1,670	2,240	3,530	4,220	5,260
molecola	osservata	325	306	301	321	316	316
	corretta	277	233	220	234	231	231

In tetraclorometane.

$\Gamma = 52{,}6$ $\quad I_2 = 253{,}70$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	3,8061	2,6134	3.1974
	iodio in essa contenuto	0,0097	0,0077	0,0101
	solvente	3,7964	2,6057	3,1873
	concentrazione (g_1)	0,2555	0,2955	0,3168
Soluzione bollente	a concentrazione iniziale	1,6566	2,4013	3,8197
	» finale	1,9156	2,6687	4,4047
	media (g_2)	1,7861	2,5350	4,1122
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0.14	0,12	0,08
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,234	0°,343	0°,545
	» finale	0, 266	0, 385	0, 618
	media (Δ)	0, 250	0, 364	0, 581
Molecola	osservata	376	366	372
	corretta	325	322	342

Nostri risultati precedenti, molecola non corretta: 382-392.
Beckmann e Stock invece ottennero:

$\alpha = 0,35$; 0,38 ; 0,38 ; 0,38 ; 0,38 ; 0,34

e per le concentrazioni: 1,040 ; 2,075 ; 3,904 ; 6,001

molecola				
osservata	370	365	374	382
corretta	233	230	236	241.

In alcool etilico.

$\Gamma = 11,5$ $I_2 = 253,70$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4 1808	5,0630	2,0542
	iodio in essa contenuto	0,0012	0,0024	0,0012
	solvente	4,1796	5,0606	2,0530
	concentrazione (g_1)	0,0287	0,0474	0,0584
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,1652	1,7062	3,1218
	» finale	1,7364	2,8460	3,8095
	media (g_2)	1,4508	2,2761	3,4654
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,02	0,02	0,016
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,053	0°,075	0°,142
	» finale	0, 077	0, 119	0, 174
	media (Δ)	0, 065	0, 097	0, 158
Molecola	osservata	257	269	252
	corretta	252	264	248

Nostri risultati precedenti per concentrazioni variabili da 1,8 a 6 %: 266-275, molecola non corretta.

Beckmann e Stock invece ottennero:

$\alpha = 0,27$; 0,29 ; 0,28 ; 0,33 ; 0,33 ; 0,29

e per le concentrazioni: 3,217 ; 6,650 ; 9,533 ; 11,850

molecola				
osservata	342	334	330	334
corretta	241	235	233	235

In benzolo.

$F = 26,7$ $I_2 = 253,70$

		Determinazioni I	Determinazioni II
Frazione distillata	peso	3,2036	2,4310
	iodio in essa contenuto	0,0004	0,0012
	solvente	3,2032	2,4298
	concentrazione (g_1)	0,0124	0,0494
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,0192	3,4818
	» finale	1,3552	4,0320
	media (g_2)	1,1872	3,7569
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,01	0,01
Inalzamento del punto d'eboll.	a concentrazione iniziale	0°,104	0°,340
	» finale	0, 140	0, 400
	media (Δ)	0, 122	0, 370
Molecola	osservata	260	271
	corretta	257,4	268

Nostri risultati precedenti per concentrazioni che variavano da 2,2 a 9,2: 273-279, molecola non corretta.

Beckmann e Stock invece ottennero:

$$\alpha = 0,27 \;;\; 0,30 \;;\; 0,30 \;;\; 0,28 \;;\; 0,30 \;;\; 0,30$$

	e per le concentrazioni:	2,055	2,918	5,311	8,762	1,804	3,110	5,080
molecola	osservata	354	342	343	344	347	360	335
	corretta	251	242	233	233	246	255	238

Oltre che in questi quattro solventi Beckmann e Stock studiarono le soluzioni in cloruro d'etilene, alcool metilico, metilal e acetone, liquidi dei quali non ho potuto per ora disporre, per ripetere le loro esperienze; che i risultati ottenuti con gli altri quattro studiati mi autorizzano a ritenere anch'esse erronee.

E però concludendo su questa parte del mio lavoro, noi non possiamo affermare in generale, come fanno Beckmann e Stock, che la molecola dell'iodio nelle diverse soluzioni bollenti sia sempre costituita da due atomi: risulta dalle mie esperienze invece che, a molecola corretta, ciò si può asserire per le soluzioni in benzolo (rossa), alcool etilico (rosso bruna) e solfuro di carbonio (violetta) [1]; invece in cloroformio (soluzione violetta) a concentrazioni superiori al 2 % si ottengono valori superiori di circa $^1/_5$ a quelli calcolati per la molecola biatomica, e in tetraclorometano (soluzione violetta) fin da deboli concentrazioni valori ancora superiori, che se non corrispondono

[1] Nel lavoro col dott. Serra.

per la molecola di tre atomi, poco probabile, ora, come nella nota precedente, mi conducono a concludere che le molecole dell'iodio nelle soluzioni bollenti in cloroformio e più ancora in tetraclorometane risultano d' un miscuglio di I_2 e I_4; e questo stato di polimerizzazione parziale pare non abbia alcuna influenza sul colorito della soluzione, difatti sono violette sia le soluzioni in questi due ultimi solventi, che quelle in solfuro di carbonio, la quale contiene esclusivamente molecole I_2.

Chimica. — *Sulla formula del Triazolo.* Nota II (1) di Guido Pellizzari (2), presentata dal Socio Paternò.

Parte sperimentale.

Ad una parte di feniltriazolo simmetrico sciolto in un miscuglio di 11 p. di acido solforico e 50 p. d'acqua, si aggiunsero poco per volta 11 p. di permanganato potassico sciolto in 175 p. d'acqua. La reazione fu eseguita con 40 gr. di prodotto preso in porzioni di 5 gr. e in bottiglie di circa 3 litri. La temperatura dell'ambiente era di 22-24° e la decolorazione del liquido avvenne in circa sette giorni. Si filtrò per separare gli ossidi di manganese, quindi si saturò il liquido con carbonato sodico fino a reazione alcalina, poi si rese leggermente acido con acido acetico e infine con acetato di rame e si precipitò il composto ramico triazolico in fiocchi azzurri, che furono raccolti, ben lavati e in sospensione nell' acqua, decomposti con idrogeno solforato. Separato il solfuro di rame, il liquido fu fatto bollire fino a scomparsa dell'idrogeno solforato e quindi fu trattato con barite in eccesso per togliere l'acido solforico eppoi con anidride carbonica. La soluzione limpida filtrata fu evaporata a leggero calore a b. m. e si ebbe infine il triazolo sublimato nei suoi caratteristici aghi sottili, bianchi fusibili a 120°.

Gr. 0,1086 di sostanza dettero 55 cc. d'azoto a 12°,2 e 764 mm.

	trovato per %	calcolato per $C_2N_3H_3$
N	60,80	60,87

È da notarsi che tanto l'Andreocci che io siamo arrivati alla stessa sostanza con reazioni fatte a temperatura ordinaria ed evaporando poi la soluzione a 60-70° circa. La identificazione del prodotto fu fatta anche coi seguenti sali:

(1) Vedi questi Rendiconti, 1° sem. 1901, pag. 297.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Genova.

Triazolo dal Feniltriazolo asimmetrico:
Aghi bianchi fusibili a 120-121°
Sublima sotto 100°
Nitrato fonde a 138°
Ossalato fonde 241°
Cloroplatinato cristallizzato fonde a 73-75°
Cloroplatinato anidro si decompone a 167-170° — Bollito con acqua dà il composto Anderson.

Triazolo dal Feniltriazolo simmetrico:
Aghi bianchi fusibili a 120-121°
Sublima sotto 100°
Nitrato fonde a 139°
Ossalato fonde a 241-242°
Cloroplatinato cristallizzato fonde a 73-75°
Cloroplatinato anidro si decompone a 167-170° — Bollito con acqua dà il composto Anderson.

Nessuna differenza si notò nelle solubilità coi diversi solventi: identici apparivano anche al microscopio i composti ottenuti col nitrato d'argento, cloruro mercurico, solfato ramico, cloruro ramico in presenza di acido cloridrico.

Ecco la descrizione di questi sali che mi servirono alla identificazione:

Cloroplatinato di triazolo $(C_2N_3H_3.HCl)_2\ PtCl_4,\ 6H_2O$. Si forma sciogliendo il triazolo in quanto basta di acido cloridrico concentrato, quindi si aggiunge cloruro platinico molto concentrato. Talvolta si separa subito il prodotto, spesso invece rimane in soluzione soprassatura ed allora si bagna col liquido la punta di una bacchetta, si evapora a leggero calore finchè si veda un po' di sostanza solida e con questa si eccita la cristallizzazione e si ottengono aghi sottilissimi, lunghi, splendenti giallo-aranciati. Furono raccolti e lavati con acido cloridrico di media concentrazione

gr. 0,3282 di sostanza seccata all' aria persero alla stufa, prima a 60-70°, eppoi a 100° fino a peso costante gr. 0,0538 di acqua;

gr. 0,9519 di sostanza cristallizzata dall'acido cloridrico persero alla stufa gr. 0,158 di acqua;

gr. 0,413 di sostanza cristallizzata dall' acido cloridrico persero alla stufa gr. 0,0693 di acqua e per calcinazione lasciarono gr. 0,123 di platino.

	trovato per %	calcolato
H^2O	16,36 — 16,59 — 16,77	16,46
Pt	29,78	29,72

Il cloroplatinato idrato fonde a 73-75° o per meglio dire si scioglie nella sua acqua di cristallizzazione. Quando è anidro comincia a rammollirsi a 167° e si decompone a 170°. All'aria riprende l'acqua di cristallizzazione lentamente: in una prova fatta dopo tre ore era aumentato del 4 % in peso; dopo una notte di 13,26 % e dopo 24 ore aveva ripreso quasi totalmente le molecole d'acqua. È assai solubile anche a freddo nell' acido cloridrico, nell'acqua e un po' meno nell'alcool.

Tetracloroplatotriazolo $(C_2N_3H_3)_2PtCl_4$. Il cloroplatinato normale scaldato a 170° per varie ore perde due molecole di acido cloridrico. La determinazione fu fatta partendo dal sale idrato

gr. 0,3282 di sostanza persero a 100° gr. 0,0538 di acqua, e a 170° fra acqua e acido cloridrico il peso diminuì di gr. 0,0932.

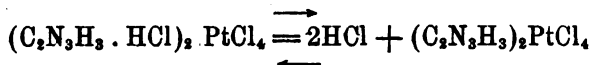
	trovato per %	calcolato
$2HCl + 6H^2O$	28,10	27,59

Scaldato a temperatura superiore perde ancora acido cloridrico. Si può ottenere anche facendo bollire per un paio d'ore la soluzione acquosa e diluita del cloroplatinato normale. Il liquido diventa opalescente e quindi si depone una polvere tenuissima come il magistero di solfo. Questo precipitato di un colore giallo chiaro anche al microscopio non mostra nessuna apparenza cristallina. È pochissimo solubile nell'acqua bollente e insolubile a freddo. Scaldato fino a 270° non fonde.

Gr. 0,3248 di sostanza dettero per calcinazione gr. 0,1323 di platino.

	trovato per %	calcolato
Pt	40,76	41.05

La sostanza, che ha tutte le caratteristiche dei composti Anderson, mostra però un comportamento nuovo coll'acido cloridrico bollente: riprende cioè le due molecole di acido cloridrico riformando il cloroplatinato normale. La reazione è dunque reversibile

$$(C_2N_3H_3 . HCl)_2 PtCl_4 \rightleftharpoons 2HCl + (C_2N_3H_3)_2PtCl_4$$

Werner ha potuto, è vero, riottenere il cloroplatinato normale di piridina dal composto Anderson (1), ma scaldando in tubo chiuso a 180° per varie ore. Nel nostro caso basta far bollire la sostanza nell'acido cloridrico concentrato per pochi minuti perchè si sciolga, e per concentrazione si ottiene il cloroplatinato normale nei soliti aghi fusibili a 70-75° e decomponibili a 167-170°, se sono anidri.

Nitrato di triazolo $C_2N_3H_3, NO_3H$. Si forma sciogliendo nell'acido diluito il triazolo e si ottengono dei cristallini bianchi, duri, prismatici assai solubili nell'acqua anche a freddo e discretamente nell'alcool. Fonde a 138° in un liquido incoloro da cui si separano delle bollicine. Questo sale è stato ottenuto anche da Hantzsch e Silberrad dalla tetrazolina coll'acido nitroso (1).

gr. 0,154 di sostanza dettero 55,2 cc. d'azoto a 18° e 765 mm.

	trovato per %	calcolato
N	42,45	42,42

(1) Zeits. anorg. Ch. XV, 123.

Ossalato di triazolo $C_2N_3H_3 . C_2O_4H_2$. Si ottiene aggiungendo del triazolo ad una soluzione satura di acido ossalico. Cristallizzato dall'acqua si ottiene in piccolissimi cristalli bianchi lucenti che si decompongono a 241°. E poco solubile nell'acqua fredda e discretamente a caldo.

Gr. 0,1802 di sostanza dettero 39 cc. d'azoto a 9° e 762 mm.

	trovato per %	calcolato
N	26,44	26,41

Triazolo ramico $(C_2N_3H_2)_2Cu$. Fu preparato aggiungendo solfato ramico alla soluzione di triazolo. Precipita come polvere azzurra indistintamente cristallina, insolubile nell'acqua e solubile negli acidi.
gr. 0,6965 di sostanza dettero gr. 0,279 di ossido di rame.

	trovato per %	calcolato
Cu	31,77	31,87

Questo triazolo ramico trattato con acido cloridrico piuttosto concentrato si converte in una polvere verde cristallina caratteristica poco solubile. Lo stesso prodotto si produce con una soluzione cloridrica di triazolo e cloruro ramico. Raccolto e lavato con acido cloridrico si mantiene inalterato, mentre lavato con acqua pura si dissocia e si riforma il triazolo ramico.

Nel terminare questa Nota annunzio che facendo agire l'ioduro di metile sul composto sodico del triazolo, ho ottenuto un *n*- metiltriazolo fusibile a 20° e bollente a 183°. Siccome è differente da quello simmetrico di Freund sembra che la sostituzione sia avvenuta in posizione asimmetrica. Questo fatto però nulla toglie alle considerazioni di tautomeria riguardanti la formula del triazolo.

Geologia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei. I. Salotrachite nera ad augite ed egirina.* Nota di E. MANASSE, presentata dal Corrispondente DE STEFANI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Berichte, 1900, pag. 85.

Geologia. — *Stato attuale dei ghiacciai del Monte Rosa.* Nota di G. Dainelli, presentata dal Corrisp. C. De Stefani.

Nell'agosto 1901 mi recavo nella valle di Gressoney, onde iniziare una serie di osservazioni regolari intorno ai ghiacciai del versante italiano del Monte Rosa, assegnando a questo, come limite occidentale, il colle del Lys, e non già quello del Teodulo, che segna, secondo me, il limite verso Ovest del più esteso *gruppo* del Monte Rosa. Disgraziatamente una continua avversità del tempo mi impedì di fare osservazioni e rilievi completi ed accurati; ma, siccome ho potuto mettere abbastanza numerosi segnali, e stabilire gli alternati movimenti di progresso e ritiro dei due massimi ghiacciai, del Lys e di Macugnaga, nel secolo decorso, così non reputo privo di interesse presentare adesso un resoconto sommario del mio operato e dei miei studî.

Richter, nelle sue recenti ricerche di morfologia dell'alta montagna, dice: « Nelle Alpi Pennine tutte le proporzioni sono molto grandi, e i tipici circhi, per questo, poco frequenti » (1). Questa affermazione invero mi era parsa strana, e per questo nelle mie numerose escursioni andai osservando se veramente mancassero o fossero assai rare quelle forme d'alta montagna, che Richter descrisse più che altro dalle Alpi Orientali; ed infatti il gruppo del Monte Rosa, alta montagna per eccellenza, per quella piega che il suo crinale presenta circa alla metà della sua estensione, manda radialmente in quasi tutte le direzioni numerose vallate, presentando così quella condizione, che, secondo Richter, facilita appunto la formazione di circhi.

E circhi tipici, dalle forme più o meno spiccate, si trovano sotto al colle delle Cime Bianche (2980 m.), dalle due parti del passo di Bettolina (2896 m.), a Nord del Monte Rosso (2990 m.), e, se si passa ad Oriente della valle di Gressoney, si incontrano pure a Nord del Monte Telcio (2833 m.), ad Ovest del Seehorn (2577 m.), nella parte superiore del vallone di Indren, nella conca di Weissealpe, sotto al col d'Olen (2865 m.), al colle dei Salati, al colle delle Pisse (3162 m.); e gli esempi si potrebbero moltiplicare all'infinito; noterò invece la tipica forma ad U del vallone delle Pisse, e quella simile, assai recente, e veramente bella come esempio di erosione glaciale e meteorica, che si osserva in basso della fronte del ghiacciaio di Bors.

Del resto, per non allontanarmi dallo scopo che mi ero prefisso, ho dovuto limitare le osservazioni morfologiche, ed invece ho posto segnali alle fronti dei ghiacciai di Macugnaga (bocca destra e sinistra), di Bors, di Indren (bocca destra e sinistra), e del Lys; ed ho rilevato la parte terminale degli ultimi

(1) E. Richter, *Geomorphologische Untersuchungen in den Hochalpen*. Petermanns Mittheilungen, 1900, Heft 132, pag. 101.

quattro. Per il ghiacciaio di Macugnaga non ho potuto fare altrettanto, causa la continua e dirotta pioggia che mi perseguitò durante il mio breve soggiorno nella valle Anzasca, e mi posso ben chiamare fortunato se, in tale avversità di tempo, ebbi modo di porre i segnali alle due bocche; ai ghiacciai di val Sesia non ho avuto mezzo di porre segni di riferimento, nè di fa rilievi, a causa della continua caduta di massi, pietre e blocchi di ghiaccio dalle loro fronti, che terminano presso a morene frananti, e su terreno estremamente scosceso, e quasi affatto impraticabile.

Sui ghiacciai del Monte Rosa non abbiamo studî recenti, e solo notizie sparse sporadicamente qua e là negli scritti di scienziati, viaggiatori e alpinisti; solo su quello di Macugnaga si è soffermato più a lungo lo Stoppani (1), per il periodo che va dal 1870 al 1881; riunendo e riassumendo queste varie notizie, e confrontandole con i diversi e successivi rilevamenti topografici, vedremo con abbastanza buona approssimazione le alternative di progresso e di ritiro attraverso alle quali sono passati i ghiacciai di Macugnaga e del Lys nel secolo decorso; per i ghiacciai minori, e intermedî tra questi primi, poco conosciuti e poco visitati quasi fino a pochi anni fa, le notizie o sono affatto nulle, o si riducono a quelle che si possono ricavare da rilievi cartografici non molto esatti, e da poche comunicazioni orali di guide e alpigiani.

Quanto al ghiacciaio di Macugnaga sappiamo dunque, per opera dell'Amoretti (2), che nel 1780 aveva un massimo di espansione; degli anni immediatamente successivi nessuna notizia è rimasta, ma si può supporre, con molta probabilità di coglier nel giusto, che succedesse un ritiro al quale fece poi seguito nei primi anni del secolo 19° un nuovo progresso. Di questo si ha la prova nell'immenso sviluppo del ghiacciaio nel 1820 (3), il quale anno può segnare (4) il principio di un altro ritiro, che, assai sensibile già nel 1824 (5) durò per un periodo assai lungo, perchè solo nel 1845 (6) si può arguire debba esser ricominciato l'avanzamento. Nel 1850 il ghiacciaio era assai accresciuto (7), e nel 1855 proseguiva nel suo progresso (8), tanto

(1) A. Stoppani, *Corso di Geologia*. — *Il bel Paese*. — *Sull'attuale regresso dei ghiacciai nelle Alpi* (R. Acc. dei Lincei, 1882, vol. VI, serie 3ª).

(2) Amoretti, *Viaggio da Milano ai tre laghi, Maggiore, di Lugano e di Como, e ne' monti che li circondano*. Milano, 1817.

(3) *Carta topografica degli Stati di S. M. Sarda*, 1 : 50,000. Torino, 1851-1871. Rilievo del 1820-1821.

(4) A. Stoppani, *Il bel Paese*.

(5) Velden, *Der Monte Rosa. Eine topographische und naturhistorische Skizze*, Wien, 1824.

(6) Forbes, *Travels in the Alps*, 1845.

(7) Oberti, in Stoppani, *Il bel Paese*.

(8) Forbes, *The tour of M. Blanc and of M. Rosa*. Edimbourgh, 1855.

che rilievi topografici del 1859 (¹) e del 1862 (²) notano una grande espansione; per quanto fino dal 1860, e forse anche prima (³), debba ritenersi esser principiato un moto retrogrado; che seguitò a manifestarsi con crescente intensità nel 1870 (⁴), nel 1873 (⁵), nel 1876 (⁶), finchè circa nel 1881, nel quale anno il ghiacciaio appariva assai povero, dovette ricominciare un periodo di progresso. Per quanto il Rev. Piana (⁷) ne segni il principio solo quattro anni dopo, cioè nel 1885, appunto a quest'epoca l'avanzamento era già stato tale, da resultare evidente dai rilievi topografici di quell'anno (⁸); nel 1891 il periodo di progresso seguitava (⁹), e solo nel 1893 rimaneva stazionario (¹⁰), per dar luogo ad un ultimo ritiro, di cui non si ha per adesso prova se sia terminato o se continui tuttora.

Per questo ghiacciaio di Macugnaga noterò che nel 1881 il signor Pio Calza ne rilevò un disegno, che poi Stoppani inserì in un suo schizzo topografico (¹¹), e che mostra il ghiacciaio stesso ritirato fino al grosso crestone roccioso, il quale limita a Sud-Est il ghiacciaio italiano del Monte Rosa; è vero che nel disegno viene indicata erroneamente a quell'altezza l'Alpe Pedriolo, per cui si potrebbe prendere questa come più sicuro e probabile punto di riferimento. Ma anche in questo secondo caso, più favorevole, il ghiacciaio, per raggiungere la massima estensione che presentò pochi anni dopo, avrebbe dovuto avere una velocità media di circa 350 metri all'anno, mentre la testimonianza del Rev. Piana (¹²) ci dice che la massima velocità fu di 100 metri, e si verificò durante un solo anno; quindi, secondo me, va ritenuto certamente errato quel limite riferito dallo Stoppani dietro le indicazioni del signor Calza; credo invece che nel 1881, dopo molti anni di un periodo regressivo, il ghiacciaio di Macugnaga, che già nel 1876 si era mostrato allo Stoppani (¹³) tutto quanto coperto di detriti e di massi, lo dovesse essere ancor più dopo cinque anni, durante i quali doveva avere subìto un'ulteriore e notevole diminuzione nello spessore, e in sì forte misura, da far ritenere al signor Calza, non pra-

(¹) *Carte de la Suisse* 1 : 50,000. Eidg. topogr. Bureau, 1881. Rilievo del 1859-1860.
(²) *Carte de la Suisse* (Dufour), 1 : 100,000. Rilievo del 1862.
(³) Stoppani, *Il bel Paese.*
(⁴) Stoppani, *Il bel Paese. — Sull'attuale regresso dei ghiacciai nelle Alpi*, 1882.
(⁵) *Monte Rosa* par M. de Dechy, 1 : 100,000, Budapesth, 1873.
(⁶) Stoppani, *Il bel Paese.*
(⁷) Piana, in G. Rey, *Il Colle Gnifetti*, Boll. del C. A. I. 1893.
(⁸) *Carta dell'Istituto Geografico Militare*, 1 : 50,000. Rilievo del 1884.
(⁹) Tonetti, *Guida della Valsesia e del Monte Rosa*. Varallo, 1891; G. Rey, *Il Colle Gnifetti*, Boll. del C. A. I. 1893.
(¹⁰) Piana, in G. Rey, *Il Colle Gnifetti*, Boll. del C. A. I. 1893.
(¹¹) Stoppani, *Sull'attuale regresso dei ghiacciai nelle Alpi*, 1882.
(¹²) Piana, in G. Rey, *Il Colle Gnifetti*, Boll. del C. A. I. 1893.
(¹³) Stoppani, *Il bel Paese.*

tico di osservazioni geologiche, di aver presente il letto vuoto e sassoso di un ghiacciaio, anzichè un ghiacciaio mascherato da materiali rocciosi.

Riepilogando per sommi capi le notizie che ho potuto raccogliere intorno al ghiacciaio del Lys, si vede che questo, verso la fine del secolo 18°, si trovava presso ad un massimo di avanzamento (1); un regresso certamente seguì, di cui non si ha pertanto notizia, ed al quale successe una nuova grande espansione, che portò la fronte, nel 1820, fino a circa 250 metri da Cortlis (2); in quell'anno cominciò un ritiro, già sensibile nel 1824 (3), notevole poi nel 1842 (4), e sì intenso, che durò fino a tutto il 1852 (5), portando la fronte al di sotto del crestone occidentale dell' Hoheslicht. Il nuovo progresso durò fin verso il 1859 (6), e fu tale, che nel 1862 (7) la espansione era sempre assai grande, e poco prima del 1865 (8) la bocca si trovava circa 500 metri più in basso del livello attuale; ciò che d'altra parte concorda con le notizie orali raccolte a Gressoney-la-Trinité; il ritiro che seguì era già notevole nel 1873 (9), e maggiore nel 1884 (10), nel quale anno la fronte aveva su per giù i limiti attuali; a quest'epoca, se non forse prima, si rinnuovò l' avanzamento, durato fin verso il 1889 (11) in proporzioni assai mediocri; quindi cominciò un breve periodo stazionario, comprovato da piccole morene frontali, ed al quale in questi ultimi anni seguì una piccola oscillazione regressiva, della quale si ha la misura nella distanza tra le dette morene e la fronte attuale. Osservazioni più complete e successive, riferite al segnale da me posto, diranno in quale periodo ci troviamo precisamente adesso.

Per il ghiacciaio del Lys trovo da modificare una misura data da Forbes, che è certamente esagerata; egli nel 1855 (12) dice che il ritiro fino a quell'anno, a cominciare dal 1820, aveva lasciato scoperta un'area di un miglio quadrato; egli dà con ciò un' idea approssimativa del limite inferiore al quale si arrestava allora la fronte, e che doveva essere assai più indietro

(1) De Saussure, *Voyages dans les Alpes*. Neûchatel, 1803.

(2) Zumstein, *Voyage sur le Mont Rose et première ascension de son sommet méridional confinant avec le Piémont.*

(3) Welden, *Der Monte Rosa. Eine topographische und naturhistorische Skizze.* Wien, 1824.

(4) Forbes, *Travels in the Alps*, 1845.

(5) King, *Italian Valleys*, 1855.

(6) De Peccoz, in Sella e Vallino, *Gressoney e il Monte Rosa*, 1890.

(7) *Carte de la Suisse* (Dufour), 1 : 100.000. Rilievo del 1862.

(8) *The Valpelline, the Valtournanche, and the Southern Valleys of the Chain of Monte Rosa*. A. Reilly, 1 : 100.000.

(9) *Monte Rosa* par M. de Dechy, 1 : 100.000. Budapesth, 1873.

(10) *Carta dell' Istituto Geografico Militare*, 1 : 50.000. Rilievo del 1884.

(11) Sella e Vallino, *Gressoney e il Monte Rosa*, 1890.

(12) Forbes, *The tour of M. Blanc and of M. Rose*. Edimbourgh, 1855.

del limite attuale, poichè questo dista circa 1200 metri in linea retta dall'Alpe Cortlis, e cioè circa 950 metri dal limite del ghiacciaio nel 1820, e poichè anche la distanza tra la sommità delle due morene laterali è, all'altezza della fronte attuale, di circa 700 metri, e va sempre diminuendo a valle; quindi, pur ammettendo che non debba esser precisa la misura che Forbes cita, in vero, approssimativamente, bisognerebbe però sempre credere che la bocca del ghiacciaio del Lys fosse, poco prima del 1855, ben al di sopra del crestone occidentale dell' Hoheslicht, sotto al quale si trova ora la fronte; mentre da ciò che dice King, citando cifre esatte e punti fissi di riferimento [1], appare estremamente esagerata, e quindi errata, la misura di Forbes.

Per i ghiacciai della val Sesia, di Bors, e di Indren, dei quali nessuno presenta adesso una vera e propria lingua ghiacciata, ho potuto constatare un regresso effettivo, più o meno notevole, senza poter dire però se questo abbia avuto intercalati dei periodi di avanzamento; osserverò che per i ghiacciai della val Sesia, il cui letto è molto ripido, ed interrotto da frequenti salti rocciosi, mentre è facilitato un ritiro della fronte, non solo per una ablazione normale prodotta da fusione, ma anche per valanghe, continue ed incessanti durante l'estate, così viene ostacolato per le stesse ragioni un avanzamento. Per le condizioni sfavorevoli del terreno non ho potuto porre segnali nè far rilievi, ma alcune fotografie da me prese stabiliscono esattamente il limite inferiore del ghiacciaio della Sesia presso a un salto roccioso. Da notizie orali raccolte più che altro dalla guida Giovanni Gilardi di Alagna, persona pratica dei luoghi, 6 o 7 anni addietro (1894-1895) la fronte del Sesia avrebbe oltrepassato questo salto, al quale oggi si arresta, e, per sentito dire da un vecchio alpigiano, circa 60 anni addietro sarebbe scesa in basso fino a coprire il dosso roccioso levigato e striato, che adesso rimane libero; ciò che costituirebbe una espansione di circa 600 metri maggiore dell'attuale.

Pel ghiacciaio di Bors si può già di prima arguire un ritiro, confrontando col suo stato attuale i numerosi rilievi cartografici fatti nel secolo decorso; ho saputo poi che 10 anni addietro, cioè verso il 1891, esso scendeva circa 100 metri più in basso, ricoprendo una piccola cresta rocciosa che si trova a destra, e che adesso è alta 15 metri sopra il nevaio che continua la fronte; per questo ghiacciaio, che è assai inclinato, credo si debba verificare la teoria espressa dal prof. O. Marinelli, che cioè nei ghiacciai minori, privi di una vera e propria lingua, il ritiro orizzontale dipenda in gran parte da una diminuzione di massa in senso verticale.

Intorno alla bocca sinistra del ghiaccio di Indren ho saputo che nel 1876 essa giungeva al salto di roccia che limita in alto il vallone superiore di Indren, cioè che essa era circa 250 metri più avanzata del limite attuale; ciò

[1] King, *Italian Valleys*, 1855.

che concorda con antichi rilievi cartografici, e ciò che darebbe una media annua di circa 10 metri di ritiro, se questo fosse stato da quell'epoca continuo ed uniforme. Chè, se questo fatto non si può ammettere in via assoluta, si pensi che, date le condizioni speciali del letto, cambiamenti nel regime della gran massa del ghiacciaio di Indren devono avere una minima influenza sul suo braccio sinistro; e di conseguenza in questo, data la sua piccola mole, devono essere poco sensibili i progressi. Per cui, anche ammettendo che a periodi di avanzamento del ghiacciaio di Indren sieno corrisposti periodi stazionarî in questo braccio, pure questo può facilmente essersi ritirato dal 1876 ad oggi nella misura indicatami; perchè, sempre in forza della sua piccola mole, e in specie del suo minimo spessore e della sua massima inclinazione, a un dato ritiro del ghiacciaio di Indren, deve corrisponderne qui uno assai maggiore.

Anche il braccio destro del medesimo ghiacciaio in questi ultimi anni, in specie dopo il 1893, si è notevolmente ritirato dal salto roccioso, che limita in alto il vallone superiore di Indren; del resto anche il vicino ghiacciaio del Garstelet, che non presenta nè lingua ghiacciata nè bocca, si mostra molto in regresso: i suoi due ripiani inferiori sono ora affatto liberi dal ghiaccio, mentre non appariscono tali in nessuna carta topografica.

Con le escursioni a questi ghiacciai il mio scopo, per quanto avversato dal mal tempo, era compiuto; però, avendo avuto occasione di fare gite nell'intero gruppo del Monte Rosa, ho messo un segnale presso alla bocca del braccio destro del ghiacciaio di Verra; e nello stesso tempo ho constatato il recente ritiro dei ghiacciai di Val Tournanche, di Ventina, di Verra, di Flua, e delle vedrette a Nord del Monte Rosso; come pure la totale scomparsa di altre vedrette, presso al crinale dal Monte Rosso al passo di Bettolina, ad Est del Monte Telcio, a Sud dell' Hoheslicht, ad Est del colle dei Salati, e al passo del Turlo. Aggiungerò infine, quanto ai ghiacciai di Macugnaga e del Lys, che, nel ricostruire, come ho fatto, la loro storia nel secolo decorso, non credo di essere andato troppo lungi dal vero, perchè le alternative e la durata dei progressi e dei ritiri, che in essi ho riscontrato, concordano con le parole, con le quali, in tesi generale, il prof. Richter chiudeva il rapporto (1) della Commissione internazionale dei Ghiacciai, presentato al Congresso Geologico internazionale di Parigi nella estate del 1900.

(1) Richter, *Rapport de la Commission Internationale des Glaciers*, 1900.

Patologia. — *Sul fenomeno dell'agglutinazione nel sangue dei malarici.* Nota II dei dott. D. Lo Monaco e L. Panichi, presentata dal Socio Luciani.

Nella precedente Nota comunicata all'Accademia dei Lincei nella seduta del 16 dicembre 1900, noi abbiamo descritto le alterazioni che subiscono gli eritrociti di uomo sano quando vengono in contatto con il siero o con il sangue di individui che hanno contratto l'infezione malarica. In queste condizioni i globuli rossi all'osservazione microscopica non si trovano separati l'uno dall'altro, ma riuniti in ammassi più o meno grandi, presentano cioè quel fenomeno che va col nome di agglutinazione.

La costanza del fenomeno che si ritrovò in tutti i sangui malarici da noi presi in esame, e l'assenza di esso quando al sangue di uomo sano si mescolava siero o sangue di altro uomo sano, ci indussero a ritenerlo come una speciale proprietà del sangue dei malarici e a seguirne il decorso in questi ammalati. Osservammo che la capacità agglutinante diminuisce a misura che al malarico viene somministrata la chinina, mentre aumenta appena si sospende l'ingestione del farmaco specifico. Allo scopo poi di ottenere la curva completa di questa proprietà del sangue malarico, iniettammo ad un uomo sano una piccola quantità di sangue preso da un individuo affetto da febbre estivo-autunnale. Col sangue di questo malarico artificiale, abbiamo constatato l'insorgere del fenomeno, il quale per la prima volta si presentò dopo sei giorni dall'iniezione. D'allora in poi la capacità agglutinante non solo fu sempre dimostrabile, ma aumentò gradatamente, raggiungendo una notevole intensità, quando ancora la temperatura era normale, e quando ancora non si trovavano i parassiti nel sangue dell'individuo infettato. Scoppiata la febbre e chinizzato quotidianamente l'ammalato, la curva della capacità agglutinante iniziò la sua discesa, e ritornò all'ascissa dopo sedici giorni di apiressia.

Questi risultati ci permisero di sostenere che il fenomeno dell'agglutinazione si può utilizzare nella diagnosi della malaria latente, quando cioè più non si trovano nel sangue circolante le forme parassitarie, e quando più non si osservano le elevazioni di temperatura. Nella malaria in atto questa nuova proprietà del sangue malarico costituisce un nuovo segno diagnostico sempre importante, ma non tale da indurre il clinico a potere fare a meno dell'esame clinico e della ricerca dei parassiti. Seguendo la curva febbrile, o ricercando i parassiti, il medico è in grado di stabilire la qualità dell'infezione malarica di cui è affetto il paziente, mentre la riscontrata presenza del fenomeno dell'agglutinazione ci autorizza solamente a fare una diagnosi

generica della malaria. Non sono rari però i casi di malaria in cui, mentre da una parte i sintomi clinici sono poco evidenti, dall' altra la ricerca dei parassiti riesce negativa, o non può essere eseguita per mancanza di mezzi. In queste condizioni il fenomeno dell' agglutinazione, noi dicemmo, acquista una grande importanza, e ci permette di diagnosticare o di escludere l' infezione malarica.

Queste prime ricerche descritte nella nota già pubblicata, sono state da noi senza interruzione continuate. Oltre a seguire il decorso del fenomeno dell' agglutinazione nei malarici recidivi, era per noi interessante studiarlo anche nelle altre malattie infettive, nelle quali già avevamo presupposto che dovesse esistere, pur sostenendo che ciò non impediva che la ricerca di questa nuova proprietà del sangue malarico riuscisse sempre di grande utilità nello studio della malaria latente e nella cura razionale di essa.

I risultati ottenuti da queste ricerche saranno da noi pubblicate in una successiva Nota. Per ora ci sembra urgente di riferire altre esperienze eseguite allo scopo di illustrare ancora meglio alcune di quelle già pubblicate, le quali non sono state confermate dagli autori che dopo di noi si sono occupati del medesimo argomento.

Il primo tra questi, per ordine di data, è il dott. Grixoni, il quale nel n. 57 della Gazzetta degli Ospedali e delle Cliniche di questo anno pubblicò una Nota *sull'agglutinazione del sangue malarico*. Il dott. Grixoni, giovandosi del gran materiale messo a sua disposizione nell' ospedale militare di Bologna, potè in breve tempo compiere numerose osservazioni sulla capacità agglutinante del sangue dei malarici, e di altri individui affetti da malattie infettive o discrasiche. Le conclusioni alle quali viene questo autore confermano completamente i nostri risultati. Grixoni infatti al pari di noi dimostra che il sangue dei malarici agglutina i globuli rossi dell' uomo sano o di altro malarico anche se affetto da tipo febbrile diverso, e al pari di noi nega la capacità agglutinante al sangue dell' uomo sano mescolato con sangue di altro uomo sano. Inoltre, avendo trovato sempre negative, ad eccezione della febbre tifoide, le osservazioni eseguite col sangue di tutti gli altri ammalati degenti in quell' ospedale, ritiene il fenomeno dell' agglutinazione specifico della malaria, e non confermata la supposizione da noi fatta che questa proprietà sia comune a tutte o a molte malattie infettive.

A breve intervallo, poche settimane dopo pubblicata la Nota di cui abbiamo brevemente scritto, i dott. Novi e Meruzzi riferiscono nel n. 38 del Policlinico (Supplemento settimanale) le loro ricerche sul potere agglutinante del sangue nei malarici. Essi confermano la presenza del fenomeno nei malarici, e l' assenza di esso nei sani; ma, avendo trovato che nel prolungato digiuno, nell' affaticamento e in molte malattie si ottiene l' agglutinazione degli eritrociti, concludono che questa proprietà non ha un grande valore come segno diagnostico.

Senza mettere in dubbio i risultati ottenuti dagli autori, e presupponendo che essi, prima di assoggettare al digiuno o all'affaticamento gl'individui che si prestarono alle loro ricerche, si sieno assicurati che con il loro sangue non si presentava la reazione agglutinante, noi ci auguriamo che i dott. Novi e Meruzzi in un'ulteriore pubblicazione vorranno ritornare su questa quistione allo scopo di stabilire le leggi che regolano la capacità agglutinante nelle condizioni di esperimento sopra citate. Per ora, non avendo a disposizione simile materiale di esperimento, pur ritenendo che nel digiuno e nell'affaticamento il fenomeno dell'agglutinazione nell'uomo debba essere di breve durata, abbiamo sottoposto alcune cavie all'inanizione, e ci siamo convinti che anche dopo morte, nessuna traccia di agglutinazione dei globuli rossi si osserva quando il sangue o il siero di queste cavie si mescola al sangue di altra cavia digiuna, o di altra cavia che ha ricevuto il suo pasto regolarmente.

Poco prima della comparsa della Nota dei dott. Novi e Meruzzi, una comunicazione sullo stesso argomento venne fatta, nella seduta dell'Accademia medica di Roma del 26 giugno 1901, dal prof. Bignami a nome del suo allievo dott. Capogrossi. Dal resoconto di questa comunicazione pubblicato dalla Riforma Medica e dal Policinico, risulta che il dott. Capogrossi, consigliato dal prof. Bignami, ha ricercato il fenomeno dell'agglutinazione tanto nei sani che nei malarici e in altri ammalati. Egli trova sempre positivo il fenomeno dell'agglutinazione, al quale quindi nega qualsiasi valore diagnostico nella malaria.

Riassumendo complessivamente i risultati ottenuti da questi sperimentatori che si sono occupati del fenomeno dell'agglutinazione globulare nel sangue dei malarici, si deduce che, mentre tutti al pari di noi confermano questa nuova proprietà nel sangue degli ammalati di infezione palustre, Grixoni ne sostiene la specificità, negandone la presenza nelle altre malattie e nel sangue dell'uomo normale; e gli altri autori invece la trovano nei sani e in molti o in tutti gli stati morbosi.

Sorgono quindi due grandi quistioni, della dimostrazione delle quali dipende se il fenomeno dell'agglutinazione debba comprendersi tra i segni diagnostici della malaria. Per risolvere la prima quistione abbiamo intrapreso una lunga serie di esperienze le quali, come abbiamo detto, saranno pubblicate ulteriormente. Esse tendono a dimostrare quale importanza abbia il fenomeno dell'agglutinazione nella malaria, e quali caratteri differenziali esso offra quando si ricerca nelle altre malattie.

Degna di più urgente interesse ci sembra la seconda quistione, la quale riguarda la possibilità che il sangue di uomo normale agglutini i globuli di un altro uomo sano. È ovvio il fare notare che qualora questo fatto venisse chiaramente dimostrato, qualunque ricerca del fenomeno agglutinante nel campo patologico, dovrebbe ritenersi del tutto inutile. L'assenza

del potere agglutinante globulare nel sano è stata constatata non solo da noi, da Grixoni e da Novi e Meruzzi; ma anche da Donath [1], da Camus e Pagniez [2], e da Leotta [3]. Prima di tutti questi autori, Landsteiner [4] in una Nota inserita nel suo lavoro, *Sull'azione antifermentativa, litica e agglutinante del siero di sangue e della linfa* dice di avere osservato il fenomeno dell'agglutinazione nel sangue che proveniva da ammalati gravi. Egli si limita a porre la quistione se questo fenomeno avvenga per qualità inerenti al siero di origine individuale, o per azione susseguente a cause di natura batterica.

Dimodochè, quantunque gli autori, i quali negano la presenza del fenomeno agglutinante nei sani, rappresentino la massima parte di quelli che si sono occupati di questo argomento, pure non bisogna dimenticare che risultati diametralmente opposti furono prima ottenuti da Ascoli [5] e dopo da Bignami e Capogrossi. Dal resoconto però della comunicazione fatta da questi ultimi ricercatori non risulta se oltre le isoagglutinine abbiano anche confermato le autoagglutinine dimostrate da Ascoli. Questi infatti ammette che il siero di un uomo sano può agglutinare i globuli rossi del medesimo individuo: fatto non ancora dimostrato, anzi per meglio dire negato negli animali, ad eccezione del sangue di cane il quale possiede una fragilità globulare del tutto eccezionale, che, secondo gli autori, sarebbe la cagione del fenomeno.

Allo scopo di potere comprendere perchè esperienze così semplici, abbiano dato risultati differenti ai vari autori, non ci sembra inutile qui ricordare la tecnica di cui Ehrlich e Morgenroth [6] si sono serviti per dimostrare le isolisine. Questi due illustri patologi, iniettando nel peritoneo di una capra una discreta quantità di sangue di altra capra diluito in acqua distillata, constatarono che il siero di sangue della prima capra acquistava un'azione litica sui globuli rossi di altre capre, ma non di tutte le capre. Chiamarono quindi isolisine e isoagglutinine quelle sostanze le quali sono capaci di sciogliere o di agglutinare gli eritrociti degli animali della medesima specie, mentre Ehrlich [7], citando il nostro lavoro sulle sostanze agglutinanti nel siero malarico, dà a queste il nome di pan-isoagglutinine dovutole al fatto, prima dimostrato da noi e poi confermato dagli altri ricercatori, che in nessun sangue malarico si trova mai assente il fenomeno dell'agglutinazione. D'altra parte se, invece di iniettare sangue lacca, si tratta un animale con sangue

[1] Wiener klin. Woch. n. 22, 1900.
[2] Compt. Rendus, Soc. Biologie, 1901, p. 242.
[3] Tesi di laurea di Roma, 1901 (in corso di pubblicazione).
[4] Centralbl. f. Bakt. 10 nov. 1900, pag. 357.
[5] La clinica medica italiana, 1901, n. 1 e n. 7.
[6] Berl. klin. Woch. 1900, n. 21.
[7] Erkrankungen des Blutes und der Blutbildenden Organe, vol. VIII, del trattato di Patologia di Nothnagel. Vienna, 1901.

defibrinato di altro animale della medesima specie, allora, come dimostrò Bordet [1], le isolisine non si formano. Senza entrare nel merito della quistione per indagare per quale ragione Ehrlich e Morgenroth hanno ottenuto risultati diversi da quelli descritti da Bordet, vogliamo qui solamente rilevare quanta influenza ha in esperienze di simil genere la tecnica adoperata. Basta che questa venga in qualche piccola parte modificata, perchè i risultati cambino, e non sieno più paragonabili fra loro.

Allorchè noi cominciammo a studiare il fenomeno dell'agglutinazione nei malarici, ci preoccupammo non poco della tecnica, e allo scopo di rendere questa facile, perchè tutti gli studiosi potessero utilizzare la nuova proprietà del sangue malarico, insistemmo perchè il miscuglio tra sangue malarico e sangue normale si facesse goccia a goccia. Questo metodo per noi non solo era il più facile, ma era anche il più idoneo allo scopo. Non tralasciammo però di accennare che medesimi risultati si ottenevano adoperando invece del sangue malarico il siero di esso, ma omettemmo a ragion voluta di descriverne la tecnica. Ripariamo ora a questa omissione, dichiarando che per ottenere il siero ci siamo sempre serviti sia nelle prime ricerche che in quelle che ancora facciamo, della tecnica che comunemente si segue per la siero-diagnosi di Widal; facendo cioè riempire un tubetto capillare di sangue che proviene dalla puntura del dito, e adoperando il siero che dopo più ore si separa dal coagulo. In questo modo tanto il siero che il sangue *in toto*, ottenuti dalla puntura del dito di uomo sano, mescolati a un'altra goccia di sangue di altro uomo sano, danno risultati identici, mostrando che in queste condizioni il fenomeno dell'agglutinazione globulare non si effettua. Risultati opposti si osservano quando, invece di prendere il sangue dalla puntura del dito, si fa all'uomo sano un salasso, e si adopera il siero che si separa dal coagulo o dalla defibrinazione o dalla centrifugazione. Il fenomeno agglutinante allora è sempre evidente anche se al siero si mescolano i globuli rossi del medesimo individuo. Paragonando poi fra loro i sieri dello stesso individuo sano, ottenuti con i diversi trattamenti su ricordati, più agglutinante è quello che si separa dopo la centrifugazione e dopo la difibrinazione, meno agglutina e qualche volta non agglutina affatto quello ottenuto dal coagulo, mai agglutina, come abbiamo detto, il siero del sangue raccolto nel tubetto capillare per mezzo della puntura digitale. La capacità agglutinante in simili sieri normali non si eleva di molto, al più questa proprietà si osserva diluendo il siero due volte con soluzione fisiologica di cloruro sodico, e manca con le diluizioni più forti.

Queste esperienze furono da noi più volte ripetute anche recentemente, e sempre hanno dato risultati costanti. Ciò ci autorizza a sostenere che *in qualsiasi sangue di uomo normale si può fare insorgere la proprietà ag-*

[1] Ann. Pasteur, 1899.

glutinante, assoggettando il campione del sangue preso per l'esame a maltrattamenti più o meno gravi. Ma ciò non basta; possiamo aggiungere altri fatti i quali ancora meglio comprovano i risultati già descritti. È noto infatti ai Chimici e ai Chimici fisiologici quanta influenza esercita in certi miscugli liquidi l'agitazione di essi perchè avvenga una combinazione chimica o perchè si formi un precipitato. Recentemente Ramsden [1] ha dimostrato, lavorando coi liquidi organici, che in alcuni casi non occorre agitarli, ma è sufficiente travasarli più volte per ottenere notevoli precipitati.

Per spiegare poi come si formano le agglutinine nel siero di uomo sano, non si può ammettere che esse sieno dipendenti da cambiamenti molecolari del siero avvenuti a causa dei movimenti impressi al sangue. Crediamo invece più probabile che con la centrifugazione, con la defibrinazione o con altri più lievi maltrattamenti, gli elementi figurati del sangue, certamente i più fragili fra essi, perdano subito le loro condizioni vitali, e permettano a tutte o a parte delle sostanze liquide contenute nei loro stromi che si versino nel siero. Ammessa come verosimile questa ipotesi, con l'aumentare in un sangue di uomo sano, la dissoluzione degli elementi figurati di esso, la capacità agglutinante dovrebbe rendersi sempre più notevole. E così in vero avviene quando al sangue, si aggiunge un egual volume di acqua distillata. Il sangue-lacca che ne risulta, infatti presenta una capacità agglutinante talmente forte, da permettere la dimostrazione del fenomeno anche quando sia stato ancora diluito più volte (4-6) con soluzione fisiologica di cloruro sodico. Per eseguire questa esperienza si prende una siringa sterilizzata contenente p. es. 2 cc. di acqua distillata, e si aspira da una vena un'eguale quantità di sangue. Il liquido di color lacca che si ottiene si adopera per la ricerca tanto prima, che dopo essere stato per alquanto tempo centrifugato.

Dopo quello che abbiamo brevemente esposto, possiamo renderci conto del perchè alcuni autori hanno ottenuto risultati opposti ai nostri. Passando in rassegna la tecnica da loro adoperata, ci sarà facile dimostrare che soltanto quelli che non hanno adoperato i metodi di ricerca da noi descritti, sostengono la possibilità della presenza del fenomeno agglutinante, mescolando il siero del sangue di uomo sano con i globuli rossi di altro uomo sano. Gli altri autori invece che si sono contentati di usufruire della tecnica che avevano descritto, confermano i risultati da noi ottenuti. La lista di questi ultimi comprende: il lavoro di Grixoni, le ricerche del quale sul fenomeno dell'agglutinazione sia nell'uomo sano che negli ammalati in genere, vennero fatte mescolando i due sangui goccia a goccia; quello di Novi e Meruzzi, i quali seguirono la medesima tecnica, non senza notare che il *siero debba ritenersi come un prodotto artificiale;* quello di Leotta le cui ricerche furono anche eseguite col siero separatosi dal coagulo del sangue raccolto nel tubo capil-

(1) Zeits. f. Biologie, 1900.

lare e proveniente dalla puntura del dito e quello di Camus e Pagniez che adoperano quasi la stessa tecnica di Leotta. Degli altri autori Landsteiner, nella sua brevissima Nota, non dice come ottiene il siero di cui si serve per le sue ricerche che si riferiscono più a uomini malati, che ad individui sani. Donath al siero che prende in esame, ottenuto forse dal coagulo del salasso, aggiunge il sangue di uomo sano diluito con soluzione isotonica di cloruro sodico. Da questa tecnica forse dipendono i risultati incostanti da lui descritti. Poichè la capacità agglutinante del siero da salasso tanto di uomo sano che di molti ammalati è sempre bassissima, niente di più facile che l'assenza del fenomeno da lui osservata in quasi tutti i sani e in molti degli ammalati esaminati, sia legata alla dilutzione del sangue per mezzo della soluzione isotonica.

Una tecnica molto simile adopera Ascoli nelle sue ricerche, però i risultati suoi differiscono da quelli di Donath, inquantochè mentre per questi il sangue dei sani non è *di regola agglutinante*, per Ascoli invece agglutina, *quantunque debolmente*, gli eritrociti del medesimo individuo e, con qualche eccezione, quelli di altri individui normali. Con molta probabilità il numero dei globuli costituenti gli ammassi adottato da Ascoli per dichiarare un siero agglutinante deve essere molto più piccolo di quello adottato da Donath, e da ciò forse deriva la sconcordanza dei loro risultati. Bignami e Capogrossi descrivono una nuova tecnica, che, come loro dicono, *permette di osservare bene il fenomeno dell'agglutinazione*. Questa tecnica consiste nel *raccogliere il siero del sangue centrifugato in tubetti* (capillari?), *e nel mescolarvi sangue intiero o defibrinato d'individui sani.* È in questo modo che essi hanno ottenuto i risultati, da noi già menzionati, i quali non solo contraddicono quelli da noi pubblicati, ma anche tutti quelli descritti dagli autori che mano mano abbiamo citato. Per loro nessuna differenza esiste tra l'agglutinazione osservabile col siero di individui sani e tra quella osservabile col siero di individui malati; soltanto coi sieri degli anemici essi notano *agglutinazioni più marcate*, ma non dicono se in questi casi hanno dosato la capacità agglutinante, o se, come pare, si siano limitati alla ricerca qualitativa. Dal resoconto poi della comunicazione fatta all'Accademia, del quale noi ci serviamo, avendo per mesi invano atteso la pubblicazione del lavoro, non risulta chiaro se essi hanno in tutti gli esami da loro fatti osservato costantemente il fenomeno dell'agglutinazione, sia sperimentando col siero dei sani, sia sperimentando con quello degli ammalati; ma con la tecnica descritta, non si può ammettere che anche in un solo esame eseguito in quelle condizioni possa essersi reso non evidente il fenomeno dell'agglutinazione. A ciò dobbiamo aggiungere che se Bignami e Capogrossi avessero mescolato i sieri da loro studiati con gli eritrociti dell'individuo dal quale proveniva il siero, avrebbero dovuto registrare il fatto che qualunque siero produce l'agglutinazione dei propri globuli. Per questi autori quindi la divi-

sione delle lisine e delle agglutinine fatta da Ehrlich e Morgenroth in eterolisine, isolisine ed autolisine e corrispondentemente in eteroagglutinine, isoagglutinine ed autoagglutinine non dovrebbe più esistere; e per fenomeno agglutinante d'ora innanzi dovremmo intendere quella proprietà comune ai sieri di tutti gli individui sia normali che patologici, la quale si manifesta, appena uno qualunque di questi sieri si mescola ai globuli rossi dello stesso o di altro individuo. Ma che ciò sia vero, ancora nessuno *è riuscito* a dimostrare!

La tecnica adoperata da Bignami e Capogrossi ha impedito che essi potessero confermare un'altra osservazione da noi fatta. Dosando la capacità agglutinante dei sieri malarici, ci eravamo accorti che se essi venivano diluiti con soluzione fisiologica di cloruro sodico contenente pochi centigrammi di un sale di chinina, il fenomeno scompariva con diluizioni molto più lievi, di quelle che occorrevano per ottenere il medesimo scopo adoperando la pura soluzione fisiologica. Questa osservazione venne confermata da Grixoni, e il risultato contrario che dicono di avere ottenuto Bignami e Capogrossi ci ha costretti a ripetere le esperienze. Da queste risulta che la su descritta azione della chinina si esplica solo con il sangue malarico o con il siero di esso separatosi nel tubetto capillare, mentre manca con il siero normale o malarico ottenuto per centrifugazione o per defibrinazione. Se il sangue o il siero malarico si diluisce con la soluzione sodica contenente 0,10 °/₀ di bicloridrato di chinina, può qualche volta, quando la capacità agglutinante del sangue o del siero è molto notevole, rimanere sempre evidente il fenomeno, per quanto attenuato; ma quando si adopera la soluzione isotonica nella quale è stato sciolto 1 gr. °/₀ di sale di chinina, il fenomeno non si osserva più. L'emolisi chininica, che in quest'ultimo caso si presenta dopo qualche tempo, non impedisce la comoda osservazione del fatto descritto.

Questa esperienza da una parte ci dimostra che possono esistere contemporaneamente nel medesimo siero, agglutinine di diversa specie, e dall'altra che le agglutinine del siero normale prodotte artificialmente non risentono l'azione della chinina.

Ottenuti questi risultati, era interessante vedere se la chinina agisse egualmente sulle agglutinine globulari del tifo o di altre malattie infettive, e su quelle dei già febbricitanti per malaria sofferenti ora di nuovi processi morbosi batterici. I risultati delle ricerche finora eseguite sono costanti, e mostrano che negli ammalati di altre infezioni, siano essi già stati malarici o no, l'agglutinazione in vitro persiste, anche quando il siero si diluisce con soluzione fisiologica fortemente chininizzata. Di questo fatto quindi possiamo giovarci sia per determinare se in un siero esistono sole agglutinine malariche, sia per risolvere la difficoltà sollevata da Novi e Meruzzi riguardante l'incertezza in cui può trovarsi un clinico il quale, dopo aver visto in un malarico, per mezzo del chinizzamento energico, scomparire il fenomeno

dell'agglutinazione, non ha mezzi per decidere se il ritorno di questo fenomeno provenga sempre dall'infezione malarica o dall'invasione di un'altra malattia. In questo caso la persistenza del fenomeno agglutinante nel siero o nel sangue diluito a parti eguali con soluzione fisiologica contenente l'1 % di sale di chinina, ci avvisa che s'inizia un'altra infezione.

Riservandoci, come già abbiamo detto, di dimostrare nella Nota susseguente per quali caratteri l'agglutinazione nella malaria si distingue da quella osservabile in altre malattie, possiamo conchiudere:

1°. Che il sangue o il siero di uomo sano, mescolato al sangue di altro uomo sano, non è agglutinante.

2°. Che il siero dell'uomo sano acquista la proprietà agglutinante, quando esso è stato ottenuto con trattamenti che ledono i globuli rossi.

3°. Che aggiungendo al sangue o al siero malarico egual volume di soluzione isotonica di cloruro sodico contenente l'1 % di sale di chinina, il fenomeno agglutinante scompare.

4°. Che questa proprietà può servire per diagnosticare se un siero o un sangue è o no malarico.

5°. Che nei sieri malarici così trattati, la non scomparsa del fenomeno indica l'insorgere o la presenza di un altro processo infettivo.

Fisiologia. — *Su alcune alterazioni dei ganglii linfatici nelle dermopatie distrofiche.* Nota del dottor VINCENZO MONTESANO, presentata dal Socio LUCIANI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio STRUEVER, relatore, a nome anche del Socio RÒITI, legge una Relazione sulla Memoria del dott. UGO PANICHI, intitolata: *Influenza della variazione della temperatura e più specialmente dei forti raffreddamenti, sul comportamento ottico di alcuni minerali*, concludendo col proporre l'inserzione del lavoro nei volumi delle Memorie.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Vicepresidente, sono approvate dalla Classe, salve le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario GRASSI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci: BERTHELOT, LANGLEY, LOCKYER, PFLUEGER; e dai

signori: Bigourdan e Goppelsroedèr. Fa inoltre particolare menzione del vol. XII delle: *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy.*

Il socio Todaro presenta all'Accademia il volume ottavo delle *Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia Normale della R. Università di Roma,* pubblicato durante l'anno 1901. Questo volume consta di 4 fascicoli. Il fascicolo 1° contiene i seguenti lavori:

1. Versari, *Contributo alla conoscenza della morfogenesi degli strati vascolari della coroide nell'occhio dell'uomo e di altri mammiferi.* L'A. ha spiegato in qual modo nella coroide di embrioni di vacca, di pecora, di porco e di uomo il semplice strato di vasi disposti a rete, che si osserva nei primi periodi dello sviluppo venga man mano disponendosi in più strati, traendone osservazioni comparative colla disposizione dei vasi della coroide nella serie dei vertebrati.

2. Dorello, *Sopra parecchie anomalie rinvenute in un occipite umano e specialmente sul così detto « Terzo condilo occipitale ».* L'A. ha descritto un occipite umano che presentava le seguenti anomalie: terzo condilo occipitale, canalicolo basilare inferiore, processi paramastoidei e forami condiloidei anteriori multipli. L'autore si occupa specialmente del terzo condilo e dopo aver fatto la critica delle varie teorie, che sono state emerse sulla sua formazione, ne dà una nuova mediante la quale si possono spiegare anche altre anomalie a carico della stessa regione.

3. Mingazzini Pio, *Cambiamenti morfologici dell'epitelio intestinale durante lo assorbimento delle sostanze alimentari.* L'A. facendo seguito ad una precedente memoria studia i cambiamenti morfologici dell'epitelio intestinale nella gallina tenuta a digiuno. Egli rileva che durante il digiuno gli elementi epiteliali dei villi sono più bassi e non presentano la distinzione del loro corpo in zona chiara interna e zona scura esterna, come si osserva negli stessi animali durante l'assorbimento. Durante lo stato di digiuno, purchè non sia lungamente protratto, c'è un leggiero assorbimento dimostrato dalla presenza del liquido subepitaliale. Durante il digiuno possono passare nel lume intestinale dei leucociti, che formano accumuli nel tratto medio dell'intestino tenue e danno materiale nutritivo assorbito dai villi.

4. Drago, *Cambiamenti di forma e di struttura dell'epitelio intestinale durante lo assorbimento dei grassi.* L'A. osserva durante l'assorbimento dei grassi i cambiamenti dell'epitelio intestinale, mostrando che anche per i grassi il fenomeno si riduce ad un processo di secrezione interna delle cellule dei villi intestinali.

5. Dorello, *Descrizione di un uovo umano anomalo.* L'A. studia un uovo umano anomalo appartenente alle forme atrofiche più basse, descrivendo le alterazioni presentate dalle varie parti che lo costituiscono. A proposito di una formazione cistica l'autore mostra che essa non può farsi derivare da

un' introflessione dell' epitelio del chorion, ma deriva da una cisti formatasi a spese del peduncolo allantoideo.

6. Russo, *Sulla funzione renale dell' organo genitale delle oloturie.* L'A. sostiene che l' organo genitale delle oloturie funziona spiccatamente da organo renale in alcune epoche dell' anno, ma durante la maturità sessuale perde questa funzione.

Il 2° fascicolo contiene i seguenti lavori:

1. Della Valle Claudio, *Contributo alla conoscenza della circolazione sanguigna nella mucosa olfattiva dei mammiferi.* L'A. studiando la circolazione sanguigna nella pituitaria di alcuni mammiferi, ha trovato che i vasi venosi superficiali formano reti caratteristiche, dalle quali è dato riconoscere facilmente la regione olfattoria dalla respiratoria, ed in rapporto, per quanto riguarda la prima, con la distribuzione delle glandule e dei fasci del nervo olfattorio, per quanto riguarda la seconda con la funzione del riscaldamento della colonna d'aria che attraversa le cavità nasali. Ha trovato inoltre che l' epitelio olfattorio dell' uomo è provvisto di capillari sanguigni, confermando così nell' uomo quanto il. Bovier Lepierre aveva nel 1888 scoperto nella cavia.

2. Mingazzini Pio, *La secrezione interna nell' assorbimento intestinale.* L'A. riferendosi ai precedenti suoi lavori sullo stesso argomento si è prefisso di vedere: 1° se la funzione della secrezione interna, riscontrata nell' epitelio dei villi di galline, si osserva anche nell' epitelio assorbente di altri vertebrati ed a quali modalità è soggetta; 2° se i leucociti, presenti nell' epitelio stesso, prendono parte attiva nella funzione dell' assorbimento, e quale ufficio principale abbiano in esso.

Per il primo quesito le ricerche eseguite nello *Scyllum stellare* ha dato i seguenti risultati: l' assorbimento avviene principalmente nella valvola spirale; nei singoli elementi vi ha indipendenza nelle varie fasi del processo; l' apice delle pieghe ha un maximum di funzionamento; gli elementi epiteliali durante il processo, soggiacciono a mutamenti nel protoplasma e nel nucleo.

Per il secondo quesito l'A. fece le sue osservazioni nel *Mus documanus*, e potè stabilire che i leucociti, i quali dall' epitelio e dallo stroma del villo immigrano nella sostanza nutritiva secreta internamente dalle cellule epiteliali, si modificano quivi nei caratteri chimici e morfologici del nucleo e del protoplasma, e poscia passano nello stroma connettivale dove presentano una specie di moltiplicazione. Cosicchè la secrezione interna verrebbe in parte riassorbita dai vasi e dalle lacune del villo, in parte assorbita dai leucociti che in gran numero accorrono nella mucosa durante la digestione.

3. Drago, *Sulla genesi di alcune anomalie del sistema nervoso centrale dell' embrione di pollo.* L'A. si è proposto di determinare l' epoca dello sviluppo e la causa efficiente di talune anomalie del sistema nervoso nell' embrione di pollo, ed ha trovato che le anomalie del midollo spinale in tali

embrioni possono esser causate da eccessiva proliferazione dell'ectoderma, che s'insinua nel lume della doccia midollare prima della chiusura di questa.

4. Chigi, *Sul significato morfologico della polidactilia nei Gallinacei.* L'A. con lo studiare lo sviluppo del piede nei polli domestici, si è prefisso di trovare qualche nuovo dato per spiegare morfologicamente la polidattilia degli uccelli, ed ha concluso che il dito soprannumerario dei polli, omologo a quello talora osservato in altri uccelli, non deve essere attribuito a raddoppiamento del primo dito, ma allo sviluppo teratologico di un organo (prealluce) esistente negli antenati allo stato rudimentale.

5. Cialona, *Osservazioni pratiche sull'epoca della comparsa e della variabilità quantitativa delle specie animali più comuni nel Plankton del porto di Messina.* L'A. spiega la causa della presenza del Plankton nel porto di Messina, dovuta alla forma dello stretto ed al punto di esso dal quale la corrente che entra nel porto proviene, dà utili ragguagli circa i vari punti del porto, nei quali si può efficacemente praticare la pesca nei varî mesi dell'anno e nelle diverse ore del giorno, e fa seguire un elenco degli animali trovati.

6. Favaro, *Contributo alla filogenesi ed all'ontogenesi del vestibolo orale.* L'A. divide il lavoro in due capitoli. Nel 1° comprende le ricerche sulla morfologia del vestibolo orale e particolarmente delle pieghe laterali nei Poefagi, Perissodattili, Artiodattili, Roditori, Carnivori, Insettivori, Chirotteri e Primati; Nel 2° espone i risultati delle sue ricerche intorno alla genesi delle pieghe laterali negli embrioni di pecora; conclude che esse rappresentano nell'ontogenesi un processo d'accrescimento mesodermico più attivo di quello che si svolge in corrispondenza dei solchi vestibolari.

7. Della Valle Claudio, *Contributo alla conoscenza delle terminazioni nervose nella mucosa olfattoria dei mammiferi adulti.* L'A. basandosi sopra alcuni reperti conferma l'opinione del Cayal e del Fusari circa la pretesa divisione delle fibrille olfattorie nella mucosa, ed ha trovato inoltre, nella mucosa olfattoria di cani giovani, elementi cellulari speciali a cui dà il significato di cellule embrionali, destinate a svilupparsi man mano che l'organo dell'odorato si perfeziona.

Il 3° e 4° fascicolo contengono:

1. Manzone, *Ricerche sulla circolazione del cuore.* L'A. dopo aver fatto una critica esatta dei vari lavori precedenti sulla circolazione delle valvole atrio-ventricolari, viene, colle proprie ricerche, alla conclusione che esistono vasi dove esistono muscoli; ammettendo una legge unica tanto per l'uomo quanto per tutti gli altri mammiferi. Avendo poi rinvenuto nelle dette valvole dei fasci muscolari in via di regressione, e dei fasci a direzione radiale e circolare, interpreta questo fatto come il residuo di un muscolo sfinteriale esistente al cercine delle valvole atrio-ventricolari.

Nella circolazione dei muscoli papillari ha scoperto un comportamento tutto speciale dei vasi, a forma di anse, nel punto in cui il muscolo termina

nella corda tendinea, il quale differisce da quello che nella terminazione al tendine hanno tutti gli altri muscoli del corpo.

Finalmente nelle fibre del Purkinje ha riscontrato una vascolarizzazione poco abbondante e differente dalle comuni fibre muscolari del cuore.

P. Dorello, *Sopra lo sviluppo dei solchi e delle circonvoluzioni nel cervello del maiale.* L'A. ha studiato lo sviluppo dei solchi e delle circonvoluzioni nel cervello del maiale servendosi di una copiosa serie di embrioni la cui lunghezza da 30 mm. giungeva fino a 26 cm. Egli ha determinato: la cronologia ed il vario meccanismo di formazione dei diversi solchi; i cambiamenti di forma e di posizione cui soggiacciono le varie parti corticali degli emisferi, durante lo sviluppo. Infine ha fatto un saggio critico sulle omologie che si possono stabilire fra i solchi del maiale e quelli degli altri mammiferi compreso l'uomo.

3. Supino, *Ricerche sul cranio dei teleostei* (I-*Scopelus*, *Chauliodus*, *Argyropelecus*). L'A. comincia una serie di ricerche sul cranio dei Teleostei abissali per determinare se i caratteri del loro cranio si debbano considerare come primitivamente semplici, ovvero come semplificazioni per effetto dell'ambiente abissale.

Egli tien calcolo specialmente della quantità di cartilagine la cui abbondanza, secondo la scuola di Gegenbaur, rappresenterebbe un carattere primitivo, ma che potrebbe anche dimostrare in certi casi un semplice arresto di sviluppo.

In questo primo capitolo egli tratta dello *Scopelus*, del *Chauliodus* e dell'*Argyropelecus*.

4. Noè, *Sul ciclo evolutivo della Filaria Bancrofti* (Cobbold) *e della Filaria immitis* (Leidy). L'A. riferendosi alle sue note preliminari, la prima delle quali pubblicata insieme al prof. Grassi, descrive estesamente il ciclo evolutivo della *Filaria immitis*, dimostrando come essa venga propagata al cane esclusivamente colla puntura delle zanzare.

Egli dimostra che anche la *Filaria Bancrofti* deve propagarsi all'uomo in modo del tutto uguale a quello della *Filaria immitis*.

CONCORSI A PREMI

Il Vicepresidente Blaserna dà comunicazione degli elenchi dei lavori presentati ai concorsi ai premi Reali e Ministeriali, scaduti col 31 dicembre 1901.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Mineralogia e Geologia.*

(Premio di L. 10,000. Scadenza 31 dicembre 1900).

1. Artini Ettore. — *Ventotto Memorie e Note di mineralogia e geologia* (st.).

2. Bombicci Luigi. — *Ventisei Memorie e Note di mineralogia, cristallografia, geodinamica e meteorologia* (st.)

3. De Gregorio Antonio. — *Novantadue pubblicazioni di geologia e paleontologia* (st.).

4. De Stefani Carlo. — *I Campi Flegrei* (ms.).

5. Vinassa de Regny Paolo. — 1) *Cinque Note di geologia e paleontologia* (st.). — 2) *Sette Memorie sopra fossili vari* (st.). — 3) *Due Memorie sui fossili triassici del Bakony* (st.). — 4) *Quattro Memorie sui Radiolari* (st.) — 5) *Manuale di Paleontologia* (in corso di stampa). — 6) *Memoria sui Molluschi terziari delle Alpi Venete* (st.) — 7) *Rivista italiana di Paleontologia*; anni V, VI, VII (st.)

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Matematica*.

(Premio L. 10,000. Scadenza 31 dicembre 1901).

1. Bongi Cesare. — *Calcolo delle sommazioni; Saggio di un nuovo metodo ausiliario di calcolo* (ms.).

2. Castelnuovo Guido ed Enriques Federigo. — *Trentuna Memoria sulla teoria delle superficie algebriche* (st.).

3. Genna Pietro. — *Calcolo del π col metodo dei triangoli inscritti* (st. e ms.).

4. Lojacono Domenico. — *La trisezione dell'angolo rettilineo in genere e corollari* (ms.).

5. Pascal Ernesto. — *Venti Memorie di Analisi.*

6. Ricci Gregorio. — 1) *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di 2° grado* (st.). — 2) *Lezioni sulla teoria delle superficie* (st.). — 3) *Sui sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque* (st.). — 4) *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque ad n dimensioni* (st.). — 5) *Sulla teoria generale della elasticità in una varietà qualunque* (ms.).

7. Ugolini Giulio. — *Inscrizione dell'Ennagono regolare* (ms.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere ai premi del Ministero della P. I. per le *Scienze matematiche*.

(Due premî del valore complessivo di L. 3300. Scadenza 31 dicembre 1901).

1. Bagnera Giuseppe. — 1) *Sopra i gruppi astratti di grado 32* (st.). — 2) *I gruppi finiti reali di sostituzioni lineari quaternarie* (st.). — 3) *I gruppi di collineazioni nel nostro spazio, e le rotazioni dello spazio ellittico a cinque dimensioni* (st.).

2. Caminati Pietro. — 1) *La Polisezione dell'angolo eseguita graficamente mediante un goniografo* (ms.). — 2) *Teoria e pratica dei Logaritmi di somma e di sottrazione, col progetto di una grande Tavola di Logaritmi a sette decimali* (ms.).

3. Ciani Edgardo. — 1) *Le quartiche piane più volte omologico-armoniche* (st.). — 2) *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana* (st.). — 3) *Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane* (st.). — 4) *La prospettiva Cavaliera* (st.) — 5) *I gruppi finiti di collineazioni piane dotati di una quartica invariante irriduttibile* (st.). — 6) *Sopra la configurazione di Kummer* (st.).

4. De Franchis Michele. — 1) *Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2* (st.). — 2) *Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2* (st.). — 3) *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere 3 per* $k > 1$ (st.). — 4) *Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo* (st.). — 5) *Elementi di geometria* (st.). — 6) *Elementi d'aritmetica* (st.).

5. Padoa Alessandro. — 1) *Note critiche agli « Elementi di geometria » di G. Veronese* (st.). — 2) *Note critiche al libro d'aritmetica e d'algebra elementare di P. Gazzaniga* (st.). — 3) *Note di logica matematica* (st.). — 4) *Algebra elementare logicamente esposta* (st.). — 5) *Collaborazioni al « Formulaire de Mathématiques » di G. Peano* (st.). — 6) *Riassunto di conferenze sull'Algebra e la Geometria quali teorie deduttive* (litog.). — 7) *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque* (st.). — 8) *Un nuevo sistema de definiciones para la geometria euclidea* (st.). — 9) *Numeri interi relativi* (st.). — 10) *Commemorazione del prof. Albino Nagy* (st.). — 11) *Matematica elementare* (st. e litog.).

6. Pirondini Geminiano. — 1) *Sur la spirale logarithmique* (st.). — 2) *Sur les lignes cylindriques* (st.). — 3) *Sur un cas particulier du théorème de Maclaurin et Braikenridge* (st.). — 4) *Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque* (st.). — 5) *Quelques applications des coordonnées intrinsèques* (st.). — 6) *Sur quelques propriétés remarquables de l'hyperbole* (st.) — 7) *Risoluzione di due questioni geometriche* (st.). — 8) *Sur quelques propriétés des coniques* (st.) — 9) *Sur les cylindres et les cônes passant par une ligne* (st.). — 10) *Une nouvelle démonstration d'un théorème de Lancret et de sa réciproque* (st.). — 11) *Le linee e le superficie sulle quali un agente fisico qualunque ha un'intensità data da una legge arbitraria* (ms.). — 12) *Generalizzazione di alcune proprietà dell'elica cilindro-conica ordinaria* (ms.). — 13) *Di alcune formole che si presentano nello studio delle linee* (ms.). — 14) *Sur les pseudo-spirales* (ms.). — 15) *Sur les normales d'un hélicoïde* (ms.). — 16) *Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution* (ms.).

Il Vicepresidente Blaserna inoltre dà comunicazione del seguente avviso di concorso a premio, trasmesso all'Accademia dall'*Iron and Steel Institute* di Londra.

Borsa di ricerche « Andrew Carnegie ».

Una borsa di ricerche, del valore che potrà sembrare conveniente al Consiglio dell'« Iron and Steel Institute », fondata dal signor Andrew Carnegie, che ha donato all'« Institute » sessantaquattro obbligazioni, cinque per cento, di mille dollari l'una della « Pittsburg, Bessemer and Lake Erie Railroad Company », sarà assegnata annualmente, senza riguardo di sesso e nazionalità, su proposta del Consiglio. I candidati, che debbono avere meno di 35 anni d'età, presenteranno la domanda (su formulario trasmesso su richiesta) prima della fine di marzo al Segretario dell'« Iron and Steel Institute ».

L'oggetto di queste borse non è di facilitare gli ordinari studi collegiali, ma di aiutare gli studenti, che sono passati per un corso di studi o hanno lavorato in stabilimenti industriali, a condurre ricerche sulla metallurgia del ferro e dell'acciaio e soggetti connessi, allo scopo di contribuire al suo progresso ed alla sua applicazione all'industria. Non vi è nessuna restrinzione riguardo al luogo per le ricerche, università, scuole tecniche, od officine, purchè sia convenientemente fornito per le ricerche metallurgiche.

La concessione della borsa sarà per un anno; ma è in facoltà del Consiglio di rinnovarla per un nuovo periodo; nel qual caso non si procederà a nuova attribuzione.

I risultati delle ricerche saranno comunicati all'« Iron and Steel Institute » in forma di una memoria da sottomettersi all'assemblea generale dei membri, e, se il Consiglio giudicherà il lavoro di merito sufficiente, si potrà assegnare all'autore la medaglia d'oro « Andrew Carnegie ».

Il Segretario generale
Bennett H. Brough.

28, Victoria Street,
Londra.

CORRISPONDENZA

Il Vicepresidente Blaserna dà comunicazione di una lettera del Socio Tacchini che ringrazia pel voto di plauso inviatogli dall'Accademia.

Lo stesso Vicepresidente partecipa che la Presidenza dell'« Owens College » di Manchester, ha invitato l'Accademia a prender parte alla celebrazione del 50° anniversario della sua fondazione; e la Classe delibera di farsi rappresentare alla cerimonia, che avrà luogo nel marzo venturo.

Il Segretario Grassi dà quindi conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società zoologica di Tokyo; la Società geologica di Washington; la Società geologica di Ottawa; la So-

cietà di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Manchester; il Museo di storia naturale di New York; il Museo Nazionale di Buenos Aires; l' Istituto Smithsoniano di Washington.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

L'Accademia d'agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio di Verona; l'Accademia delle scienze di Vienna; l'Accademia delle scienze di Córdoba; l'Accademia Reale di Dublino; l'Accademia delle scienze di Cracovia; la R. Accademia delle scienze di Stockholm; la Società di scienze naturali di Buffalo; l'Orto botanico di Missouri.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 5 gennaio 1902.

Berthelot M. — Les carbures d'hydrogène. 1851-1901. T. I-III. Paris, 1901. 8°.

Boucard A. — Les oiseaux utiles et nuisibles. Paris, 1901. 8°.

Cauchy A. — Oeuvres complètes publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences. 1e Sér. T. XII. Paris, 1900. 4°.

De Angelis G. — Escursione geologica della Miniera Marganai (Iglesias). Torino, 1901. 8°.

De Blasio A. — Delitto e forma geometrica della faccia fra i delinquenti napoletani. Napoli, 1901. 8°.

Goppelsröder F. — Capillaranalyse beruhend auf Capillaritäts- und Adsorptionserscheinungen mit dem Schlusskapitel: das Emporsteigen der Farbstoffe in den Pflanzen. Basel, 1901. 8°.

Kalecsinsky A. v. — Ueber die ungarischen warmen und heissen Kochsalzseen als natürliche Wärme-Accumulatoren, sowie ueber die Herstellung von warmen Salzseen und Wärme-Accumulatoren. Budapest, 1901. 8°

Langley S. P. — The New Spectrum. S. l., 1901. 8°.

Lockyer N. — Further observations on Nova Persei. N. 4. London, 1901. 8°.

Macchiati L. — A proposito di un afide descritto come nuovo sul nerium oleander L. Firenze, 1901. 8°.

Id. — L' assimilazione contemporanea del carbonio, dell' idrogeno e dell' ossigeno è una speciale fermentazione promossa dall' attività vitale di una diastasi, segregata dalle cellule contenenti pigmenti clorofillici. Firenze, 1901. 8°.

Macoun J. — Catalogue of Canadian Birds. P. I. Ottawa, 1901. 4°.

Marson L. — Sui ghiacciai del Bernina. Roma, 1901. 8°.

Minutes of evidence taken by the Indian plague Commission, Report and Indices ecc. Vol. I-V. London, 1900-1901. 4°.

Morin F. — Anatomie comparée et expérimentale de la feuille des Muscinées. Anatomie de la nervure appliquée à la classification. Rennes, 1893. 4°.

Musée Botanique de Leide, par W. F. R. Suringar. Vol. I. II. III. p. 1-12. Leide, 1871-1897. 4°.

Passalsky P. — Anomalies magnétiques dans la région des mines de Krivoï-Rog. Odessa, 1901. 4°.

Pflüger E. — Fortgesetzte Untersuchung ueber die in wasserlöslicher Form sich vollziehende Resorption der Fette. Bonn, 1901. 8°.

Id. — Ueber die Bedeutung der Seifen für die Resorption der Fette. Bonn, 1901. 8°.

Pingré A. G. — Annales célestes du dix-septième siècle. Paris, 1901. 4°.

Semmola E. — Il nuovo cono eruttivo vesuviano nell'aprile 1901. Napoli, 1901. 8°.

Id. — Il Vesuvio nel maggio 1900. Napoli, 1901. 8°.

Id. — La pioggia ed il Vesuvio. Nota. 2ª. Napoli, 1901. 8°.

Id. — Quando ebbe fine la fase esplosiva del Vesuvio nel maggio 1900? Napoli, 1901. 8°.

Salvioni E. — Misura di masse comprese fra gr. 10^{-1} e gr. 10^{-6}. Messina, 1901. 8°.

Id. — Sulla volatilizzazione del muschio. Messina, 1901. 8°.

Id. — Un'esperienza per dimostrare il decrescere della pressione atmosferica con l'altezza. Messina, 1901. 8°.

Id. — Un nuovo igrometro. Messina, 1901. 8°.

Torelli G. — Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato. Napoli, 1901. 4°.

V. C.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Botanica. — *Origine e differenziazione degli elementi vascolari primarî nella radice delle Monocotiledoni.* Nota I preventiva del Socio R. PIROTTA.

Già Th. Lestiboudois aveva affermato che nelle radici delle Monocotiledoni i vasi si formano dal di fuori al di dentro. Occorre però giungere a C. Nägeli per avere al riguardo dello sviluppo degli elementi vascolari nelle radici notizie più esatte e sicure. Nägeli stabilisce che già nei primi stadî di sviluppo si manifesta una grande differenza tra il caule e la radice, perchè mentre nel primo la formazione dei vasi è *centrifuga*, cioè procede dal centro verso la periferia, nelle seconde è *centripeta*, cioè comincia alla periferia e procede in linea radiale verso il centro. Aggiunge che la lignificazione degli elementi vascolari procede pure, come già aveva detto Karsten, centripetamente. Rileva soltanto che nelle radici di *Pandanus* la comparsa de' cordoni cambiali (pro-cambiali) comincia nel punto mediano della radice e si muove verso l'esterno.

Tutti gli autori che si sono occupati della struttura e dello sviluppo della radice e dei suoi costituenti anatomici, concordano nell'ammettere che la lignificazione, cioè la differenziazione fino allo sviluppo completo degli elementi vascolari della radice, procede dalla periferia al centro, e cioè centripeta. Non tutti invece sono d'accordo quanto al modo d'origine degli elementi vascolari medesimi.

Nelle radici della grandissima maggioranza delle Monocotiledoni si trovano due sorta di vasi distinti per origine e struttura; gli uni formano i *raggi vascolari* disposti regolarmente dalla periferia verso il centro, dove qualche volta si incontrano; gli altri si trovano all'interno dei raggi vascolari, in quella parte interna del cilindro centrale della radice che possiamo chiamare appunto *centrale*. Questi vasi *centrali* variano di numero da uno a molti, variano di posizione essendo talora disposti in cerchio verso la periferia della porzione centrale, tal'altra quasi addossati ai raggi vascolari, tal'altra sparsi senza ordine dovunque, tal'altra ancora lasciano una parte centrale libera da' vasi. Quando vi è un solo vaso, questo è di regola *assile* e talora avviene che un vaso assile si trovi anche quando vi sia più un vaso centrale o interno.

Ph. Van Tieghem ritiene che i grandi vasi interni della radice di certe Aroidee siano gli ultimi a formarsi, che essi anche quando sono staccati dagli elementi del raggio vascolare, appartengano al raggio medesimo e ne siano precisamente gli elementi più interni. Per lui dunque vi sono soltanto raggi vascolari in queste radici, e il loro sviluppo è centripeto. C. Nägeli e H. Leitgeb, senza preoccuparsi delle due sorte di vasi, affermano pure che gli elementi primi a formarsi sono quelli esterni. Anche E. Russow, che si è con tanta competenza occupato di questo genere di studî, sostiene che nelle radici lo sviluppo degli elementi vascolari, come di quelli cribosi, ha luogo senza eccezione centripetamente e contemporaneamente. Aggiunge però, che il pleroma o tessuto embrionale del cilindro centrale, già istituito da J. Hanstein, dà generalmente origine nelle Monocotiledoni a un tessuto procambiale periferico dal quale proverranno i raggi vascolari ed i cordoni cribosi, e ad un tessuto o parenchima midollare nel centro, che si differenzierà in midollo.

Ammisero l'origine centripeta dei raggi vascolari anche L. Kny, la S. Goldsmith, J. Klinge, J. E. Weiss, C. E. Bertrand, R. Gérard, P. A. Dangeard e altri non pochi.

Come abbiamo veduto Ph. Van Tieghem riteneva i vasi centrali parte integrante del fascio vascolare della radice e in questa opinione lo seguirono, fra gli altri, P. Falkenberg, J. Klinge, almeno per la maggior parte dei casi, R. Gérard, P. A. Dangeard, Kattein. Però lo stesso Van Tieghem, molto più tardi ammise, almeno per le radici di alcune Monocotiledoni, che i vasi centrali siano indipendenti dai raggi vascolari e provengano da differenziazioni dirette di cellule midollari e li chiama *vasi estralegnosi*. Subito dopo il mio scolaro G. Cerulli-Irelli, e più recentemente E. Chauveaud confermarono che i vasi centrali e midollari non hanno nessun rapporto con quelli dei raggi nè per l'origine, nè per il modo di differenziazione, nè per la posizione e la disposizione.

O. Nicolai osservò per il primo in alcune Graminacee, che i primi vasi a comparire sono quelli centrali e midollari, che i piccoli vasi dei raggi

compariscono più tardi, che però i primi elementi formatisi che sono quelli più grandi e centrali lignificano per gli ultimi. Queste osservazioni però furono dimenticate per lungo tempo causa l'autorità di coloro che sostenevano l'opinione contraria. Soltanto più tardi fu accennato appena a ciò da Cerulli-Irelli, e fu ampiamente confermato in questi ultimi anni quasi contemporaneamente da E. Chauveaud, e da me e dal dott. L. Buscalioni (1).

La struttura dell'apice vegetativo della radice delle Monocotiledoni non è eguale per tutte, anzi è considerevolmente differente. In tutte però le radici terrestri ed aeree è ben manifesta quella regione interna di tessuti embrionali, che comunemente è detta pleroma e che darà origine al cilindro centrale della radice. Esso si differenzia normalmente e ben presto in tre regioni o istogeni, una esterna che darà origine al pericambio o periciclo, l'altra mediana immediatamente susseguente, il *parenchima procambiale*, e la terza interna più o meno sviluppata, il *parenchima centrale*.

In ciascuna di queste tre regioni, ma sopratutto nella seconda e nella terza si sviluppano elementi vascolari in modo regolare nel parenchima procambiale, di solito non regolare nel parenchima centrale.

Nel parenchima procambiale infatti hanno origine gli elementi dei *raggi vascolari* caratteristici per la radice in generale, che collocati ad eguale di stanza, in numero di due o più, spesso moltissimi, si veggono, a completo sviluppo, regolarmente disposti in cerchio, alternando coi cordoni cribrosi, dai quali li separano elementi del parenchima fondamentale.

Nel parenchima centrale hanno origine i *vasi centrali*, frequentissimi nelle radici delle Monocotiledoni, differenti di solito per disposizione, forma, dimensioni e struttura da quelli dei raggi vascolari. Talvolta vi è un solo vaso centrale ed occupa allora l'asse del cilindro centrale, cosicchè può dirsi *assile*; tal'altra ve ne sono pochi o molti, con o senza quello assile, isolati o a gruppi in modo variabile come vedremo più innanzi.

I primi elementi vascolari a comparire sono quelli centrali, e se ve ne è uno assile, questo è il primo di tutti a presentarsi. Essi si differenziano già in vicinanza dell'apice del pleroma, dove stanno le sue iniziali, dalle

(1) Insieme col mio assistente dott. Luigi Buscalioni venivano condotte le prime ricerche su questo argomento, i cui risultati furono per sunto fatti conoscere colla nota inserita in questi stessi Rendiconti a pag. 60 del vol. VII, 1° sem., serie V, fascicolo 3° (seduta del 6 febbraio 1898). Il dott. L. Buscalioni stette poi lontano a lungo dal Laboratorio per attendere a viaggi scientifici, quindi lo abbandonò. Egli continuò per suo conto le ricerche sull'argomento che aveva, già nel mio Istituto, estese ad altre questioni che più o meno vi si possono collegare, eseguendo con una attività straordinaria in due anni di lavoro un numero immenso di preparazioni. Mentre egli pubblicherà per suo conto i risultati delle sue investigazioni, io faccio qui noti quelli delle mie, continuate però soltanto allo scopo di completare lo studio dell'origine e della differenziazione degli elementi vascolari, solo argomento da noi iniziato già in comune. Col corredo di opportune tavole il lavoro vedrà ben presto la luce nell'*Annuario del R. Istituto Botanico di Roma.*

quali sembrano talvolta provenire direttamente. Però quando i vasi centrali sono parecchi o molti, quelli che man mano seguono verso l'esterno si differenziano ad una maggiore distanza dalle iniziali medesime. Ad ogni modo, quantunque la loro differenziazione abbia luogo di regola in modo rapido, non compariscono contemporaneamente, ma centrifugamente, cioè dal centro verso la periferia, benchè non in modo perfettamente regolare. Le cellule embrionali del parenchima centrale ricche di contenuto e attivamente in segmentazione nella parte più giovane, cessano, di regola, ben presto di segmentarsi per dar luogo agli elementi dei vasi, nel modo che sarà detto più innanzi.

Gli elementi dei raggi vascolari si differenziano più o meno tardi relativamente a quelli dei vasi centrali, sempre però anche dopo la differenziazione dei cordoni cribrosi. Di essi elementi vascolari i primi a comparire, di regola generalissima, sono quelli che stanno più all'interno del futuro raggio, e si seguono man mano in ordine centrifugo, cioè dall'interno verso l'esterno, dai più grandi ai più piccoli, che sono quelli periferici. Il che è reso palese anche dal fatto che il processo di segmentazione cellulare continua ancora alla periferia, quando è già cessato verso l'interno.

Come regola generalissima, di tutti questi vasi i primi a raggiungere la loro completa differenziazione, il loro stato adulto, reso manifesto dal processo di lignificazione della parete e dalla scomparsa del corpo protoplasmatico, sono quelli dei raggi vascolari, e precisamente in modo centripeto, vale a dire, che la lignificazione procede dall'esterno, dai più piccoli elementi vascolari del raggio verso l'interno cioè verso i più grandi del raggio medesimo, e poi a quelli man mano centrali. Talvolta però si modifica profondamente anche il parenchima fondamentale della porzione centrale del cilindro, lignificandosi più o meno. Allora, di regola il processo di lignificazione procede dal centro alla periferia.

Matematica. — *Sugli spazî plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazî.* Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Socio SEGRE.

In una Nota pubblicata in questi medesimi Rendiconti il prof. Segre assegnò l'ordine delle condizioni che s'impongono agli elementi di una matrice volendo ch'essa sia di dato rango [1]. Svariatissime sono le applicazioni

[1] *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* (Rend. de' Lincei, (5), t. IX, 1900). La formola alla quale si allude nel testo è stata dall'A. dedotta da una che Schubert aveva enunciato senza dimostrazione, e che trovasi dimostrata, insieme ad una più generale sulle correlazioni, nella dissertazione di laurea, presentata dal dott. Giambelli, or non è molto, alla Facoltà di scienze dell'Università di Torino.

che si possono fare di questo risultato alla geometria; ed io mi propongo di far vedere in questa Nota come da esso si possa dedurre in una maniera semplice ed elegante, il numero degli spazî plurisecanti di una curva razionale (numero già intuito dal Meyer e dal Tanturri) e, più in generale, il numero degli spazî plurisecanti di una ∞^1 razionale di S_h, nello S_r, ossia il numero degli spazî di data dimensione che contengono il massimo numero di spazî generatori della varietà stessa.

1. Per conseguire il nostro scopo è necessario premettere la risoluzione del seguente problema.

Avendosi nello S_d $d-l$ *sistemi lineari projettivi* ∞^p *di iperpiani, quanti sono gli* $[l]$ *comuni a* $d-l$ *iperpiani omologhi dei suddetti sistemi, i quali si appoggiano a un dato* $[\delta]$ *secondo uno spazio* $[\beta]$, *se* $(\beta+1)(d-\delta-l+\beta)=p$?

Siano

$$\sum_0^p \lambda_i f_i' = 0\,,\ \sum_0^p \lambda_i f_i'' = 0\,, \dots,\ \sum_0^p \lambda_i f_i^{(d-l)} = 0\,,$$

le equazioni dei $d-l$ sistemi di iperpiani, e supponiamo di aver scelto le coordinate interne in ciascuno di essi in guisa che gli iperpiani omologhi si ottengano da quelle equazioni dando alle λ gli stessi valori.

Le coordinate dei punti del dato spazio $[\delta]$ si possono esprimer così:

$$x_i = a_{i0}\mu_0 + a_{i1}\mu_1 + \dots + a_{i\delta}\mu_\delta\ (i=0\,,1\,,\dots,d)\,,$$

ove le x_i son forme indipendenti delle μ; e quindi i punti appartenenti al dato spazio $[\delta]$ e allo spazio $[l]$ comune agli iperpiani dei sistemi dati corrispondenti a fissati valori delle λ, si otterranno dalle equazioni:

$$\sum_0^p \lambda_i f_i'(a_{j0}\mu_0 + \dots + a_{j\delta}\mu_\delta) = 0\,, \dots,\ \sum_0^p \lambda_i f_i^{(d-l)}(a_{j0}\mu_0 + \dots + a_{j\delta}\mu_\delta) = 0\,,$$

le quali, mettendo in evidenza $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\delta$, possono scriversi

$$\sum_0^\delta \mu_i \varphi_i^{(1)}(\lambda) = 0\,, \dots,\ \sum_0^\delta \mu_i \varphi_i^{(d-l)}(\lambda) = 0\,,$$

ove le φ sono forme lineari di $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Volendo che i punti x giacenti nel dato $[\delta]$ e in uno spazio $[l]$ comune agli iperpiani dei dati sistemi corrispondenti a certi valori delle λ, riempiano uno spazio $[\beta]$, bisognerà esprimere che le equazioni precedenti fra le μ si riducono a $\delta-\beta$ distinte, ossia che la matrice $|\varphi_i^{(j)}(\lambda)|$ $(i=0,1,\dots,\delta;\ j=1,\dots,d-l)$ ha il rango $\delta-\beta$.

Applicando la formola citata del prof. Segre, ove si ponga

$$m = \delta\,, n = d - l - 1\,, q = \delta - \beta - 1$$

avremo l'espressione

$$(1)\qquad \frac{(d + 2\beta + 1 - \delta - l)_u\,(d + 2\beta + 2 - \delta - l)_u \ldots (d + \beta - l)_u}{(u)_u\,(u + 1)_u \ldots (d - l - 1)_u}$$

[ove $u = d - \delta + \beta - l$ e il simbolo $(a)_b$ sta invece di $\binom{a}{b}$], come ordine del sistema di condizioni, equivalenti a $(\beta + 1)\,(d - \delta - l + \beta)$ indipendenti, che s' impongono alle λ volendo che la matrice delle φ sia di rango $\delta - \beta$. — Siccome per ipotesi

$$(\beta + 1)\,(d - \delta - l + \beta) = p$$

il numero che richiedevamo, sarà in generale finito ed espresso dalla formola (1).

2. Se $2\beta + 2 \leq \delta$ la (1) può scriversi:

$$\frac{(d + 2\beta + 1 - \delta - l)_u \ldots (d - l - 1)_u\,(d - l)_u \ldots (d - l + \beta)_u}{(u)_u\,(u + 1)_u \ldots (d + 2\beta + 1 - \delta - l)_u \ldots (d - l - 1)_u}$$

e quindi sopprimendo i fattori comuni al numeratore e al denominatore

$$(2)\qquad \frac{(d - l)_u\,(d - l + 1)_u \ldots (d - l + \beta)_u}{(u)_u\,(u + 1)_u \ldots (d + 2\beta - \delta - l)_u}\,.$$

Se $2\beta + 1 = \delta$ la (1) e la (2) coincidono.

Quando infine $2\beta \geq \delta$ moltiplicando numeratore e denominatore della (1) per $(d - l)_u\,(d - l + 1)_u \ldots (d + 2\beta - \delta - l)_u$, avremo ancora il numero di cui ci siamo occupati sotto la forma (2).

Se $\delta = \beta$ allora la formola del prof. Segre diventa illusoria e quindi non si può più scriver la (2) come conseguenza di essa. Ma allora è evidente che l'ordine del sistema di condizioni che s' impongono alle λ volendo che la matrice delle φ sia del rango $\delta - \beta = 0$, è 1, perchè le condizioni suddette si ottengono uguagliando a 0 le φ. La (2), nel caso $\delta = \beta$, riducesi proprio all'unità, e dunque scrivendo il numero che ci ha occupato sotto la forma (2), veniamo a rimuovere ogni caso di eccezione.

3. E passiamo adesso al problema che costituisce l'oggetto di questa Nota.

Rifacciamoci dal caso di una curva razionale d'ordine ν dello spazio $[r]$ e sia C la curva d'ordine ν dello S_ν, di cui la data può pensarsi come projezione.

Gli S_k t-secanti della curva data nello S_r, i quali sono generalmente in numero finito e non nullo quando $(r - k - 1)\,t = (k + 1)\,(r - k)$, corrispondono biunivocamente ai $[t - 1]$ t-secanti di C, i quali si appoggiano a un dato $[\nu - r - 1]$ secondo un $[t - k - 2]$.

Si assumano $\nu - t + 1$ spazî $[\nu - t - 1]$, $(\nu - t)$ — secanti di C, e siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{\nu-t+1}$, come sostegni di altrettanti sistemi lineari $(\Sigma_1), \ldots, (\Sigma_{\nu-t+1})$ di iperpiani; e diciamo che due iperpiani appartenenti rispettivamente a due di quei sistemi sono omologhi, quando, dai rispettivi sostegni, projettano un medesimo $[t-1]$, t — secante di C. Di qual natura sono le corrispondenze che veniamo così a porre fra i sistemi (Σ)? I coni che projettano C da due spazî Σ, p. e. Σ_1 e Σ_2, dànno come traccia su un generico spazio $[t]$ due curve C_1, C_2 d'ordine t, e quindi normali, le quali risultano riferite biunivocamente, e perciò projettivamente, quando si chiamino omologhi due dei loro punti che provengano da uno stesso di C. — Due iperpiani dei sistemi $(\Sigma_1), (\Sigma_2)$ omologhi nella corrispondenza, che, con la legge detta prima, si pone fra i sistemi suddetti, vengono a projettare due $[t-1]$ dello spazio di C_1 e C_2, che sono omologhi nella projettività fra C_1 e C_2; ne segue che anche la corrispondenza fra (Σ_1) e (Σ_2) è una projettività; e così per le altre coppie di sistemi (Σ).

Dopo ciò gli spazî $[t-1]$ t — secanti di C si presentano come spazî d'intersezione di $\nu - t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi projettivi ∞^t (i sistemi (Σ)). Si tratterà dunque di trovare quanti sono i $[t-1]$ d'intersezione di $\nu - t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi projettivi ∞^t, i quali si appoggiano a un dato $[\nu - r - 1]$ secondo un $[t - k - 2]$. Applicando la formola (2), nella quale si ponga

$$d = \nu \,, l = t - 1 \,, p = t \,, \delta = \nu - r - 1 \,, \beta = t - k - 2 \,,$$

avremo il numero degli S_k t — secanti di una curva razionale di ordine ν dello S_r:

$$\frac{(\nu - t + 1)_{r-k} (\nu - t + 2)_{r-k} \ldots. (\nu - k - 1)_{r-k}}{(r-k)_{r-k} (r - k + 1)_{r-k} \ldots. (r - 2k + t - 2)_{r-k}} \text{ (1)}.$$

4. Il procedimento precedente si può estendere per la determinazione del numero degli S_k che contengono il massimo numero di spazî generatori di una ∞^1 di S_h, razionale e dell'ordine ν, appartenente allo S_r.

Se

$$t[(h+1)(r-k) - 1] = (k+1)(r-k)$$

(1) Come abbiamo accennato questa formola trovasi scritta *per induzione* in Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883, vedi a p. 363), e in Tanturri, *Ricerche sugli spazî plurisecanti di una curva algebrica* (Annali di Matematica, (3), t. IV, 1900); ma non era stata dimostrata in tutta la sua generalità. Il procedimento del Tanturri permette di assegnare il numero degli spazî plurisecanti di una curva razionale in ogni caso numerico; ma poggia, oltrechè sulla conservazione del numero, sopra certi postulati che non sono peranco dimostrati. Nella mia Nota, *I gruppi neutri con elementi multipli in un'involuzione sopra un ente razionale* (Rendiconti de' Lincei, (5), t. IX, 1901) dalla formola del testo si deduce il numero degli spazî che hanno contatti di dati ordini con una curva razionale dello $[r]$.

esisterà in generale un numero finito e non nullo di spazî S_k contenenti t $[h]$ generatori della nostra varietà; e noi, nel seguito, supporremo che la relazione precedente sia soddisfatta.

Sia V la varietà normale, d'ordine ν, dello spazio $[\nu + h]$, di cui la data varietà può riguardarsi come projezione. Gli spazî $[k]$ che ricerchiamo corrispondono biunivocamente agli spazî $[(h+1)t-1]$ che congiungono a t a t gli spazî generatori di V e che si appoggiano a un dato $[\nu + h - r - 1]$ secondo un $[(h+1)t-k-2]$ (¹). Assumiamo in V $\nu + h - (h+1)t + 1$ direttrici ad h dimensioni di ordine $\nu - t$, e siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ gli spazî a $\nu + h - t - 1$ dimensioni in cui esse sono immerse (Bellatalla, loc. cit., n. 2). Fra gli iperpiani dei sistemi linearî (Σ) poniamo delle corrispondenze dicendo omologhi gli iperpiani di quei sistemi quando, dai rispettivi sostegni, projettano le t — ple di spazî generatori di V. Queste corrispondenze saranno projettività come si vede secando tutto con un S_ν e osservando che, per una considerazione svolta al n. 3, le sezioni dei sistemi (Σ) riferiti nel modo detto, sono sistemi lineari projettivi di $S_{\nu-1}$.

Sicchè la nostra questione è ridotta a cercare nello $S_{\nu+h}$, quanti sono gli spazî $[(h+1)t-1]$ comuni a $\nu + h - (h+1)t + 1$ iperpiani omologhi di altrettanti sistemi lineari projettivi ∞^t, i quali si appoggiano a un dato $[\nu + h - r - 1]$ secondo un $[(h+1)t-k-2]$; e la risposta ad essa l'avremo ponendo nella formola (2)

$$d = \nu + h, k = (h+1)t - 1, p = t, \delta = \nu + h - r - 1, \beta = (h+1)t - k - 2.$$

Verrà allora:

$$\frac{(\nu + h - (h+1)t + 1)_{r-k}(\nu + h - (h+1)t + 2)_{r-k} \ldots (\nu + h - k - 1)_{r-k}}{(r-k)_{r-k}(r-k+1)_{r-k} \ldots (r - 2k + (h+1)t - 2)_{r-k}}.$$

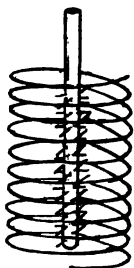
Questa è la formola che dà il numero dei $[k]$ che contengono t S_h generatori di una ∞^1 razionale di spazî, appartenente allo S_r, allorchè, beninteso, questo numero è finito (²).

(¹) Qui si suppone, implicitamente, che t $[h]$ generatori di V siano *indipendenti*, per il che bisogna e basta che sia $t \leq m' + 1$ ove m' denota l'ordine di una curva direttrice minima tracciata sopra V. Cfr. Bellatalla, *Sulle varietà razionali normali composte di* ∞^1 *spazî lineari* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXXVI, 1901) n. 10. Se $t > m' + 1$ il numero di cui ci stiamo occupando nel testo, sarà infinito.

(²) Per $k = r - 1$ si ottiene la formola data dal Tanturri al n. 6 della Nota, *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di* ∞^1 *spazî*. (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXXV, 1900).

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota preliminare di A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

I signori Elster e Geitel hanno osservato recentemente che si può rendere temporariamente radioattivo un corpo esposto all'aria e portato ad un alto potenziale negativo. La radioattività indotta è molto intensa se l'aria in cui è immerso il corpo si trova in uno stato di ionizzazione elevata, come nei luoghi chiusi, grotte, ecc.

Ora io sono riuscito a comunicare una intensa radioattività ad un metallo nel seguente modo. Si prende una spirale di filo di zinco od alluminio (spessore 2 mm.) e del diametro di circa 12 cm.; coassialmente ad essa si dispone un sottile cilindro di carta ricoperto di stagnola, normalmente al quale sono infilati degli aghi. Se ora si mette in comunicazione la spirale e gli aghi rispettivamente coi poli di una macchina elettrostatica ad influenza, e si lascia per qualche tempo la macchina in azione si trova la spirale fortemente attiva.

Questa attivazione si dimostra circondando colla spirale, al suolo, un cilindro metallico carico, in comunicazione con un elettrometro (nel modo più comodo adoperando l'apparecchio Elster e Geitel per la misura della dispersione atmosferica) ed osservando la caduta del potenziale. Con una spirale sottoposta ad un trattamento di due ore, ottenni una scarica completa dell'elettrometro Elster e Geitel in meno di un minuto, là dove erano necessarie almeno due ore operando in identiche condizioni, ma colla spirale non attivata. Così si può, strofinando il filo metallico e raccogliendo la sostanza così tolta, ottenere un'energica impressione della lastra fotografica attraverso spessi strati di carta nera opaca.

Ora questa attivazione si ottiene sia con spirale positiva, sia con spirale negativa. Per essere al coperto da variazioni del segno elettrico (oscillatore) ho posto in derivazione sulla macchina una forte capacità ed inserito nel circuito un'alta resistenza liquida.

Questo risultato è del tutto inaspettato, perchè Rutherford sopra l'ossido di torio, Dorn sopra i sali di radio, Elster e Geitel nell'aria atmosferica non hanno mai ottenuto radioattività indotta sopra un corpo positivo. Data questa indipendenza del fenomeno dal segno, pensai di mettere spirale ed aghi in comunicazione coi poli di un trasformatore Tesla. Ora, con questa disposizione, per quanto i fiocchi sugli aghi e l'effluvio elettrico fossero molto più vivaci che non colla macchina elettrostatica, non ottenni che una attivazione molto debole della spirale.

Elettrochimica. — *Misura della diffusione elettrolitica, dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni* (¹). Nota I di Paolo Straneo, presentata dal Socio A. Cossa.

Considerazioni generali. — La teoria della propagazione dell'elettricità attraverso gli elettroliti, quando si voglia tener conto anche solamente dei principali fenomeni che la accompagnano, presenta gravi difficoltà, che non possono attualmente venire superate in causa della nostra incompleta conoscenza di alcuni di questi fenomeni. Essa sarebbe però di grandissima utilità non solo dal lato scientifico, ma anche da quello delle applicazioni. Infatti, come osserva Kohlrausch in un suo interessante lavoro (²), molti sono i casi pratici in cui sarebbe utile di conoscere le successive modificazioni di un elettrolito in riposo percorso da una corrente elettrica. Invece le nostre conoscenze in proposito sono ancora estremamente limitate.

Consideriamo un cilindro contenente una soluzione di un elettrolito e percorso da una corrente elettrica di densità uniforme. Se originariamente lo stato di questo elettrolito in ogni sezione normale all'asse era solo funzione dell'altezza x di essa, il problema della determinazione dello stato dell'elettrolito in tutti i tempi dipenderà da una sola coordinata, l'altezza x. Basandoci sulla teoria delle soluzioni di Van t'Hoff e della migrazione dei ioni di Hittorf, potremo esprimere la quantità di sostanza S che nell'unità di tempo attraversa una sezione q del cilindro colla nota formula:

$$1) \qquad S = -Dq\frac{\partial p}{\partial x} + i\,\{n - (1-n)\}\,\varepsilon$$

In essa D indica il coefficiente di diffusione dell'elettrolito relativamente alla pressione osmotica, i l'intensità della corrente, ε l'equivalente elettrochimico dell'elettrolito. Finalmente n indica il numero di trasporto del catione e quindi $1-n$ quello dell'anione.

Per poter trattare il problema generale applicando questa legge, sarebbe necessario esprimere analiticamente i valori del coefficiente D, di n e della variabile p in funzione della concentrazione.

Le ricerche di Hittorf hanno dimostrato in modo certo che per alcuni elettroliti n varia assai colla concentrazione; non si posseggono però ancora attualmente sufficienti misure per poter determinare questa funzione.

(¹) Ricerche eseguite nel laboratorio di Elettrochimica del R. Museo Industriale Italiano in Torino nel mese di agosto 1901.

(²) F. Kohlrausch, *Ueber Concentrations-Verschiebungen durch Elektrolyse im Innern von Lösungen und Lösungsgemischen.* Wied. Annalen, Band. 62.

I metodi di misura ordinariamente impiegati si prestano assai poco a questa determinazione, perchè fondati sulla produzione di forti differenze di concentrazioni in vicinanza dei due elettrodi e non possono quindi fornire che dei valori medi del numero di trasporto. Coll' impiego di diaframmi porosi si riesce a misurare producendo limitate variazioni di concentrazioni, ma il valore che si ottiene può in alcuni casi venire notevolmente influenzato dalla presenza del diaframma.

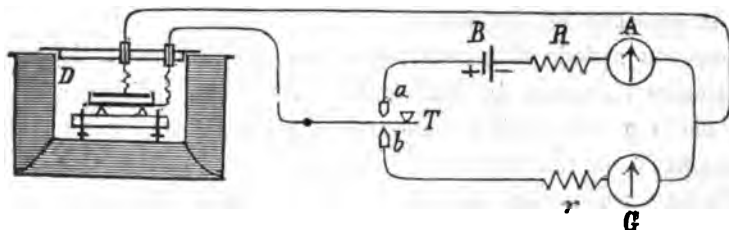
Perchè un metodo di misura possa dare risultati buoni, deve escludere completamente l' impiego di diaframmi e richiedere differenze di concentrazioni molto piccole. Allora solamente si potrà parlare di un coefficiente di diffusione e di un numero di trasporto per quella data concentrazione. Siccome poi queste due quantità sono assai variabili colle condizioni fisiche e collo stato di purezza dell' elettrolito impiegato, sarà bene che il metodo permetta di eseguire la loro determinazione con un solo apparecchio, funzionante sempre in identiche condizioni.

Io mi propongo di esporre un metodo per la misura del coefficiente di diffusione D e del numero di trasporto n, che soddisfaccia alle predette condizioni; esso avrà inoltre sui metodi attualmente impiegati il vantaggio della speditezza, perchè tutta la misura si potrà eseguire in un tempo arbitrariamente piccolo. Esso potrà inoltre servire per la determinazione delle mobilità assolute U e V dei ioni impiegando la relazione esistente, secondo la teoria osmotica delle soluzioni, fra il coefficiente di diffusione e le mobilità.

La teoria della diffusione elettrolitica, dovuta a Nernst, fu sottoposta a molte verifiche sperimentali e confermata in modo sufficiente per poter essere presa a base di un metodo di misura delle mobilità dei ioni. In ogni caso il metodo che esporrò, potrà sempre servire alla misura del coefficiente di diffusione dell' elettrolito e dei numeri di trasporto, indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla natura delle soluzioni. Allora si farà solo uso della legge elementare di Fick per la idrodiffusione; la quantità di sostanza che si diffonderà attraverso la superficie unitaria del cilindro considerato sarà allora, indicando con c la concentrazione dell' elettrolito:

$$1^{bis})\qquad S' = -D' \frac{\partial c}{\partial x} + \{n - (1 - n)\}\, i\, \varepsilon.$$

Descrizione del metodo. — Il concetto fondamentale di questo metodo consiste nel porre l' elettrolito da studiarsi fra due elettrodi orizzontali, collocati ad una piccola distanza l' uno dall' altro, nel provocare mediante una corrente elettrica di densità convenientemente scelta, uno spostamento dell' elettrolito dall' alto in basso e nel calcolare dalle variazioni delle concentrazioni in vicinanza degli elettrodi i valori di D ed n. Specialmente semplice si presenta il caso, al quale sono limitate queste prime ricerche, in

cui l'elettrolito è un sale del metallo degli elettrodi. Esso presenta allora una certa analogia con quello impiegato dal prof. H. F. Weber [1] per la verifica della legge di Fick. Le misure necessarie si possono eseguire facilmente mediante la disposizione sperimentale rappresentata dallo schema seguente:

L'apparecchio D in cui avveniva la diffusione era costituito da due dischi di metallo dello spessore di circa 1 cm, e del diametro di 9 cm., separati l'uno dall'altro da tre pezzetti di vetro, che nelle diverse misure avevano spessori differenti variabili da 1 a 5 mm.

Il disco inferiore era circondato da una striscia di ebanite alta circa 3 cm. che serviva per trattenere il liquido, ed era collocato su un supporto con viti d'orizzonte e livello; il tutto era rinchiuso in una cassa di zinco circondata da acqua per mantenere la temperatura costante. B era un accumulatore, R un reostato per regolare l'intensità della corrente, A un amperometro; G era un galvanometro di grande resistenza (10000 Ω) avente in serie un reostato r pure di grandissima resistenza; T era un commutatore a tasto.

La misura veniva eseguita nel seguente modo: Si stabiliva la comunicazione del tasto T con a, così si chiudeva il circuito B R A D e si mandava attraverso l'elettrolito una corrente opportunamente stabilita e di intensità i mantenuta costante mediante il reostato R e l'amperometro A. Di tempo in tempo, spingendo rapidamente il tasto T in contatto con h, si interrompeva il circuito B R A D e si chiudeva invece il circuito r G D; si poteva così, data la grande resistenza del galvanometro e della resistenza in serie (durante questa misura 50000 Ω) misurare la forza elettromotrice in D e calcolare, come vedremo in seguito, la differenza delle concentrazioni dell'elettrolito in contatto degli elettrodi. Quando questa forza elettromotrice era divenuta stazionaria, si interrompeva il circuito B R A D mandando il tasto T nella sua posizione intermedia e si osservava ogni 15 secondi la forza elettromotrice in D chiudendo per un istante il circuito del galvanometro. Siccome, come vedremo in seguito, non si possono utilizzare che le

[1] H. F. Weber, *Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion.* Wied. Ann. 7.

misure eseguite dopo un certo tempo dall'interruzione della corrente i, bisognava aumentare la sensibilità del galvanometro e ridurre la resistenza del reostato r a 10000 Ω. La quantità di elettricità che passava attraverso il galvanometro durante l'istante di chiusura era così piccola, che non poteva avere alcuna influenza sullo stato degli elettrodi o dell'elettrolito: essa non raggiungeva mai il valore di un milionesimo di coulomb. Dai valori successivi della forza elettromotrice misurata si calcolavano i decrementi logaritmici di due in due minuti primi e se ne faceva il valore medio. Con esso e con quello della forza elettromotrice stazionaria precedentemente misurata si calcolavano D ed n e quindi anche U e V.

Questo calcolo dipenderà dallo stato di purezza dell'elettrolito e dalle sue concentrazioni. Noi considereremo dapprima il caso di una soluzione diluita di un solo elettrolito; in seguito tratteremo il caso di soluzioni concentrate e poi quello di soluzioni di parecchi elettroliti.

Teoria per una soluzione diluita di un solo elettrolito. — Partendo dalla legge espressa dall'equazione 1^{bis}, si stabilisce facilmente che l'equazione che presiede ai fenomeni di diffusione nell'interno di un elettrolito, è la nota equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D' \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Per le ricerche di Hittorf si sa inoltre, che la quantità di sale che scompare dallo strato infinitesimo in contatto col catodo, nel tempo t, per l'azione di una corrente costante i è eguale a:

$$i(1-n)\,\varepsilon\, t,$$

in cui n è come precedentemente il numero di trasporto del catione, ε l'equivalente elettrochimico dell'elettrolito. Parimenti nello strato infinitesimo in contatto coll'anodo apparirà, nel tempo t, la stessa quantità di sale. Se poniamo l'origine delle coordinate x al catodo ed indichiamo con L la distanza dei due elettrodi, con q la superficie, e supponiamo la concentrazione originariamente uniforme c_0, il nostro problema si ridurrà alla ricerca di una soluzione dell'equazione (2), soddisfacente inoltre alle condizioni:

(3) al catodo $x = 0$ $\quad q D' \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} = i(1-n)\,\varepsilon$ per ogni tempo

(4) all'anodo $x = L$ $\quad q D' \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=L} = i(1-n)\,\varepsilon$ per ogni tempo

(5) $t = 0$ $\quad c = c_0$ in ogni punto.

Questo problema essendo identico a quelli che si incontrano nella teoria della propagazione del calore, può essere risolto rapidamente. Si vedrebbe

allora, ciò che d'altra parte è fisicamente evidente, che la concentrazione in ogni punto tende verso un valore stazionario, che si può anche semplicemente calcolare supponendo $\frac{dc}{dt}=0$ e quindi cercando una soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2c}{dx^2}=0,$$

tale che siano soddisfatte le condizioni (3) e (4). Procedendo con notissimi metodi si ottiene:

$$c_s = c_0 + \frac{i\varepsilon(1-n)}{D'q}\left(x-\frac{L}{2}\right). \tag{6}$$

Quest'equazione ci dice che la concentrazione nella sezione intermedia $x=\frac{L}{2}$ non è variata e che le concentrazioni al catodo ed all'anodo sono rispettivamente:

$$(c_s)_{x=0} = c_0 - \frac{i\varepsilon(1-n)}{D'q}\,\frac{L}{2} \quad \text{e} \quad (c_s)_{x=L} = c_0 + \frac{i\varepsilon(1-n)}{D'q}\,\frac{L}{2}. \tag{7}$$

Avendo supposto la soluzione diluita e quindi l'elettrolito completamente dissociato, potremo calcolare la forza elettromotrice E_s della pila a concentrazione risultante servendoci della nota formula di Nernst:

$$E_s = -\frac{0{,}0000866}{n'}\,\frac{2v}{u+v}\,T\ln\frac{(c_s)_{x=L}}{(c_s)_{x=0}} \text{ volta.}$$

Ma avendosi per la definizione di $1-n$:

$$1-n=\frac{v}{u+v},$$

l'espressione della forza elettromotrice cercata sarà:

$$E_s = -\frac{0{,}0000866}{n'}\,2(1-n)\,T\ln\frac{(c_s)_{x=L}}{(c_s)_{x=0}} \text{ volta.} \tag{8}$$

Poniamo per brevità $\frac{i\varepsilon(1-n)}{D'q}\,\frac{L}{2}=h$; allora sarà:

$$\log.\frac{(c_s)_{x=L}}{(c_s)_{x=0}} = \log.\frac{1+\frac{h}{c_0}}{1-\frac{h}{c_0}} = 2\left\{\frac{h}{c_0}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{c_0}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{c_0}\right)^5+\cdots\right\}$$

Se h è sufficientemente piccolo si potranno trascurare tutti i termini della serie eccetto il primo; praticamente, per ridurre l'errore che si com-

mette, a meno di un centesimo, basterà che h sia minore di $0{,}52 \times c_0$. Nelle esperienze eseguite ciò è sempre verificato. Ne segue che la forza elettromotrice stazionaria fra i due elettrodi sarà:

(9) $$E_s = 2 \frac{0{,}0000866}{n'} \frac{T(1-n)^2}{D'} \frac{i}{q} L \frac{\varepsilon}{c_0} \text{ Volta}.$$

Abbiamo così una prima relazione fra n e D'. Nel caso che la concentrazione iniziale fosse troppo piccola o l'intensità della corrente troppo grande perchè sia rigorosa la semplificazione introdotta, si potrà calcolare una correzione, tenendo conto del secondo termine della serie $\frac{1}{3}\left(\frac{h}{c_0}\right)^3$.

Per dedurre la seconda relazione che ci è necessaria fra n e D', consideriamo lo stato variabile della concentrazione quando si interrompe la corrente i. Cominciando a contare il tempo da quell'istante, si dovrà cercare una soluzione dell'equazione differenziale (2) soddisfacente alle condizioni:

(10) $$\left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \text{e} \quad \left(\frac{dc}{dx}\right)_{x=L} = 0 \quad \text{per ogni tempo}$$

e $c = c_s$ per $t = 0$ (vedi eq. 6).

Procedendo con noti metodi analitici, si ottiene la seguente soluzione del problema:

(11) $$c = c_0 - \frac{L}{\pi^2} i \frac{\varepsilon(1-n)}{D'} \frac{L}{q} \left\{ e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't} \cos.\frac{\pi}{L}x + \frac{1}{9} e^{-9\frac{\pi^2}{L^2}D't} \cos\frac{3\pi}{L}x + \cdots \right\}$$

Osserviamo ora che i termini successivi della serie vanno rapidamente decrescendo e che basterà un tempo non molto lungo, perchè tutti i termini siano trascurabili innanzi al primo. Allora la concentrazione si potrà rappresentare con un'equazione della forma:

$$c = c_0 \quad \text{Cost.}\, e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't} \cos.\frac{\pi}{L}x.$$

Ai due elettrodi la concentrazione sarà quindi:

$$(c)_{x=0} = c_0 - \text{Cost.}\, e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't} \quad \text{e} \quad (c)_{x=L} = c_0 + \text{Cost.}\, e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't}$$

Procedendo come per il caso della concentrazione stazionaria, si dimostra che la forza elettromotrice fra i due elettrodi sarà data dalla formula:

(12) $$E = \text{cost.}\, e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D't}.$$

Formando il decremento logaritmico per l'intervallo di tempo Δt si deduce:

$$\ln \frac{(E)_t}{(E)_{t+\Delta t}} = \frac{\pi^2}{L^2} D' \Delta t. \tag{13}$$

Quest'equazione ci permette di calcolare il valore del coefficiente D' ed in seguito mediante la (9) il valore di n.

Nel caso poi dell'elettrolito completamente dissociato, si ha per la definizione stessa dei numeri di trasporto:

$$n = \frac{U}{U+V}; \tag{14}$$

ed anche secondo Nernst (Theoretische Chemie, pag. 258):

$$D' = \frac{2UV}{U+V} RT. \tag{15}$$

Si possono quindi calcolare le mobilità U e V dei ioni. Naturalmente tutte le quantità che si incontrano in queste formule si devono esprimere nello stesso sistema di unità.

Esempio sperimentale. — Una serie sistematica di misure intraprese con questo metodo non potrà essere pubblicata che fra breve tempo. Possiamo intanto come esempio considerare una determinazione eseguita su solfato di zinco fra elettrodi di zinco amalgamati. La superficie di ognuno dei dischi in contatto coll'elettrolito era di 63,5 cm^2; lo spessore dello strato liquido era di 0,2 cm. La concentrazione iniziale della soluzione di solfato di zinco era $\frac{1}{10000}$ della normale. La forza elettromotrice stazionaria ottenuta facendo attraversare l'elettrolito dal basso in alto da una corrente di intensità di 4,94 10^{-5} amp. era di 0,024 volta. La temperatura era di 23° cent., quindi T = 296. Si deduceva quindi dalla formula (9):

$$\frac{(1-n)^2}{D'} = \frac{0{,}024 \,.\, 63{,}5 \,.\, 10^3 \,.\, 2}{0{,}0000866 \,.\, 294 \,.\, 4{,}94 \,.\, 0{,}2 \,.\, 1{,}036} = 1{,}175 \,.\, 10^5.$$

Il valore medio del decremento logaritmico era 0,0710, quindi il valore del coefficiente D' era secondo la formula (13):

$$D' = 0{,}0710 \frac{0{,}04}{9{,}87} \frac{1}{60} = 4{,}8 \; 10^{-6}.$$

Si deduce quindi:

$$n = 0{,}252 \qquad 1 - n = 0{,}748.$$

I valori delle mobilità U e V dedotti dalle equazioni (14) e (15), esprimendo tutte le diverse quantità nello stesso sistema di unità, in modo da avere le mobilità assolute secondo Kohlrausch (vedi Nernst, Theoretische Chemie, pag. 359) sono:

$$U = 25{,}4 \, . \, 10^{-13} \qquad V = 75{,}3 \, . \, 10^{-13}$$

Per passare dai valori di queste mobilità assolute ai valori delle mobilità relative u e v, ordinariamente impiegati, basterà ricordare le relazioni:

$$U = u \, . \, 1{,}036 \; 10^{-13} \qquad V = v \, . \, 1{,}036 \; 10^{-13}.$$

Si ricaverà così:

$$u = 24{,}6 \qquad v = 72{,}9$$

Questi valori concordano sufficientemente con quelli dedotti dalle misure, eseguite separatamente, della conducibilità molecolare e dei numeri di trasporto. Mi riservo di dare prossimamente i risultati sperimentali di molte misure intraprese per diversi sali e diversi metalli.

Fisica. — *Determinazione del potenziale elettro-statico mediante la deformazione d'una superficie liquida* (1). Nota del dott. Camillo Carpini, presentata dal Socio Blaserna.

Una superficie liquida conduttrice si deforma quando, dal di sopra, si avvicini ad essa un corpo elettrizzato. È nota la natura di tale deformazione quando la superficie del liquido conduttore ed in comunicazione col suolo è indefinita, il corpo elettrizzato una sfera, ed il sollevamento del liquido al disotto della sfera è tale da potersi ritenere non alterata la distribuzione elettrica che si avrebbe se il liquido fosse impedito di muoversi. Se indichiamo un a il raggio della sfera, con E il suo potenziale, con c la distanza del centro della sfera dalla sua immagine rispetto alla superficie del liquido, la cui densità è d, con g il valore della gravità, e con ϱ il raggio di curvatura della superficie liquida deformata nel suo punto ombelicale, si ha la seguente relazione (2):

$$E^2 = \frac{\pi g d}{3c^2} \, \frac{a^6}{A^2_1 \; HK} \, \frac{1}{\varrho} \tag{1}$$

essendo:

$$H = 4 \, \frac{a^3}{c^3} \sum_0^\infty \frac{A_{n+1} + A_n}{(A_{n+1} - A_n)^2} + \sum_0^\infty \frac{A_{n+1}}{\left(A_{n+1} \dfrac{c^2}{2a^2} - (A_{n+1} + A_n)\right)^2},$$

$$K = 16 \, \frac{a^5}{c^5} \sum_0^\infty \frac{(A_{n+1} + A_n)^3}{(A_{n+1} - A_n)^4} + \frac{c^2}{a^2} \sum_0^\infty \frac{A^3_{n+1}}{\left(A_{n+1} \dfrac{c^2}{2a^2} - (A_{n+1} + A_n)\right)^4},$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.
(2) A. Sella, R. Accademia Lincei. Luglio 1900.

ove:

$$A_n = i_1^n - i^n$$

$$i_1 = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1} \qquad i = \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1}$$

$$g = \frac{c^2 - 2a^2}{a^2}$$

Il Sella ha proposto di utilizzare la formula precedente per la determinazione del potenziale elettro-statico d'un corpo elettrizzato, ed io ho cercato di stabilire entro quali limiti, adoperando i mezzi comuni da laboratorio, si potesse praticamente applicare questo metodo di misura di potenziali elevati.

Le grandezze da determinarsi sperimentalmente sono: il raggio della sfera, la distanza del bordo inferiore della sfera dalla superficie libera del liquido, la densità di questo, ed il raggio di curvatura; quest'ultima è certamente la più importante, e la determinai mediante il *metodo ottico dell'Astigmatismo* di un fascio omocentrico riflesso. Per vedere con quale approssimazione determinavo tale raggio, e dentro quali limiti il metodo potesse essere applicabile, mi sono servito di superficie a curvatura nota, cioè della curvatura dei menischi mercuriali in tubi cilindrici di diverso diametro. Le formule della capillarità danno il raggio di curvatura della superficie del menisco in funzione di grandezze misurabili, cioè il diametro del tubo, la costante di capillarità del mercurio, e l'angolo di raccordamento della superficie del mercurio colle pareti del vetro in presenza di aria. Indicando con l il diametro del tubo, con a la costante di capillarità, e con φ l'angolo di raccordamento, si ha [1]:

$$(2) \qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{2}\, a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi l}\ \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{-\frac{l}{a} - 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right)}$$

Il metodo dell'Astigmatismo consiste in questo: si fa cadere un fascetto elementare luminoso nel punto ombelicale della superficie riflettente, e si accoglie il fascetto riflesso in un cannocchiale, che permette misurare le distanze s' e t' delle due linee astigmatiche dalla superficie riflettente; misurando l'angolo i d'incidenza del raggio principale del fascetto sulla superficie riflettente, si determina ϱ mediante la formula [2]:

$$\varrho = 2\,\frac{s't'}{s' - t'}\,\mathrm{sen}\, i\ \mathrm{tang}\, i$$

Mi sono servito d'un cannocchiale a scala da laboratorio, ed ho veduto che il metodo può essere utilizzabile (con i mezzi da me adoperati) fino al limite massimo di m. 8; oltre il quale non mi fu possibile sperimentare, perchè le linee di astigmatismo diventano incerte. Da diverse serie di espe-

[1] Mathieu, *Théorie de la capillarité*, pag. 160.

[2] Winkelmann, Handbuch der Physik, vol. 2.

rienze eseguite in condizione di migliore quiete, e con mercurio purificato ogni volta di recente, ho avuto i seguenti risultati:

Diametro tub.	Raggio osservato	Raggio calcolato
mm. 23,22	cm. 45,41	cm. 45,80
26,62	109,55	109,48
31,48	355,19	386,40
34,47	839,30	842,60

Nel calcolo del raggio con la (2), ho preso per le costanti i seguenti valori:

$$a^2 = 3{,}263 \qquad \varphi = 36^\circ\, 28'$$

Il liquido conduttore era l'olio di olivo, di densità eguale a 0,917, il quale sebbene coibente per fenomeni elettro-dinamici, si comporta alla superficie come un conduttore per fenomeni elettrostatici (1); era contenuto in un vetro orizzontale di cm. 40 per 40, avente i bordi di paraffina spalmata di silicato di potassa e dell'altezza d'un centimetro. L'olio si manteneva in assoluta quiete perchè riposava sopra una colonna di granito, e lavoravo in una delle stanze buie della cantina dell'Istituto Fisico.

Per caricare la sfera mi servii d'una macchina elettrostatica a caduta di acqua, di Lord Kelvin; una delle sue armature comunicava con un piccolo condensatore, l'altra con un elettrometro del Righi, il cui ago di alluminio era posto molto vicino alla coppia superiore di quadranti, per renderlo sensibile a piccole variazioni del potenziale; il filino di argento che lo sosteneva era della lunghezza di cm. 12 e del diametro di mm. 0,03.

La natura della ricerca esigeva la costanza del potenziale durante il tempo necessario per l'esatta misura delle due grandezze s' e t', cioè per lo spazio di circa cinque minuti. Trovai utile, dopo varî tentativi, intercalare tra il polo della macchina e l'elettrometro un filo di cotone di cm. 80 di lunghezza, e di porre in comunicazione con l'elettrometro le armature interne di due condensatori; talvolta aggiunsi una punta in comunicazione con l'elettrometro, affacciata ad un'altra in comunicazione col suolo. Mediante queste cautele, e sorvegliando sopra tutto il getto liquido che caricava il polo utilizzato della macchina, riuscivo a tener relativamente fermo l'elettrometro per circa cinque minuti, ed in ogni caso a dargli un andamento lento e regolare.

La sfera, che comunicava direttamente con l'elettrometro mediante un filo di rame spoglio, era di ottone; fu costruita con ogni cura dal sig. Squarzanti, meccanico dell'Istituto fisico. Le misure del diametro fatte con un catetometro, il cui nonio da il cinquantesimo di millimetro, hanno dato il valore mm. 59,64, con uno scartamento massimo di mm. 0,04. Era sostenuta sopra al liquido dà un anello di filo di rame poco più piccolo dell'equatore della sfera, che era collegato a tre fili dello stesso diametro raccomandati

(1) Vedi per es. Bouty, Compt. Rend. t. 129, pag. 152, 1889.

ad un robusto isolante di zolfo fuso, collegato con un solido sostegno masticiato ai piedi. In tal modo la distribuzione dell' elettricità sulla sfera nella parte affacciata al liquido, la quale maggiormente influisce nel fenomeno, subisce delle leggerissime alterazioni dalla distribuzione che si avrebbe se la sfera fosse isolata, e quindi trascurabili.

Per determinare il valore di c, misuravo la distanza tra il liquido conduttore ed il bordo inferiore della sfera, conoscendosi già il raggio di questa. Disponevo sopra al liquido una vite micrometrica, terminata in punte bene affilate, in posizione verticale, guardandone l' immagine riflessa nella superficie del liquido in due posizioni ad angolo retto; facevo poscia affiorare la punta inferiore con la superficie dell' olio, e puntavo con il cannocchiale del catetometro la punta superiore; poscia puntavo il bordo inferiore della sfera, e togliendo dalla lunghezza della vite la differenza delle due letture precedentemente fatte al catetometro, ottenevo la distanza tra il bordo inferiore della sfera ed il liquido. Il massimo scartamento ottenuto da ripetute letture della medesima distanza è stato di mm. 0,04. Siccome nella (1) tale distanza comparisce alla sesta potenza, così era estremamente importante di vedere se essa si mantenesse costante durante il corso dell'esperienza. Le piccole variazioni di temperatura (4° al massimo) e la stabilità del sostegno hanno reso tali variazioni trascurabili, come ho potuto rilevare da una serie di misure fatte nella spazio di due giorni in condizioni differenti.

Per vedere con quale approssimazione restasse così determinato il potenziale ho seguito il seguente criterio: determinavo il valore del raggio di curvatura quando l' elettrometro segnava sopra una scala graduata cinque determinate divisioni. Poscia variavo la distanza tra la sfera ed il piano e determinavo di nuovo il raggio di curvatura quando l' elettrometro segnava le stesse divisioni, cioè quando i potenziali erano quelli di dianzi. I valori del potenziale dedotti dalla (1) in entrambi i casi dovrebbero essere gli stessi. Tale operazione fu ripetuta per sette diverse distanze della sfera dalla superficie liquida; i risultati ottenuti, spingendo l'approssimazione delle serie H e K fino alla quarta cifra decimale, sono i seguenti:

Deviazione elettrometro	Distanza bordo inf. sfera mm.	3.98	4.23	4.26	4.86	5.13	5.19	5.56	Media
cm. 37	$\rho =$ cm.	78.7	97.3	100.0	154.0	185.0	190.0	234.5	
	E = Volt	1652.0	1654.0	1642.0	1623.0	1615.0	1629.0	1634.0	1635.6
32	$\rho =$	92.7	111.0	119.8	181.0	209.4	212.0	284.0	
	E =	1532.0	1539.0	1500.0	1500.0	1512.0	1542.0	1482.0	1515.3
27	$\rho =$	112.0	141.7	142.2	220.0	256.0	260.4	334.0	
	E =	1393.0	1362.0	1376.0	1333.0	1373.0	1392.0	1367.0	1370.9
22	$\rho =$	140.5	172.3	176.0	285.0	310.9	311.0	402.0	
	E =	1244.0	1235.0	1238.0	1246.0	1245.0	1273.0	1247.0	1246.8
17	$\rho =$	192.0	223.0	226.0	384.0	428.5	418.5	512.0	
	E =	1064.0	1086.0	1092.0	1083.0	1062.0	1098.0	1105.0	1084.3

Gli scartamenti massimi dal valore medio sono compresi tra 30 e 19 Volt, e rientrano nel limite dell' errore calcolato con la (1), ove si suppongano c, φ determinate con l' approssimazione che abbiamo stabilita.

La (1) vale nel caso che la distribuzione elettrica non venga alterata dalla deformazione; ho calcolato che il massimo sollevamento, avutosi quando la distanza tra la sfera ed il liquido era di mm. 3,98, va da un massimo di mm. 0,0785 ad un minimo di mm. 0,0322; mentre il minimo sollevamento, avutosi per la distanza di mm. 5,56, va da un massimo di mm. 0,0375 ad un minimo di mm. 0,0171. Volendosi render conto di questo errore, si potrebbe diminuire il valore della distanza tra sfera e liquido della metà del sollevamento, e determinare il raggio di curvatura a questa nuova distanza; questa diminuzione varierebbe da un massimo di mm. 0,0392 ad un minimo di mm. 0,0085; si vede adunque che al potenziale massimo di 1635 Volt, ed alla minima distanza tra sfera e liquido da me adoperata, il sollevamento diventa già comparabile con l' errore di osservazione della suddetta distanza, e quindi siamo al limite inferiore delle distanze adoperabili ed al massimo potenziale, ove si voglia trascurare il sollevamento del liquido perchè di ordine inferiore all' approssimazione con cui si determina la precedente distanza.

La deformazione della superficie libera del liquido dovuta all' attrazione newtoniana fra sfera e liquido, è trascurabile [1]; infatti nel caso più favorevole della minima distanza della sfera dal liquido si avrebbe un raggio di curvatura di km. 3107 ed un sollevamento del liquido dell' ordine del millesimo del micron.

Risulta adunque dalla presente ricerca che la formula (1) applicata alla determinazione del potenziale elettro-statico dei corpi elettrizzati, con i mezzi da me adoperati, garantisce una approssimazione del 2 $^0/_0$ circa.

Il metodo può applicarsi a potenziali più elevati con vantaggio, perchè l' errore relativo di osservazione della distanza tra sfera e liquido va diminuendo, potendosi allontanare la sfera dalla superficie del liquido pur mantenendo il raggio di curvatura nei limiti da me assegnati, e quindi restando costante l' errore relativo di esso; non si presta a più bassi potenziali, perchè l' errore relativo della suddetta distanza va aumentando rapidamente, e per di più le serie H e K non sono più molto convergenti.

Risultati migliori si potranno avere quando si abbia cura di migliorare il metodo dell' Astigmatismo, servendosi d' un cannocchiale a lungo foco, e del quale si conoscono le costanti ottiche; e quando la distanza tra sfera e liquido venga determinata con approssimazione maggiore.

Ringrazio vivamente il prof. Alfonso Sella, che mi iniziò e diresse nella presente ricerca.

(1) Gerschun, Journal de Physique, 1901; Sella, Archives des Sciences de Genève, 1900.

Fisica. — *Sulla misura delle variazioni e del valore assoluto della pressione atmosferica mediante il ludione.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

I metodi che sono stati proposti per dedurre le variazioni della pressione atmosferica da quelle del volume d'una certa quantità d'aria sottoposta a questa pressione, credo che possano ridursi ai tre seguenti:

1°. Osservazione diretta di questa variazione di volume, l'aria essendo contenuta in una bolla comunicante con un tubo quasi capillare, nel quale si trova una colonnetta liquida che separa quest'aria dall'aria esterna e che coi suoi spostamenti indica e misura le variazioni di volume.

2°. Osservazione della variazione della spinta che subisce quest'aria, essendo la medesima contenuta in un ludione, o campanella, il quale è immerso in un liquido ed è foggiato e galleggia a guisa d'areometro, oppure va a fondo ed è appeso al braccio d'una bilancia di qualsiasi specie.

3°. Misura con un manometro ad aria libera, p. es. ad acqua, della pressione positiva o negativa che bisogna aggiungere alla pressione atmosferica, perchè la pressione risultante riconduca il volume o la spinta suddetta a un valore costante, corrispondente p. es. alla pressione media locale. In tal modo le indicazioni del manometro danno direttamente le deviazioni della pressione atmosferica dalla pressione media suddetta; non occorre nessun calcolo, nessuna determinazione preliminare, nessun confronto con un altro barometro.

Questi metodi danno solo le variazioni della pressione atmosferica, i primi due in misura relativa, prendendo come unità la pressione stessa, il terzo in misura assoluta; dividendo il valore $H'-H$ ottenuto col 3° metodo per quello ottenuto simultaneamente con uno dei primi due metodi cioè $(H'-H):H$, si avrebbe il valore assoluto della pressione stessa.

Un'altra categoria di metodi si propone di determinare questo valore assoluto, deducendolo dalla variazione di volume che produce nella suddetta quantità d'aria una conveniente e nota variazione di pressione prodotta artificialmente; se V, V', sono i volumi dell'aria alle pressioni H, H' si ha: $H=\frac{H'-H}{V-V'}V$.

Questa misura si può effettuare in tre modi che corrispondono ai tre precedenti, cioè:

4°. Osservazione diretta della variazione di volume dell'aria.

5°. Osservazione della variazione che subisce la spinta che il liquido esercita su di essa aria.

6°. Misura con un manometro della pressione che bisogna aggiungere o togliere alla pressione atmosferica per produrre una nota e conveniente variazione del volume e della spinta, o viceversa.

Il 1° ed il 2° metodo sono stati applicati, certo in condizioni di poca esattezza, fino dal secolo XVIII; inoltre sul 1° metodo è fondato il così detto « barometro svizzero » formato da un bulbo munito di un tubo quasi capillare con indice liquido e circondato di ghiaccio. Recentemente l'uso del 2° metodo è stato proposto quasi contemporaneamente da Barus (American Journal of Science, 1900), da Fischer (Drude, Annalen der Physik, 1900), e da me (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1900), che avevo accennato a tale uso ed alle mie esperienze in proposito alla fine del 1899 in una annotazione nella Nota sugli areometri ad inclinazione variabile.

Nelle due precedenti Note sull'uso del ludione ecc., ho descritto i metodi 3°, 5° e 6° che credo affatto nuovi, ed alcune modificazioni del 2° metodo che credo pure nuove ed utili. Ho continuato in seguito lo studio di questi metodi, ed ho semplificato l'apparecchio occorrente per il 3° e 6° metodo in modo da renderlo facile a costruire e ad usare, autonomo ed esatto; esso verrà descritto in una prossima Nota.

Nella presente Nota descrivo alcune serie di esperienze relative ai modi di evitare le variazioni della quantità d'aria del ludione. Quando la temperatura cresce, la solubilità dell'aria nel liquido nel quale è immerso il ludione diminuisce, ed una parte dell'aria disciolta si sviluppa lentamente, mentre l'opposto avviene se la temperatura decresce. Inoltre, siccome il livello del liquido nel ludione è più basso di quello esterno, l'aria del ludione trovandosi ad una pressione alquanto maggiore di quella esterna, si scioglie in maggior proporzione e per diffusione lentamente sfugge verso l'esterno.

Ne risulterebbero così variazioni del volume dell'aria, che erroneamente si attribuirebbero a variazioni della pressione, che sarebbero difficili da calcolare e che perciò bisogna evitare o render minime.

Il mantenere l'apparecchio indefinitamente nel ghiaccio, senza interruzione, eviterebbe questa causa d'errore; invece il portare l'apparecchio a 0° ogniqualvolta lo si vuol usare, che non sarebbe neppure comodo, e potrebbe aumentare l'errore suddetto per causa della grande variazione della solubilità dell'aria che ne risulta.

Nella 1ª Nota sull'uso del ludione ecc., ho indicato due modi per evitare o ridurre questa causa d'errore. Il primo, la cui efficacia è evidente ed è inoltre dimostrata dall'esperienze descritte più oltre, consiste nel separare l'aria dal liquido nel quale è immerso il ludione mediante uno strato o colonna di mercurio. L'altro modo, la cui efficacia in pratica non risultò così grande come era presumibile, consiste nell'usare una campanella terminata inferiormente con un lungo tubo capillare ripiegato ad elica o a spirale per economia di spazio, e nel diminuire tanto quanto è possibile il volume del liquido con-

tenuto nella campanella, evitando però che il suo livello possa giungere fino al tubo capillare quando, per l'azione combinata d'una temperatura elevata e d'una bassa pressione, l'aria avesse il volume massimo possibile.

In tal modo l'aria disciolta non può dall'esterno pervenire nell'interno del ludione o viceversa, che molto lentamente, per diffusione lungo il tubo capillare ed il poco liquido contenuto nel ludione non può nè sviluppare, nè assorbire che un volume proporzionatamente minimo di aria. Se V e v sono i volumi dell'aria e del liquido, s il coefficiente di solubilità, $\frac{ds}{dt}$ la variazione media per grado di questo coefficiente, se la temperatura cresce o decresce di t^o, verrà svolto o assorbito un volume relativo di aria $\frac{v}{V}\frac{ds}{dt}t$. Se $\frac{v}{V}$ è piccolo, siccome s è di solito molto piccolo, $\frac{ds}{dt}$ sarà notevolmente minore e si può ritenere che per le piccole e passeggiere variazioni di temperatura. il volume suddetto sia trascurabile, e per le variazioni di temperatura maggiori e più persistenti, quali si verificano nel passaggio dall'inverno all'estate, si potrebbe calcolare la piccola correzione relativa. Tuttavia le esperienze che ho eseguito finora con ludioni immersi nell'acqua, nella chinolina e nella nitrobenzina non confermano che imperfettamente queste previsioni favorevoli.

Esperienze sul ludione con mercurio, senza compensazione termica, immerso nella nitrobenzina. Questo ludione aveva la forma di un piccolo barometro Gay-Lussac, alto solamente 10 cm. ma con tubi molto larghi, di 1,90 cm. di diametro. Il ramo chiuso era quasi completamente pieno d'aria, una colonna di mercurio occupava il tubo capillare di comunicazione fra i due rami e la parte inferiore di questi, e la quantità di mercurio era così scelta che il suo livello non abbandonasse mai la parte cilindrica dei medesimi; inoltre esso era sormontato da un piccolo uncino, era immerso completamente in una bottiglia a collo largo (o in una provetta) piena di nitrobenzina ed immersa a sua volta in un grosso bicchiere da pile pieno d'acqua; all'uncino era fissato un filo d'argento di 0,1 mm. di diametro di lunghezza invariabile, che poteva esser appeso al braccio d'una bilancia.

Il modo più semplice e più diretto (e che ritengo per molti rispetti preferibile) per graduare questo strumento, è quello di determinare il peso apparente del ludione a due o più profondità diverse e note, facilmente ottenibili sia col sollevare o abbassare il recipiente mentre il ludione è appeso a distanza invariabile dal braccio della bilancia, sia aggiungendo o togliendo liquido dal recipiente stesso. Così pure si potrebbero determinare direttamente le variazioni del peso suddetto causate da note variazioni di temperatura.

Mi parve però più persuasivo e perciò più conveniente per lo scopo di queste esperienze, di dedurre queste variazioni col calcolo, determinando prima

il peso ed il volume del vetro e del mercurio, la densità della nitrobenzina, ottenendo dalle Tavole o con apposite esperienze i relativi coefficienti di dilatazione termica. Si può così calcolare il peso apparente del vetro e del mercurio nella nitrobenzina a qualsiasi temperatura e quindi determinato coll'esperienza il peso apparente del ludione, si può per differenza ricavare il peso apparente dell'aria e quindi il suo volume. Si potrebbe quindi colle note leggi calcolare le variazioni di questo volume per date variazioni della pressione della temperatura o viceversa; nel caso attuale ho creduto preferibile e altresì più comodo ricondurre il volume suddetto a una pressione ed una temperatura costante, e dimostrare che il volume ridotto risulta costante.

Come si vede e come apparirà meglio in seguito, le operazioni ed il calcolo preliminari sono senza confronto più lunghe e più minute che non nel metodo empirico suddetto, la maggior parte delle determinazioni preliminari non può essere verificata senza distruggere o scomporre lo strumento, ed un errore in qualcuna di esse renderebbe inutile il resto del lavoro. Nel calcolo del volume ridotto, tuttavia, un simile errore influisce quasi ugualmente in tutte le determinazioni e la sua importanza è grandemente diminuita.

Siano p e v_t il peso ed il volume del vetro, p' ed u_t il peso ed il volume del mercurio, ∂_t la densità della nitrobenzina, e π_t il peso apparente del vetro col mercurio nella nitrobenzina, il tutto a t^0, sarà evidentemente:

$$\pi_t = p + p' - (v_t + u_t)\,\partial_t$$

Se A ed a sono i coefficienti di dilatazione veri a t^0 del complesso vetro-mercurio e del liquido, il peso apparente a θ^0 sarà:

$$\begin{aligned}\pi_\theta &= p + p' - (v_\theta + u_\theta)\,\partial_\theta \\ &= \pi_t + (v_t + u_t)\,\partial_t\,(a - \mathrm{A})\,(\theta - t).\end{aligned}$$

Questa relazione dà il modo di calcolare, mediante una piccola correzione, il peso apparente del vetro e mercurio a θ quando è noto, sia dalla formula precedente, sia per una determinazione diretta il peso apparente a t^0.

Inoltre se q è il peso apparente del ludione a θ, V_θ il volume dell'aria, ε il suo peso, ∂_θ la densità della nitrobenzina, α il coefficiente di dilatazione vero a θ di quest'aria sarà:

$$q = \pi_\theta + \varepsilon - \mathrm{V}_\theta\,\partial_\theta \quad , \quad \mathrm{V}_\theta = \frac{\pi_\theta + \varepsilon - q}{\partial_\theta}$$

$$\mathrm{V}_t = \frac{\pi_\theta + \varepsilon - q}{d_t[1 + (a - a)(\theta - t)]}$$

Può esser utile conoscere il coefficiente di dilatazione a pressione variabile dell'aria del ludione; se V, H, T sono il suo volume, la sua pressione, la sua temperatura assoluta, se v è l'aumento di volume dell'aria quando la temperatura diviene $\mathrm{T} + 1^0$, se $x = v : \sigma$ è l'abbassamento del livello del

mercurio in un ramo e l'innalzamento nell'altro ramo, essendo σ la sezione interna per entrambi i rami, si avrà:

$$\frac{VH}{T} = \frac{(V+v)(H+2v:\sigma)}{T+1}$$

ossia, trascurando il quadrato di v:

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{T}\,\frac{H}{H+2V:\sigma} = \frac{1}{T}\,\frac{H}{H+2H_1}$$

donde risulta che il coefficiente di dilatazione dell'aria del ludione $\frac{v}{V}$, è uguale al coefficiente a pressione costante $\frac{1}{T}$ moltiplicato per il fattore $H/(H+2H_1)$, essendo H_1 l'altezza dell'aria in un cilindro retto di sezione σ.

Così pure la variazione di volume che subisce l'aria del ludione per una piccola variazione della pressione esterna, è uguale a quella che subirebbe l'aria libera moltiplicata per il fattore $H/(H+2H_1)$. In altre parole le piccole variazioni della pressione trasmesse all'aria attraverso ad un tubo ad U contenente mercurio, vengono diminuite nel rapporto di $H+2H_1$ ad H.

Tuttavia per avere la pressione dell'aria del ludione non ho fatto uso di questa proprietà; la pressione suddetta è certamente uguale alla pressione atmosferica aumentata della pressione dello strato di nitrobenzina che trovasi al disopra del livello esterno del mercurio diminuita dalla differenza di livello del mercurio stesso e corretta per la variazione di questa differenza; se V e V' sono i volumi dell'aria (dati direttamente dall'esperienza) $2(V-V')/\sigma$ sarà il valore corrispondente di questa variazione.

Ho preferito ridurre i pesi apparenti del ludione ed i volumi dell'aria a t^0, una temperatura media, anzichè a 0^0 per diminuire i termini di correzione pei quali basta così anche un valore approssimativo di A, a ed α.

Per la stessa ragione non ho fatto uso del metodo di compensazione termica descritto nella Nota citata, facendo uso cioè di un volume di vetro conveniente, all'incirca triplo di quello dell'aria. In tal caso avrei dovuto o ricorrere alla graduazione empirica che non credevo conveniente di usare, oppure eseguire una determinazione preliminare accuratissima dei coefficienti di dilatazione del vetro e della nitrobenzina adoperati, ed inoltre i possibili errori dovuti a ciascun metodo o alla sua imperfetta applicazione si sarebbero sovrapposti e sarebbe stato impossibili separarli. Perciò cercai invece di ridurre il più possibile i volumi del vetro e del mercurio.

Nel primo ludione da me adoperato, il peso del vetro era di 13,8220 gr. quello del mercurio gr. 72,7030, i rispettivi volumi erano a 26°,6 cm³ 5,5220 e cm³ 5,3725, e la densità della nitrobenzina era 1,1963. Quindi la spinta

subìta dal vetro col mercurio era di gr. 13,0310 a 26°,6 e variava di — 9,71 mgr. per una variazione di + 1° nella temperatura. Inoltre la profondità del livello esterno del mercurio durante la pesata era di mm. 118,5 equivalenti a mm. 10,46 di mercurio. Il dislivello del mercurio nel ludione era di mm. 39,6 nell'aria, ma nella nitrobenzina alla profondità suddetta cresceva secondo la formula suddetta di mm. 1,2, e deducendo la pressione esercitata dalla nitrobenzina, risulta che l'aria del ludione inizialmente era ad una pressione di 30,3 mm. inferiore a quella atmosferica; aumentando il volume dell'aria di v, il dislivello suddetto decresceva di $2v : 3,8$ cm. essendo 3,8 cm² la sezione interna dei rami del ludione. I coefficienti di dilatazione del vetro e della nitrobenzina determinati appositamente alla temperatura dell'esperienza, erano 0,000027 e 0,000848, e come coefficiente di dilatazione dell'aria nel ludione presi 0,003350, intendendo per coefficiente di dilatazione il rapporto $(v_{t+1} - v_t) : v_t$ e facendo largo uso di approssimazioni.

Nella seguente tabella trovasi nella 1ª colonna la pressione atmosferica H, nella 2ª la temperatura t della nitrobenzina e dell'aria, nella 3ª la pressione H′ dell'aria del ludione (ossia $H - 30,8 \pm \frac{v}{3,8}$ cm.), nella 4ª la spinta q subita dall'intero ludione, nella 5ª colonna il volume V dell'aria ridotto a 26°,6 e a 760 mm., ma moltiplicato per il fattore costante 1,1963.

H	t	H′	q	Vd
754,2	25,70	724,08	31,5818	17,706
753,8	26,00	723,76	31,5973	17,703
754,0	26,37	724,1	31,6030	17,703
755,1	25,13	724,75	31,5340	17,696
755,8	24,51	725,27	31,4987	17,702
754,6	25,87	724,46	31,5727	17,700
756,3	23,98	756,61	31,4683	17,695
753,6	23,40	723,32	31,5055	17,695
753,5	25,23	723,33	31,5733	17,696
754,3	23,38	723,68	31,4948	17,704

Non essendo molto contento del modo di funzionare di questo ludione, che essendo molto pesante spesso si rovesciava e nel quale il mercurio aderiva molto al vetro e la sua superficie cambiava evidentemente di forma, ne costruii un altro più leggero, ed ebbi cura di pulire con acido nitrico bollente il suo interno, e di riempirlo d'aria secca, collocandolo sotto una piccola campana pneumatica, facendo ripetutamente il vuoto e lasciando rientrare aria attraverso l'acido solforico.

In questo ludione alto circa 8 cm., il peso del vetro e del mercurio era di gr. 8,0128 e gr. 50,4316 ed il volume rispettivo a 26°,6 era di cm³ 3,2013 e cm³ 3,6950; il coefficiente di dilatazione medio era 0,0001094, la spinta nella nitrobenzina gr. 8,2510 a 26°,6 e variava di — 6,0 mgr. per una variazione di + 1° nella temperatura.

Inoltre la profondità del livello esterno del mercurio era di 86,0 mm. pari a 7,6 mm. di mercurio, ed il dislivello del mercurio a tale profondità era di 34,2 mm. da cui vanno dedotti i suddetti 7,6 mm.

H	t	H′	q	Vd
754,6	25,8	728,38	20,8423	12,087
756,2	24,15	729,65	7772	086
754,28	26,02	728,11	8522	087
753,4	25,20	727,19	8482	0875
754,24	23,3	727,72	7887	086
755,0	25,25	726,68	8239	088
755,95	23,02	729,28	7565	088
755,67	25,61	729,35	8207	0875
756,5	23,5	729,85	7577	086
755,54	26,12	729,28	8322	084
756,75	24,73	730,23	7812	085
755,73	26,37	729,5	8360	086

Il modo di procedere in queste determinazioni era il seguente. Alcuni minuti prima della determinazione agitavo l'acqua del bagno e la nitrobenzina, poi agitavo nuovamente, osservavo la temperatura della nitrobenzina con un termometro Baudin diviso in decimi di grado, portavo il bicchiere dentro la bilancia, vi appendevo il ludione ed eseguivo la pesata. Quindi andavo ad osservare la pressione atmosferica nel barometro Fortin del contiguo Osservatorio meteorico, ripetevo la pesata, toglievo il bicchiere, osservavo la temperatura. Prendevo la media dei due pesi e delle due temperature pochissimo differenti. Le determinazioni venivano eseguite due volte al giorno, al mattino verso le dieci e nel pomeriggio verso le diciotto, affinchè le temperature fossero per quanto era possibile diverse e costanti. Entrambe le serie vennero eseguite nella 1ª metà dell'agosto del 1901.

Apparisce da queste tabelle e specialmente dalla seconda che l'aria del ludione conserva un volume sensibilmente costante, a parità di condizioni, e che si dilata e contrae secondo le note leggi, senza che appaia l'influenza di errori qualsiasi.

Si sarebbe potuto eseguire il calcolo inverso e determinare le variazioni della pressione, a partire da quella iniziale e s'otterrebbe una corrispondente concordanza coi valori dati col barometro Fortin. La massima differenza dal valor medio, che si osserva raramente nella 2ª tabella, per $V\partial$ salisce appena 1,5 diecimillesimi di questo valore e corrisponderebbe a un errore di circa 0,1 mm. nella pressione. È probabile che queste differenze siano dovute al ludione e causate probabilmente da un errore di capillarità, perchè nè gli errori nell'apprezzamento della temperatura, nè quelli della pesata sarebbero sufficienti a produrle; tuttavia è altrettanto probabile che esse siano dovute ad inesattezza del barometro a mercurio. Difatti l'errore di capillarità era sensibile anche in questo barometro, ed un'altro possibile errore può derivare da una differenza di temperatura fra il mercurio e il termometro applicato; la differenza di 1° sarebbe sufficiente a causare l'errore suddetto di 0,1 mm.

Il ludione che ha servito per la 2ª serie di esperienze è stato conservato intatto, nella nitrobenzina, e sarà ripesato fra pochi mesi per verificare se le sue indicazioni saranno comparabili a quelle antecedenti.

Ritengo che sia utile e pressochè indispensabile che il ludione sia formato con tubi più larghi di quelli da me usati, p. es. con tubi di 3 cm. di diametro, ma i miei tentativi per costruirli riuscirono vani, poichè a causa del fondo piatto, che ritenevo utile, essi poco dopo costruiti si ruppero. Sarebbe altresì utile far uso di ludioni larghi e bassi formati p. es. con un cristallizzatore di vetro sottile contenente uno strato di mercurio, ed un cristallizzatore di diametro minore e capovolto che funzionasse da campana; facendo comunicare per un istante l'aria interna coll'esterna mediante un tubo ricurvo, si eviterebbe il dislivello notevole del mercurio e le relative correzioni.

Fisica. — *Misure pireliometriche fatte a Sestola nell'estate del 1901.* Nota di Ciro Chistoni [1], presentata dal Socio Tacchini.

Fino dal 1899 ho intrapreso una serie di misure pireliometriche all'Osservatorio Geofisico di Modena, all'Osservatorio di Sestola ed a quello del Monte Cimone. Negli anni 1899 e 1900 ho fatto uso dell'attinometro di Violle; e nel 1901 avendo potuto ottenere un pireliometro a compensazione elettrica di K. Ångström, installai questo a Sestola, mentre a Modena ed al Monte Cimone si continuò ad usare dell'attinometro di Violle.

L'apparecchio su citato dell'Ångström e da esso proposto fino dal 1893, ha portato, a mio credere, una vera rivoluzione nel campo delle ricerche

[1] Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Geofisico di Modena, 15 gennaio 1902.

pireliometriche, poichè oltre che garantire l'esattezza delle misure è di maneggio facile, ed il calcolo per ottenere il risultato definitivo è, relativamente agli altri istrumenti di tal genere, di una grande semplicità.

Quantunque abbia già eseguiti i calcoli delle osservazioni fatte coll'attinometro di Violle, mi sono deciso a sospenderne la pubblicazione, fino a che, per mezzo di adatti confronti fra il pireliometro dell'Ångström e l'attinometro di Violle non abbia trovati i coefficienti necessari per ridurre i risultati di quest'ultimo a quelli ottenuti col pireliometro a compensazione elettrica, che si può giustamente chiamare pireliometro campione.

Per ora, rendo di pubblica ragione i risultati delle osservazioni fatte a Sestola nell'estate del 1901.

Il principio del pireliometro a compensazione elettrica è semplicissimo. Due striscie metalliche sottilissime e perfettamente uguali sono applicate parallelamente, ed alla distanza di alcuni millimetri ad una cornice di ebanite o di altra materia isolante. Le strisce sono annerite dalla parte che deve essere esposta al sole [1]; e dalla parte opposta stanno applicate le estremità saldate di un doppio elemento termoelettrico (diretto in opposto senso dall'una all'altra striscia) per mezzo del quale, valendosi di un sensibile galvanoscopio si può accertare se la temperatura delle due striscie è uguale, poichè in tal caso il galvanoscopio dovrà segnare *zero*.

Se una delle due striscie è esposta alla radiazione di una sorgente di calore, mentre, l'altra sta ombreggiata da un adatto schermaglio, il galvanoscopio mostrerà che la prima ha temperatura più elevata della seconda; e facendo passare lungo questa una corrente elettrica di intensità conveniente, si potrà ridurla ad avere la stessa temperatura della prima. In tale caso il galvanoscopio dovrà di nuovo segnare *zero*.

Se i è l'intensità della corrente in Ampères; r la resistenza per ogni centimetro in lunghezza delle due striscie, b la loro larghezza, a il potere assorbente della superficie delle striscie rivolta al sole, si avrà l'intensità della radiazione espressa da

$$q = \frac{ri^2}{4,19 . b . a} \text{ gr.-cal. per secondo e cm}^2.$$

oppure da

$$Q = \frac{60\, ri^2}{4,19 . b . a} \text{ gr.-cal. per minuto è cm}^2$$

I vantaggi del metodo dell'Ångström sono evidenti.

La temperatura delle due striscie, essendo la stessa, la radiazione di

[1] La descrizione completa dell'apparecchio ed il modo di preparazione e di annerimento delle striscie si trova in una memoria dell'Ångström pubblicata a pag. 633 e segg. del vol. 67 dei *Wied. Ann.* e a pag. 334 del vol. 9 dell'*Astrophysical Journal* (1899).

esse, la convezione e la conduttività sono anche le stesse e quindi a questo riguardo non fa di bisogno di correzione alcuna.

L'apparecchio che usai a Sestola porta il n. 19; ed è stato costruito dal meccanico sig. J. L. Rose di Upsala, sotto la direzione del sig. prof. Ångström, il quale con esemplare sentimento di colleganza volle gentilmente determinare anche i coefficienti del pireliometro.

Le striscie pireliometriche del n. 19 sono di manganina ed hanno la larghezza media di 0,1486 cm. — A 20° di temperatura la resistenza elettrica delle striscie è di 0.0682 Ohm per ogni centimetro di lunghezza ed il potere assorbente della loro superficie annerita, che deve essere esposta al sole, è 0,98. Il coefficiente termico relativo alla resistenza elettrica è 0,00045.

Posto adunque che la temperatura delle striscie sia 20°, la quantità di calore proveniente per irradiazione è

$$Q = \frac{0{,}0682 \times 60}{4{,}19 \times 0{,}98 \times 0{,}1486}\, i^2 = 6{,}71\, i^2.$$

Ponendo k funzione della temperatura θ, Q sarà espresso dalla

$$Q = k i^2 \text{ gr-cal. per minuto e cm}^2.$$

I valori di k per le diverse temperature delle striscie all'atto dell'osservazione sono i seguenti:

θ	k	θ	k
0°	6,65	20°	6,71
10°	6,68	30°	6,74
20°	6,71	40°	6,77

Non è necessario applicare la correzione dovuta al riscaldamento proveniente dal passaggio della corrente per le striscie pireliometriche. La temperatura θ, della quale è funzione k, è data da un termometro convenientemente collocato in prossimità delle striscie.

A Sestola (Lat. bor. 44°. 14′; long. E da Gr. 10°, 46′; 1020 metri sul mare) il pireliometro stava collocato nella casa comunale, sopra una mensola sporgente da una finestra esposta a mezzodì. Il galvanometro (fissato al muro maestro), la coppia elettrica necessaria per la corrente che deve passare per le striscie ed il milliamperimetro stavano nell'interno della stanza. Il milliamperimetro (n. 53352) è della Casa Siemens et Halske e venne opportunamente suntato, così da dare con precisione i decimi e frazioni di decimo di Ampères.

Le striscie assorbenti ed anche i termoelementi essendo piccolissimi, hanno piccolissima capacità calorifica e l' apparecchio raggiunge in breve tempo la temperatura stazionaria. Qualora avvenga che il galvanometro accenni a successive variazioni nella temperatura della striscia esposta al Sole, ciò significa che tra l' apparecchio ed il disco solare passano veli nuvolosi impercettibili, che rendono impossibile la misura.

In generale ogni valore dell' intensità i di corrente riportato nella unita tavola, è la media di quattro osservazioni successive, fatte esponendo per due volte al Sole ognuna delle due strisce. A rendere semplice l' operazione serve un commutatore elettrico applicato alla parte posteriore del pireliometro.

Lo stato del cielo in prossimità del disco solare si osservò mediante adatti vetri colorati.

Nelle unite tavole; l' ora è data in tempo medio dell' Europa centrale ed h esprime l' altezza del Sole al momento dell' osservazione. L' approssimazione in h è di circa due decimi di grado sessagesimale [1].

La colonna intestata B dà la pressione atmosferica in millimetri di mercurio a 0°; t esprime la temperatura dell' aria; f la forza elastica del vapore acqueo ed u l' umidità relativa dell' atmosfera.

Spero di poter fra poco riferire i risultati pireliometrici ottenuti nel 1901 a Modena ed al Monte Cimone, i quali potranno servire per la discussione dalle osservazioni contemporanee fatte nelle tre stazioni.

[1] Dato che a qualcuno necessitasse avere h con maggiore precisione, potrà calcolarla valendosi dell' ora che sta controsegnata e deducendo dalle effemeridi il valore della declinazione del Sole corrispondente al momento dell' osservazione. La latitudine di Sestola è, come dissi, 44°, 14′.

Sestola 1901.

Giorno	Ora	*h*	*θ*	*i*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Note*
12 luglio. . .	h m 10.15	° 56,8	23,5	0,4365	1,2808	676,9	17,0	6,5	45	⊙ libero; cielo bianchiccio
»	11.24	64,4	29,5	0,4370	1,2868	676,9	18,0	6,9	45	id.
15 » . . .	9.21	46,7	26,0	0,4555	1,3950	676,5	18,3	9,6	63	qualche Cu; ⊙ chiaro
»	9.30	48,8	28,0	0,4640	1,4498	676,5	18,7	10,4	65	id.
»	10. 0	52,7	28,0	0,4425	1,3185	676,5	19,0	10,6	65	id.
»	10.15	55,2	32,0	0 4440	1,3298	676,5	19,5	11,3	63	molti Cu; ⊙ chiaro
»	10.22	56,5	33,0	0,4640	1,4531	676,5	19,6	10,5	62	id.
»	12.21	67,4	32,5	0,4840	1,5807	676,5	20,0	11,0	61	qualche Cu; ⊙ bellissimo
17 » . . .	9.22	46,5	26,0	0,4450	1,3323	678,4	18,8	12,0	75	⊙ libero; cielo bianchiccio
»	10.22	56,3	29,0	0,4585	1,4163	678,5	18,8	11,8	74	id. qualche Cu
»	11.22	63,9	29,0	0,4600	1,4256	678,4	19,5	12,0	73	⊙ chiaro
»	12.22	67,0	30,0	0,4940	1,6448	678,3	22,0	13,7	70	id. qualche Cu
»	14.30	56,0	30,0	0,4475	1,3497	678,2	19,6	12,0	71	id.
»	15.22	46.5	32,0	0,4237	1,2111	678,4	19,6	11,6	67	⊙ con aureola bianca
18 » . . .	9.22	46,4	28,5	0,4430	1,3218	680,7	19,2	8,7	53	cielo bianchiccio
»	10.22	56,1	30,0	0,4187	1,1817	680,6	20,2	9,2	52	id.
»	11.22	63,8	30,5	0,4713	1,4974	680,4	21,0	9,7	52	id.
»	12.22	66,9	32,0	0,4192	1,1854	680,3	22,0	9,8	50	cielo sereno
»	15.22	46,4	30,0	0,4317	1,2561	679,9	23,0	9,5	46	id.
20 » . . .	9.22	46,2	30,0	0 4080	1,1220	677,1	21,0	11,2	61	cielo bianchiccio
»	10.22	55,9	30,0	0,4158	1,1651	677,0	22,8	12,4	59	id.
22 » . . .	9.25	45,9	26,5	0,4470	1,3446	676,0	20,8	11,8	67	molti Cu; ⊙ chiaro
23 » . . .	12.22	65,9	28,5	0,4418	1,3147	671,6	23,3	14,1	67	⊙ con aureola bianca
24 » . . .	9.22	45,6	29,0	0,4300	1,2457	671,3	17,4	8,8	58	⊙ chiaro
25 » . . .	9.22	45,5	24,0	0,4440	1,3251	673,6	18,8	8,1	50	⊙ bello
»	10.22	55,1	29,5	0,4375	1,2898	673,7	19,8	9,8	57	qualche Cu; ⊙ bello
»	14.22	55,1	31,0	0,4425	1,3202	673,7	19,2	9,9	60	grossi Cu
27 » . . .	9.22	45,2	23,5	0,4450	1,3308	674,6	18,0	5,1	33	cielo lucido
»	10.22	54,7	28,5	0,4485	1,3549	674,7	18,3	5,4	35	id.
»	11.22	62,1	30,0	0,4490	1,3588	674,9	19,8	5,4	33	id.
»	12.22	65.1	32,0	0,4540	1,3905	675,1	19,5	5,0	30	id.
»	13.22	62,1	32,5	0,4507	1,3706	675,2	19,7	5,1	30	id.
»	1422	54,7	34,0	0,4468	1,3479	675,2	20,0	5,4	32	id.
»	15.22	45,2	30,0	0,4410	1,3108	675,3	20,3	6,2	35	qualche Cu; ⊙ bello
»	16.22	34,7	29,0	0,4270	1,2283	675,3	20,8	5,5	31	⊙ bello
»	17.22	23,9	27,5	0,4140	1,1539	675,3	21,0	5.7	31	⊙ chiaro; cielo sereno
28 » . . .	9.22	45,0	25,0	0,4310	1,2493	676,2	19,5	8,6	52	Cu sparsi
»	10.22	54,5	32,0	0,4365	1,2853	676,3	20,7	10,2	57	cielo limpido
»	11.22	61,9	32,5	0,4378	1,2932	676,2	21,2	10,3	55	id.
»	12.22	64,9	33,0	0,4392	1,3018	676,3	22,7	10,8	53	Cu; cielo bianchiccio

Sestola 1901.

Giorno	Ora	*h*	*θ*	*i*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Note*
28 luglio. . .	h m 15.22	° 45,0	31,0	0,4330	1,2642	676,6	24,0	7,5	34	Cu; cielo bianchiccio e veli
1 agosto . .	9.22	44,3	25,4	0,4417	1,3122	674,9	17,4	7,3	50	Cu sparsi
»	10.22	53,8	31,0	0,4457	1,3395	675,0	18,4	7,8	48	id.
2 » . . .	9.22	44,2	25,0	0,4270	1,2262	672,6	18,0	10,0	66	id.
3 » . . .	9.22	44,0	28,9	0,4342	1,2700	675,6	18,4	8,9	57	cielo ser.; orizz. nebbioso
»	10.22	5[illegible],4	33,0	0,4412	1,3138	676,1	19,4	9,1	55	Cu all'orizzonte
»	11.22	60,6	34,0	0,4452	1,3380	676,1	20,5	9,0	50	qualche velo e strato
»	14.22	53,4	33,0	0,4380	1,2947	676,2	21,8	8,9	46	Cu e veli
»	15 22	44,0	32,8	0,4568	1,4082	676,2	22,7	5,1	42	id.
4 »	9.22	43,8	26,5	0,4272	1.2281	676,6	20,1	8,3	48	sereno
»	10.22	53,2	34,1	0,4352	1,2789	676,5	21,0	9,1	49	Cu sparsi
»	11.22	60,3	36,1	0,4340	1,2730	676,4	21,6	8,7	45	Cu all'orizzonte
5 » . . .	9.22	43,6	28,3	0,4265	1,2251	676,2	19,8	9,8	57	Cu sparsi
»	10.22	53,0	32,6	0,4370	1,2886	676,3	20,5	9,7	54	id.
»	11.22	60,1	35,0	0,4360	1,2841	676,4	20,7	9,0	50	id.
»	12.22	62,9	34,1	0,4385	1,2983	976,2	21,2	8,9	48	id.
»	13.22	60.1	36,1	0,4355	1,2818	676,4	21,4	9,3	48	id.
»	15.22	43,6	32,1	0,4205	1,1929	676,5	23,2	10,0	47	id.
»	16.22	33,2	31,0	0,4155	1,1641	676,6	24,7	10,4	46	id.
»	17.22	22,5	28,0	0,3808	0,9765	676,6	23,2	9,9	48	id.
7 » . . .	9.22	43,2	28,5	0,4172	1,1724	674,0	19,2	9,1	55	veli leggerissimi e Cu
»	10.22	52,6	33,0	0,4252	1,2202	674,0	19,8	8,5	50	id. aumentano i Cu
»	12.22	62,3	34,0	0,4452	1,3383	674,1	20,0	8,1	47	id. id. ⊙ chiaro
»	13.22	59,6	34,0	0,4450	1,3371	674,2	20,7	9,0	49	Cu sparsi
»	15.22	43,2	31,5	0,4310	1,2529	674,5	22,0	7,3	38	id.
»	16.22	32,8	30,0	0,4242	1,2128	674,7	21,5	6,7	35	id.
»	17.22	22,1	27,0	0,4105	1,1342	675,0	20,3	5,3	30	Cu solo all'orizzonte
8 » . . .	9.22	43,0	30,2	0,4227	1,2044	679,3	18,7	6,4	40	leggerissimi veli
»	10.22	52,3	30,0	0,4345	1,2724	679,4	19,7	7,2	42	id.
»	11.22	59,3	33,0	0,4405	1,3096	679,4	20,2	7,0	41	id.
»	12.22	62,0	35,1	0,4393	1,3037	679,5	20,4	6,3	40	Cu sparsi
9 » . . .	9.22	42,8	25,2	0,4282	1,2331	681,3	19,6	7,2	43	cielo lucido
»	10.22	52,1	30,0	0,4368	1,2859	681,4	20,6	7,6	43	id.
»	11.22	59,0	32,0	0,4392	1,3013	681,4	21,8	7,8	41	id.
»	12.22	61,8	33,2	0,4398	1,3055	681,2	22,4	8,0	39	id.
»	13.22	59,0	34,3	0,4378	1,2948	680,9	23,0	8,3	40	id.
»	14.22	52,1	34,5	0,4385	1,2986	680,8	23,5	9,0	43	qualche Cu sparsi
»	15.22	42,8	33,0	0,4265	1,2277	680,7	22,0	8,3	42	Cu sparsi
»	16.22	32,5	29,0	0,4078	1,1203	680,6	23,0	9,1	44	Cu vicini all'orizzonte
»	17.22	21,7	27,0	0,3910	1,0290	660,6	22.0	9,8	50	id.

SESTOLA 1901.

Giorno	Ora	*h*	*θ*	*i*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Note*
	h m	°								
10 agosto . .	9.21	42,6	27,0	0,4200	1,1873	680,4	19,6	8,4	50	veli verso l'orizzonte
»	10.21	51,8	29,0	0,4335	1,2660	680,4	20,5	8,5	48	id.
»	11.21	58,8	31,0	0,4362	1,2830	680,4	21,5	8,6	45	piccoli Cu verso l'orizz.
»	12 21	61,5	31,5	0,4377	1,2921	680,3	22,2	8,7	44	id.
»	13.21	58,8	31,0	0,4385	1,2966	680,1	22,1	8,7	44	Cu sparsi
»	14.21	51,8	31,0	0,4322	1,2595	679,9	22,7	8,7	43	id.
11 » . . .	9.21	42,4	30,0	0,4200	1,1890	679,5	20,2	9,7	55	cielo lucido
»	10.21	51,6	30,5	0,4298	1,2454	679,3	21,0	9,2	50	Cu sparsi
»	11.21	58,5	32,0	0,4310	1,2532	679,0	22,0	8,8	45	Cu sparsi
»	12.21	61,2	33,5	0,4325	1,2627	678,6	22,2	8,5	43	Cu e veli sparsi
12 » . . .	15.21	42,2	33,5	0,4185	1.1542	677,2	24,0	9,3	42	nubi sparse ⊙ libero
13 » . . .	9.21	41,9	28,2	0,4170	1,1711	676.2	19,0	10,5	64	Cu e veli sparsi
17 » . . .	8.20	30,8	23,0	0,4258	1,2182	676,7	15.0	6,4	51	veli
»	9.20	41,0	24,0	0,4382	1,2907	676,9	15,5	6,6	51	Cu e veli
»	10.20	50,1	29,0	0,4398	1,3030	677,0	16,7	6,1	44	id.
»	11.20	56,8	31,5	0,4452	1,3368	677,2	17,2	6,4	41	id.
»	12.20	59,3	32,5	0,4450	1,3362	677,3	18,0	6,2	41	id.
18 » . .	8.20	30,6	25,0	0,4225	1,2004	678 6	16,8	8,2	58	cielo bellissimo
»	9.20	40,8	27,5	0,4340	1,2681	678,7	16,6	8,0	53	Cu all'orizzonte SE
»	10.20	49,8	33,5	0,4372	1,2903	678,9	17,6	7,8	53	Cu sparsi
»	12 20	59,0	32,5	0,4407	1,3105	679,0	18,5	8,0	51	id.
20 » . . .	8.20	30,1	26,3	0,3997	1,0750	678,9	19,1	9,0	56	nebbia all'orizzonte
»	9.20	40,3	29,0	0,4115	1,1408	679,0	19,1	8,6	52	cielo limpido
»	10.20	49,3	32,0	0,4168	1,1719	679,1	20,0	8,8	52	id.
»	11.20	55,8	33,0	0,4255	1,2219	679,0	20,2	8,9	52	qualche Cu
»	12.20	58,3	33,5	0,4268	1,2297	678,8	20,7	9,0	50	Cu sparsi
»	13.20	55,8	33,0	0,4220	1,2019	678,6	21,8	9,6	49	id.
»	14.20	49,3	33,0	0,4180	1,1792	678,4	22,9	10,4	50	id.
»	15.20	40,3	32,7	0,4105	1,1371	678.4	23,5	10,5	49	id.
»	16.20	30,1	30,5	0,3847	0,9977	678,4	24,0	11,5	52	Cu sparsi; veli intorno al ⊙
21 » . . .	8.19	29,9	27,0	0,3955	1,0529	678,7	20,0	10,4	60	veli
»	9.19	40,0	31,0	0,4095	1,1307	678,6	20,6	11,7	65	veli; aureola intorno ⊙
»	10.19	49,0	32,0	0,4200	1,1900	678,5	20,7	11,8	63	Cu; aureola intorno ⊙
»	11.19	55,5	34,0	0,4173	1,1758	678,5	21,5	12,8	67	aureola intorno ⊙
»	12.19	58,0	32,0	0,4182	1,1518	678,3	22,3	13,0	65	⊙ fra Cu
23 » . . .	8.19	29,4	23,0	0,3920	1,0325	680,7	18,0	9,5	62	cielo bianchiccio
»	9.19	39,5	27,5	0,4108	1,1361	681,1	17,4	7,8	52	caligine bassa; qualche Cu
»	10.19	48,4	29,0	0,4240	1,2112	681,2	18,2	7,8	50	qualche Cu
»	11.19	54,9	31,0	0,4293	1,2427	681,3	18,5	7,8	49	⊙ lucido; Cu bassi
»	12.19	57,3	30,0	0,4308	1,2509	681,3	18,0	7,3	48	⊙ lucido; qualche Cu

SESTOLA 1901.

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Note*
	h m	°								
23 agosto. . .	13.19	54,9	30,5	0,4252	1,2189	681,2	19,0	7,7	47	Cu bassi
24 » . . .	8.19	29,2	24,4	0,3810	0,9759	679,3	18,1	10,3	67	caligine bassa
»	9.19	39,3	29,0	0,4012	1,0844	679,4	18,2	10,2	67	id.
25 » . . .	9.18	39,0	27,5	0,3865	1,0057	677,2	19,2	11,5	70	cielo bianchiccio ; Cu bassi
27 » . . .	9.18	38,5	23,0	0,4238	1,2068	670,5	15,0	6,7	53	grossi Cu ; ⊙ lucido
»	10.18	47,3	24,1	0,4320	1,2896	670,7	16,0	6,8	50	⊙ lucido ; Cu bassi
»	11.18	53,6	28,0	0,4350	1,2742	671,2	15,5	6,1	47	Cu e veli
28 » . . .	8.17	28,2	21,1	0,4168	1,1663	675,0	14,0	7,7	65	cielo lucido ; Cu bassi
»	9.17	38,2	27,0	0,4312	1,2515	675,2	14,2	8,4	70	qualche Cu
»	12.17	55,6	27.1	0,4472	1,3462	675,1	16,3	6,7	49	Cu vaganti
»	14.17	47,0	29,0	0,4425	1,3191	675,0	16,9	7,8	57	Cu e veli
»	15.17	38,2	27,0	0,4355	1,2766	674,4	18,5	7,5	47	cielo limp. Cu all'orizz. S
29 » . . .	10.17	46,7	28,5	0,4442	1,3290	675,5	15,5	8,4	64	grossi Cu a SE ed W
»	14.17	46,7	28,0	0,4390	1,2978	676,4	18,5	7,9	50	Cu vicini al ⊙
30 » . . .	8.17	27,7	22,0	0,4198	1,1835	678,8	15,0	8,2	65	cielo lucido
»	9.17	37,7	27,5	0,4368	1,2845	679,0	15,5	7,7	58	id.
»	10.17	46,4	29,0	0,4415	1,3132	679,1	16,0	7,4	55	id.
»	11.17	52,6	30,1	0.4430	1,3228	679,3	16,7	7,1	50	id. ; Cu bassi
»	12.17	54,9	31,0	0,4418	1,3161	679,6	17,5	7,2	48	Cu e veli all'orizzonte
31 » . . .	8.17	27,4	23,1	0,4152	1,1583	679,5	15,8	9,3	68	cielo bianchiccio
»	9.17	37,4	30,5	0,4257	1,2217	679,6	16,7	9,9	71	⊙ limpido
»	10.17	46,0	30,5	0,4360	1,2816	679,6	17,9	9,9	65	⊙ limpido ; pochi Cu
»	11.17	52,2	32,0	0,4368	1,2870	679,5	18,4	10,1	63	Cu sparsi
»	17.17	16,8	22,0	0,3848	0,9944	678,7	20,1	8,5	52	Cu sparsi ; veli bassi
1 settembre	8.16	27,2	23,1	0,4090	1,1240	677,1	16,8	7,8	55	leggeris. veli intorno ⊙
»	9.16	37,1	27,0	0,4298	1,2434	677,0	16,5	6,8	51	⊙ limpido
»	10.16	45,7	30,0	0,4335	1,2666	677,2	17.0	7,2	50	id.
»	11.16	51,9	31,5	0,4360	1,2821	677,1	17,3	6,9	48	id.
»	12.16	54,2	32,0	0,4355	1,2795	676,9	18,3	7,8	50	id.
»	14.16	45,7	34,0	0,4157	1,1668	676,4	20,4	9,7	55	id.
»	15.16	37,1	31,5	0,3980	1,0683	676,3	20,9	10,4	58	cielo bianchiccio
2 » . . .	8.16	26,9	23,5	0,4042	1,0980	675,3	16,8	8,8	63	cielo bianch. con veli legg.
»	9.16	36,8	27,1	0,4170	1,1705	675,3	17,3	9,8	67	veli intorno ⊙
»	10.16	45,4	29,5	0,4255	1,2200	675,4	18,0	10,7	69	⊙ libero ; Cu vaganti
»	11.16	51,6	33,0	0,4275	1,2334	675,3	19,2	11.5	71	id.

Chimica. — *Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento dell' iodio* Nota IV di G. Oddo, presentata dal Socio Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei. I. Jalotrachite nera ad augite ed egirina.* Nota di E. Manasse [1], presentata dal Corrispondente De Stefani.

Il professor Carlo De Stefani m' inviava per studio alcune rocce raccolte in varî punti (Concola, Moscaglione, ecc.) del cratere scoriaceo, profondamente sventrato, del Fondo Riccio nei Campi Flegrei, della cui esistenza si trova fatto appena cenno in un recente lavoro di De Lorenzo e Riva sul cratere di Vivara [2].

Ad un esame macroscopico sommario possono distinguersi fra queste rocce delle scorie trachitiche di vario colore, nere, rosse, cinereo-rossigne, dei tufi trachitici giallastri ed infine delle trachiti non scoriacee, a struttura ipocristallina, che il professore De Stefani trovò incluse sia nelle scorie, sia nei tufi.

Di questi tipi diversi di rocce ho intrapreso lo studio riducendole in sezioni sottili per l' esame microscopico, sebbene non per tutte ciò sia possibile, e ricorrendo alle analisi e ai saggi chimici.

Jalotrachite nera ad augite ed egirina della Concola.

È una roccia di color nero, eminentemente scoriacea, porosissima e quasi sfilacciata, le cavità sue essendo attraversate da esili filamenti di vetro. Ad occhio nudo, o coll' aiuto di una lente, vi si riconoscono dei cristalli porfirici biancastri o incolori e vetrosi di feldispato, delle lamine esagonali di biotite e dei prismetti verdi pirossenici. Tutti però questi minerali di prima segregazione sono rarissimi.

Al microscopio la roccia risulta costituita da un vetro molto bolloso grigionero, che in sezioni sottilissime si riduce di color tabacco chiaro. Insieme al vetro non mancano degli esili microliti, non superanti in lunghezza i $^{20}/_{100}$ di millimetro e generalmente di dimensioni assai inferiori, isolati

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

(2) Il cratere di Vivara nelle isole Flegree. Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli. Ser. 2ª. vol. X, n. 8, 1901.

quasi sempre, o raggruppati in fascetti di solo due o tre individui. Quasi tutti i microliti pel colore loro verdognolo, per l'estinzione che avviene sempre intorno a 40° rispetto all'allungamento, per gli alti colori d'interferenza sono riferibili all'augite. I pochi rimanenti sono feldispatici e fra questi si riconoscono facilmente dei microliti di sanidino, incolori ed estinguentisi a 40°. Ma della presenza di microliti di altri feldispati non posso con sicurezza affermare. Certo che alcuni cristalletti di plagioclasio vi sono, ma non so se riferire al primo o al secondo tempo di formazione. Assai più rari dei microliti sono i trichiti di svariate forme.

I cristalli porfirici anche al microscopio appariscono assai rari e di dimensioni variabili. Il sanidino è fra i minerali del primo tempo di formazione quello che insieme all'augite presenta le maggiori dimensioni, sebbene non sia certo il più diffuso. Esaminando, sia le polveri, sia le sezioni sottili della roccia, s'incontrano dei cristalli di sanidino che raggiungono circa tre millimetri in lunghezza e un millimetro in larghezza; ma se ne hanno anche, e più abbondantemente, di quelli così piccoli che non si sa bene se considerare di prima o di seconda formazione. Alcuni cristalli di sanidino sono rettangolari, ma la maggior parte sono corrosi e avvolti dalla massa fondamentale vetrosa; ed in tutti sono frequenti delle linee irregolari di frattura. Rarissimi ne sono i geminati. L'estinzione, rispetto allo spigolo (010) : (001), avviene a 0° su (001) e raggiunge fino 12° su (010). Nel sanidino sono abbondantissime le inclusioni, dovute principalmente a minutissimi irregolari frammenti di un vetro che sembra del tutto uguale a quello della massa fondamentale, ad aghetti di apatite ed augite, a granuli di magnetite e a qualche laminetta di biotite e di anfibolo e, forse anche, di plagioclasio basico. Il sanidino è quindi il più giovane fra i minerali porfirici.

Alcuni cristalli che a prima vista sembrano di sanidino sono forse da riportarsi all'anortose, sia perchè hanno estinzione ondulata e a forte ingrandimento manifestano una finissima striatura di geminazione, sia perchè nelle sezioni parallele a (001) l'estinzione sembra non avvenire perfettamente a 0°.

Corroso e riassorbito dalla massa fondamentale, come il sanidino, ma più abbondante e un poco più torbo è, fra i cristalli porfirici, il plagioclasio. La geminazione dell'albite non è sempre ben palese e i colori d'interferenza sono sempre, assai elevati. Giudicando dalle estinzioni, sembra il plagioclasio doversi riferire a più specie, le quali da un termine molto basico (anortite) passano fino ad una andesina acida, se non addirittura all'oligoclasio. Hanno la prevalenza però i termini piuttosto basici. I cristalli zonati son rari, e mal visibili ne sono le zone. Il plagioclasio è spesso associato all'augite e all'egirina, che sono i due pirosseni che si hanno in questa jalotrachite della Concola; ed è ricco di inclusioni dello stesso vetro che si trova incluso nel sanidino.

L'augite è verde, non pleocroica, in prismi lunghi fin tre millimetri, circondati sempre da un grosso orlo nero di magnetite, e con netta sfaldatura prismatica. Qualche volta essa è spezzettata e ridotta in brandelli. I più grossi cristalli talora presentano colorazione più intensa nelle parti periferiche che nelle parti centrali e i colori d'interferenza, che sono sempre alti, in tal caso decrescono in vivacità dalla periferia al centro. L'estinzione massima misurata, riferita all'asse verticale, è di 43°. I geminati sono rarissimi. L'augite è riassorbita dal vetro della massa fondamentale ed ha inclusioni del solito vetro, di magnetite e rarissime di apatite.

Essa è avvolta spesso da una fascia assai estesa di egirina, la quale si trova anche in cristalli isolati. L'egirina è pleocroica dal verde al giallo-verdastro, ha angolo di estinzione di pochi gradi dalla striatura ed è avvolta e framezzata da magnetite, come l'augite. È associata oltre che a quest'ultima specie al plagioclasio spesso, talora anche alla biotite. La presenza dell'egirina fu avvertita dal Rosenbusch (1), e in queste stesse condizioni, nelle scorie trachitiche degli Astroni pure nei Campi Flegrei; le quali scorie sono del tutto simili a questa della Concola.

Fra i minerali di prima consolidazione l'anfibolo (orneblenda) è scarsissimo in sezioni ottogonali. Ha pleocroismo dal verde al giallo-grigiastro ed è, come l'augite e l'egirina, circondato e attraversato da magnetite.

La biotite è abbondante invece quasi quanto i pirosseni. È listiforme o in tavolette esagonali ed ha colore bruno-giallognolo o bruno-rossastro; è alterata tanto, che non sempre bene si scorgono la striatura, il pleocroismo e l'assorbimento.

S'incontrano nelle sezioni della roccia alcuni cristalletti a contorno irregolare, o meglio alcuni granuli azzurrognoli, circondati da un orlo nero, e non completamente estinti a nicols incrociati. Basandomi anche sui saggi chimici, che diedero per questa jalotrachite tracce di anidride solforica, li riferisco all'hauina; e spiego la non completa estinzione fra nicols incrociati coll'ammettere in essi quelle stesse anomalie ottiche che il Rosenbusch dice presentare talora la hauina (2).

Non mai potei notare nelle sezioni la sodalite, per quanto la roccia, lavata ripetutamente con acqua distillata e trattata con acido nitrico, diede evidente reazione di cloro (0,22 %). Grossi grani invece si scorgono di magnetite; di questa specie si hanno anche sezioni quadrate oltre dei minuti granuli che ricoprono e rendono scuro il vetro della roccia. Infine si riconoscono qualche laminetta e qualche granulo di ematite.

(1) *Mikrosk. Physiogr. d. Massigen Gesteine.* Stuttgart, 1896, pag. 750.
(2) *Mikrosk. Phisiogr. d. petrographisch. wichtigen Mineralien.* Stuttgart, 1892, pag. 324.

L'analisi chimica, da me eseguita, di questa scoria nera della Concola diede:

H^2O a 110°	0,14
H^2O sopra 110°	0,30
SiO^2	56,74
Al^2O^3	18,74
Fe^2O^3	3,84
FeO	2,87
MnO	tracce
CaO	4,63
MgO	2,00
K^2O	7,18
Na^2O	4,36
Cl	0,22
Ph^2O^5	tracce
SO^3	tracce
	101,02
— O = 2Cl	0,05
	100,97

L'analisi ridotta a 100, con esclusione dell'acqua, del cloro e delle tracce di anidride fosforica e anidride solforica, è riportata qui appresso insieme alle quantità molecolari dei singoli componenti che se ne deducono. Da tali quantità, seguendo il metodo del Loewinson-Lessing (¹), si ricavano: la formula magmatica, il coefficiente di acidità α (dato dal rapporto fra il numero degli atomi di ossigeno ritenuti dalla silice e quello degli atomi di ossigeno ritenuti dagli altri ossidi), e β (numero delle molecole basiche che si hanno per 100 molecole di silice):

SiO^2	56,54	0,9360	0,9360	0,9360
Al^2O^3	18,67	0,1826	0,2065	0,2065
Fe^2O^3	3,83	0,0239		
FeO	2,87	0,0398	0,1716	0,3171
CaO	4,61	0,0823		
MgO	2,00	0,0495		
K^2O	7,15	0,0758	0,1455	
Na^2O	4,33	0,0697		
	100,00			

$$9{,}4\,SiO^2 ; 2{,}1\,R^2O^3 ; 3{,}2\,\bar{R}O \quad \text{ovvero} \quad 4{,}5\,SiO^2 ; R^2O^3 ; 1{,}5\,\bar{R}O$$

$$\alpha = 2{,}00 ; \beta = 56$$

$$R^2O : RO = 1 : 1{,}2 \; ; \; Na^2O : K^2O = 1 : 1{,}1$$

(¹) *Note sur la classification et la nomenclature des roches éruptives.* Compte rendu du Congrès géologique international. VII session, pag. 52, St. Pétersbourg, 1897. — *Studien über die Eruptivgesteine.* Id. id., pag. 193.

Jalotrachite nera ad augite ed egirina di Moscaglione.

Questa roccia rassomiglia grandemente alla Jalotrachite nera della Concola precedentemente descritta. Ne differisce solo perchè è un poco meno scoriacea, pur presentando sempre evidentissimo l'aspetto pomicioso e perchè ha in alcuni punti superficiali limitatissimi, una sottile patina di carbonato di calcio. Al microscopio risulta formata principalmente di un vetro scuro, che in sezioni sottilissime diviene di color tabacco molto chiaro, con innumerevoli pori ad aria. In mezzo al vetro sono riconoscibili dei microliti di augite, quasi sempre isolati e talora raggruppati in fascetti di due o tre individui, e non superanti generalmente in lunghezza i $^{20}/_{100}$ di millimetro. I microliti feldispatici sono rari e rari pure sono i trichiti.

Le segregazioni porfiriche sono molto scarse rispetto alla massa fondamentale. Si distingue fra esse il sanidino in cristalli tabulari, spesso rettangolari, ma quasi sempre corrosi e penetrati dalla massa vetrosa; vi si riscontrano inoltre rotture e fessure in ogni senso. Le dimensioni dei cristalli sanidinici variano assai; dai piccolissimi misuranti pochi centesimi di millimetro, che male si distinguono da quelli di ulteriore formazione, si passa gradatamente a quelli che sorpassano il millimetro nel senso dell'allungamento loro. Abbondantissime vi sono piccole inclusioni di un vetro giallo-bruno, del tutto simile a quello della massa fondamentale; rari invece dei microliti di apatite. Anche in questa scoria alcuni cristalli sembrano riferibili all'anortose.

I cristalli porfirici di plagioclasio sono più abbondanti di quelli di sanidino ed hanno, come questi ultimi, dimensioni variabili e aspetto tabulare, sebbene spesso siano avvolti dalla massa fondamentale vetrosa. Riferendosi all'estinzione, misurata in lamine gemelle con la legge dell'albite, la quale per altro non sempre si manifesta chiaramente, sembrerebbe doversi il plagioclasio riferire a più specie distinte. E così, analogamente a quanto è dato osservare nella jalotrachite della Concola, da termini molto basici, anortitici, si passa, per specie intermedie, fino a termini andesinici acidi. Assai scarsi sono i cristalli zonati; ma, anche quando la struttura zonale manca, alcune delle lamelle di geminazione hanno colori d'interferenza assai più alti e angoli di estinzione maggiori delle altre. La geminazione abituale è quella dell'albite, cui talvolta si associa quella del periclino. Le inclusioni vetrose sono abbondanti.

Fra i minerali porfirici, subito dopo il plagioclasio per abbondanza vengono la biotite, l'augite e l'egirina. La biotite, che ha colore tabacco scuro, è talora in lamine allungate e striate parallelamente al loro allungamento; ma più spesso è alterata con segregazione di ossidi di ferro che ne mascherano i comuni caratteri. L'augite è verde e non pleocroica con estinzione ad angolo grande (di 43° circa) dall'asse verticale. È spesso circondata da un grosso orlo di magnetite che s'inframette anche tra le linee di sfaldatura, e

presenta nel suo interno inclusioni piccolissime e irregolari del solito vetro e di magnetite. L'egirina invece è assai fortemente pleocroica dal verde bottiglia al giallo-verdastro, con angolo di estinzione variabile da 3° a 6° con la striatura facilmente visibile. Essa pure è circondata e traversata da magnetite e generalmente forma un esteso mantello avvolgente i cristalli di augite; ma si trova anche in lamine isolate. Le sue inclusioni sono quelle stesse che presenta l'augite. L'augite e l'egirina sono spesso associate al plagioclasio e, come questo, sono sempre riassorbite dalla massa vetrosa fondamentale.

La magnetite è pure assai abbondante in minuti granuli e in grosse sezioni quadrate o irregolari. L'hauina, l'ematite, la limonite solo eccezionalmente è dato di scorgere. E mai potei notare, nelle sezioni che io feci di questa jalotrachite, nè l'anfibolo, nè la sodalite. Il saggio chimico che diede 0,24 % di cloro fa sospettare in certo modo della presenza della sodalite; la perfetta rassomiglianza fra questa scoria e quella della Concola, in cui non manca, per quanto scarsissima, l'orneblenda, mi fa ritenere che anche in questa scoria l'anfibolo non sia completamente assente.

Ecco ora ciò che mi diede l'analisi chimica:

H^2O a 110°	0,12
H^2O sopra 110°	0,19
SiO^2	55,23
Al^2O^3	19,61
Fe^2O^3	4,33
FeO	2,97
CaO	5,32
MgO	2,25
K^2O	6,25
Na^2O	3,98
Cl	0,24
Ph^2O^5	tracce
SO^3	tracce
CO^2	tracce
	100,49
— O = 2Cl	0,05
	100,44

Da cui si ha:

SiO^2	55,26	0,9149	0,9149	0,9149
Al^2O^3	19,63	0,1920	0,2190	0,2190
Fe^2O^3	4,33	0,0270		
FeO	2,97	0,0412	0,1919	0,3222
CaO	5,32	0,0950		
MgO	2,25	0,0557		
R^2O	6,26	0,0663	0,1303	
Na^2O	3.98	0,0640		
	100,00			

$$9{,}1\ SiO^2 ; 2{,}2\ R^2O^3 ; 3{,}2\ \bar{R}O \text{ ovvero } 4.1\ SiO^2 ; R^2O^3 ; 1{,}4\ \bar{R}O$$

$$\alpha = 1{,}87 ; \beta = 59$$

$$R^2O : RO = 1 : 1{,}5 ; Na^2O : K^2O = 1 : 1$$

Patologia. — *Sul fenomeno dell' agglutinazione nel sangue dei malarici.* Nota III dei dott. D. Lo Monaco e L. Panichi, presentata dal Socio Luciani.

Fra gli autori che si sono occupati dell' agglutinazione globulare alcuni hanno limitato l' esistenza di questo fenomeno a poche infezioni; altri invece sostengono che esso è una proprietà quasi comune a tutti i sieri patologici.

Alle prime conclusioni arrivano le ricerche: di Grünbaum (1) il quale ha osservato l' agglutinazione nei sieri di ammalati di tifo e di scarlattina; di Grixoni (2) il quale afferma che solamente nei malarici e nei tifosi si può dimostrare il fenomeno dell' agglutinazione; di Novi e Meruzzi (3) i quali conchiudono che questo fenomeno si ha costantemente nelle forme infettive. Landsteiner (4), Donath (5), Shattock (6), Camus e Pagniez (7), Ascoli (8), Bignami e Capogrossi (9), Pace (10), Eisenberg (11) invece trovano il fenomeno dell' agglutinazione in quasi tutti i sieri patologici, e molti di essi estendono erroneamente questa proprietà anche ai sieri d' individui normali, come già abbiamo detto nella Nota precedente.

Su questo argomento abbiamo anche noi fatto numerose ricerche. Già nella prima Nota, oltre che in tutti i malarici, supponemmo che il fenomeno dell' agglutinazione fosse comune a molte o a tutte le malattie infettive, e in essa riportammo i risultati di un esame fatto su un individuo, il cui siero acquistò la proprietà agglutinante, che prima non aveva, dopo aver contratto l' infezione tifosa.

Le esperienze che ora comunichiamo, furono eseguite allo scopo di stabilire se il fenomeno dell' agglutinazione fosse o no comune a tutti i sieri patologici. Nel caso negativo si veniva a confermare la teoria sostenuta da Grixoni, che cioè il fenomeno dell' agglutinazione rappresenta una proprietà speciale del siero malarico. Nel caso positivo ci proponevamo di ricercare se

(1) Grünbaum, British med. Journ. 1900. 5 maggio 1900.
(2) Grixoni, Gazz. degli Osped. 1901.
(3) Novi e Meruzzi, Il Policlinico (Supplemento settimanale), n. 38. 1901.
(4) Landsteiner, Centralblatt f. Bact. XXVII, pag. 361.
(5) Donath, Wiener klin. Woch., 1900, pag. 497.
(6) Shattock, Journ. of Path. a. Bact. 1900, vol. VI, pag. 303.
(7) Camus e Pagniez, Compt. rend. de la Soc. de Biol. 1901.
(8) Ascoli, La clinica medica. 1901.
(9) Bignami e Capogrossi, Comunicazione all'Acc. Med. di Roma del 26 giugno 1901.
(10) Pace, Rivista critica di Clinica med. 1901.
(11) Eisenberg, Wiener klin. woch. 1901, n. 42.

esistevano caratteri differenziali tra il fenomeno dell'agglutinazione che si osserva adoperando i sieri malarici, e quello che si osserva adoperando i sieri provenienti da individui affetti da altre malattie. Inoltre era nostra intenzione di estendere le ricerche nei recidivi malarici, per istudiare se e quando si otteneva in essi la scomparsa del fenomeno dell'agglutinazione mediante la cura chininica, e se questo fatto poteva essere utilizzato come indice dell'avvenuta guarigione dell'infezione palustre.

Soggetto delle nostre esperienze furono gli ammalati dell'Ospedale di S. Spirito di Roma e quelli della città di Grosseto, dove uno di noi si recò come membro della Commissione antimalarica governativa diretta dal professor Gosio.

La tecnica da noi adoperata è stata già descritta nella Nota precedente. Ci occorre però aggiungere che, in queste nostre esperienze, il siero da esaminarsi ottenuto per separazione dal coagulo formatosi nel tubo capillare, venne sempre mescolato con una piccolissima quantità di sangue di cavia normale, il quale, come è noto, non agglutina unito al siero d'individuo normale. Per essere più esatti, diremo che, dopo aver tagliato con una forbice il padiglione dell'orecchio della cavia già disinfettato e asciugato, s'immerge, nel sangue che fuoriesce dalla ferita, la punta di un piccolo spillo, e si porta poi a contatto della goccia di siero depositato nel vetrino coproggetti. La piccola quantità di sangue viene agitata per mezzo del medesimo spillo nel siero, finchè si ottiene una colorazione uniforme di esso, e poi si osserva in goccia pendente. Esperienze di controllo eseguite contemporaneamente con lo stesso siero a cui si aggiungeva ora il sangue di uomo sano, ora quello di una o di altra cavia normale, hanno dato eguali risultati. Mai abbiamo adoperato i globuli rossi lavati in soluzione fisiologica, perchè, come abbiamo già dimostrato, qualunque manipolazione su essi può essere causa di risultati poco esatti.

Mediante la tecnica già esposta, e in base ai numerosi esami da noi eseguiti, siamo in grado di confermare il fatto che con i sieri di moltissimi ammalati si ottiene il fenomeno dell'agglutinazione. Tra i sieri che hanno dato risultati negativi, citiamo quelli di due casi di enterite, di un caso di blenorragia con reumatismo, di uno di nefrite parenchimatosa, di uno di cistite, di uno di clorosi, di uno di sifilide secondaria e di pochi altri. Col siero di ammalati di tifo, di ittero febbrile, di pulmonite, di cancro del fegato, di pleurite, di tubercolosi pulmonare, di anemia secondaria, di morbo di Pott, di endocardite, di diabete con nefrite, di enterocolite acuta, di anemia postpartum, di leucemia splenica, di porpora emorragica, di febbre puerperale, ecc. ecc., abbiamo sempre riscontrato il fenomeno dell'agglutinazione.

Mescolando il siero del sangue di questi ammalati col sangue di cavia, le masse agglutinate ora si trovano formate di moltissimi globuli, ora di pochi. Da questo esame qualitativo non si deve mai trarre alcuna conclu-

sione, per sostenere come molti fanno, che un siero di un ammalato agglutina più di quello di un altro ammalato. Per noi il criterio di una maggiore o minore capacità agglutinante può solo farsi, quando, diluendo i sieri con la soluzione fisiologica, si osserva che in uno il fenomeno scompare con diluizioni minori di quelle che occorrono per un altro siero, per ottenere il medesimo risultato.

Per diluire la piccola quantità di siero ottenuto per separazione dal coagulo nel tubo capillare, si procede nel seguente modo: Quando c' interessa conoscere se il siero da esaminarsi agglutina o no a una data diluizione, allora dopo aver rotte con una limetta le estremità del tubo, e versato tutto il contenuto di esso in un vetro d' orologio, con lo stesso tubo per capillarità si raccoglie la parte liquida, evitando l' entrata in esso del coagulo o dei piccoli coaguli del sangue. Al limite della sezione del tubetto riempita di siero per capillarità, si attacca una strisciolina di carta, o si fa un segno con la limetta o con l' inchiostro, e dopo si fa cadere, soffiando leggermente dentro il tubetto, il siero in un altro vetro d' orologio. Poscia si riempie il tubetto sino al segno, di soluzione fisiologica, e si versa questa nel vetro di orologio, tante volte, quante volte si desidera diluire il siero. Allora, non resta che mescolare bene il siero con la soluzione fisiologica, depositare una piccola goccia di questo liquido nel vetrino coproggetti e aggiungervi il sangue di cavia. L' osservazione microscopica del preparato c' indicherà, se a quella diluizione il siero esaminato agglutina o non agglutina.

Quando invece vogliamo esattamente determinare il grado di diluizione a cui arriva la capacità agglutinante di un siero, occorre frazionare il siero separatosi dal coagulo nel tubetto e versato in un vetro d' orologio, raccogliendolo in 3-4 tubetti capillari. Mescolando il siero del primo tubetto con altrettanta soluzione fisiologica, e facendo il relativo preparato, si stabilisce se il fenomeno avviene alla diluizione 1:1; se poi al siero rimasto, rimisurato nel tubetto e depositato in altro vetro d' orologio si aggiunge una eguale quantità di soluzione fisiologica, otterremo la diluizione 1:3, e, continuando a ripetere le medesime operazioni, le diluizioni 1:7, 1:15, 1:31 ecc. Con il siero del secondo tubetto mescolato con due parti di soluzione fisiologica, possiamo misurare la capacità agglutinante alla diluizione 1:2, e procedendo dopo come nel caso del tubetto n. 1, le capacità agglutinanti nei rapporti di diluizione di 1:5, di 1:11, di 1:23 ecc. Il siero del terzo tubetto verrà per la prima volta diluito quattro volte, e quello del quarto tubetto per la prima volta verrà diluito sei volte. Le altre diluizioni si faranno sempre come nel caso del primo tubetto; cosicchè prima studieremo la capacità agglutinante nei rapporti 1:4, 1:9, 1:19; e dopo quella nei rapporti 1:6, 1:13, 1:27. Se si dispone di altro siero, possiamo, diluendo porzioni di esso per la prima volta 8, 10, 12 volte, completare tutta la serie dei rapporti; ma quasi sempre bastano quattro piccole quantità di siero raccolte

in altrettanti tubetti per riuscire ad ottenere la scala di tutte le diluizioni con poche lacune, e per determinare esattamente quando scomparisce il fenomeno dell' agglutinazione.

Di questa lunga tecnica ci siamo solo serviti per i sieri malarici che presentano una capacità agglutinante sempre alta; ma per la maggior parte degli altri sieri patologici, l' esame si limitava alla esecuzione delle prime diluizioni (1:1, 1:2), con le quali il fenomeno agglutinante, sempre visibile quando si mescolava il siero non diluito col sangue di cavia, più non si mostrava.

Tra i sieri patologici che più agglutinano, citiamo quelli dei tifosi ma anche con questi sieri, il fenomeno dell' agglutinazione che spesso scompare con diluizioni 1:1, può alle volte osservarsi anche con diluizioni 1:3 o 1:4.

La maggior capacità agglutinante spetta al siero dei malarici, sia primitivi che recidivi, col quale il fenomeno si osserva sempre con diluizioni maggiori del rapporto di 1:5. Nei sieri dei malarici recidivi abbiamo trovato qualche volta persistente il fenomeno anche con diluizioni nel rapporto di 1:30, ma numerosissimi per non dire tutti sono i sieri dei malarici, sia recidivi che primitivi, in cui il fenomeno resta sempre visibile con diluizione nel rapporto di 1:10.

Da questi risultati possiamo quindi ricavare la legge che i *sieri la cui capacità agglutinante si conserva al di là delle diluizioni 1:5, debbono ritenersi appartenenti ad individui malarici.* Se a questa prova diagnostica, aggiungiamo l' altra che i sieri malarici non presentano più il fenomeno dell' agglutinazione, se diluiti a parti uguali con soluzione isotonica contenente l' 1 % di bicloridrato di chinina, la possibilità di distinguere un siero malarico da uno non malarico aumenta. Occorre però avvertire che non si può diagnosticare se un siero è malarico con questa sola ultima prova, se non si fa contemporaneamente un altro preparato adoperando il medesimo siero diluito a parti uguali con la semplice soluzione fisiologica. Nel caso che i risultati delle due prove fossero tutti e due negative o tutte e due positive, allora ne deduciamo che il siero non è di malarico, ma se la prova con la chinina è negativa, e l' altra con la soluzione fisiologica è positiva, si può ritenere che il siero esaminato contiene isoagglutinine malariche. L' azione che la chinina esercita sulle agglutinine malariche se da una parte ci mostra che essa non agisce solamente sul parassita malarico, ma anche sui prodotti tossici di esso, come ammise Baccelli [1]; dall' altra costituisce uno dei pochissimi esempi notati dalla letteratura moderna, in cui sostanze chimiche hanno il potere di neutralizzare quelle dell' organismo dipendenti da processi infettivi.

[1] Baccelli G., Il Policlinico, 1897, vol. IV.

Avendo così dimostrato quanto sia importante l'esame della capacità agglutinante per la diagnosi della malaria, ci resta a riferire le esperienze che abbiamo eseguito per stabilire come si comporta questo fenomeno nei malarici chinizzati, e se la scomparsa di esso sta in rapporto diretto con la fine dell'infezione.

A Grosseto e precisamente in una frazione di questa città denominata Istia d'Ombrone, uno di noi sottopose, a cominciare dal 1° luglio di questo anno, alla somministrazione quotidiana di 1 gr. di bicloridrato di chinina 12 individui che avevano tutti sofferto di malaria e quasi tutti per più anni di seguito. In nove di essi l'ultimo accesso febbrile era avvenuto nel mese di aprile o nel mese di maggio del corrente anno; per gli altri il periodo apirettico decorreva dal mese di ottobre o dal mese di novembre del 1900. A metà di essi poi nei due mesi antecedenti l'inizio della cura quotidiana, erano stati somministrati due grammi di chinina per settimana.

Dagli esami della capacità agglutinante eseguiti mediante la tecnica già descritta, risultò che con il siero di questi individui il fenomeno era sempre visibile alla diluizione nel rapporto di 1:20. La chinizzazione venne prolungata fino alla scomparsa del fenomeno, la quale si avverò dopo 18-20 giorni di cura, che tutti fecero volontariamente senza inconvenienti di sorta. La diminuzione della capacità agglutinante cominciò a notarsi dopo 3-5 giorni dalla prima somministrazione della chinina, e continuò a decrescere prima lentamente, e nell'ultimo periodo rapidamente.

Sospesa la somministrazione della chinina ai 12 individui che si erano sottoposti alla cura, e che rimasero sempre nel posto malarico, dormendo in case non munite di protezione meccanica; tre, a stagione malarica inoltrata, tornarono ad ammalarsi di febbre malarica, alla quale si accompagnò una elevazione della capacità agglutinante che non raggiunse mai l'altezza iniziale.

La persistenza della dimora di queste tre persone in luogo malarico, e il non aver protette con le reti metalliche le loro case, può far venire il dubbio che esse abbiano contratto nuove infezioni, ma dall'insorgere e dal decorso del processo febbrile in quei tre individui, non possiamo dedurre criterî talmente certi da escludere che si trattasse di semplici recidive.

Nel siero delle altre nove persone il fenomeno agglutinante mancò per circa due mesi, e dopo trascorso questo periodo di tempo ricomparve in grado leggero, mantenendosi visibile con le sole diluizioni inferiori al rapporto di 1:5. Questa bassa capacità agglutinante continua ad osservarsi anche ora, quando dalla fine della cura sono già passati cinque mesi, durante i quali, i nove individui hanno goduto sempre ottima salute.

In base ai risultati ottenuti non possiamo stabilire senza restrizione che tra la scomparsa del fenomeno agglutinante e la guarigione completa dell'infezione malarica ci sia uno stretto rapporto. Può darsi che l'infezione quando

si fa scomparire il fenomeno agglutinante mediante la cura della chinina, non sia completamente estinta, e che le ultime tracce dell'infezione non si rendano dimostrabili con la prova diagnostica da noi adoperata. Ci proponiamo quindi di riprendere queste esperienze per vedere se prolungando la somministrazione della chinina per qualche giorno ancora dopo la scomparsa del fenomeno, si riesce ad ottenere con l'assenza definitiva di esso, la guarigione completa di tutti i malarici che si sottopongono a questa cura.

L'egregio dott. Caciai, medico-condotto di Istia d'Ombrone, che ci prestò un aiuto prezioso nell'esecuzione di queste esperienze, ci tiene periodicamente informati dello stato di salute dei nostri curati; e quantunque ancora il tempo trascorso non sia tanto lungo come quello che si ammette per escludere la ricomparsa delle recidive, pure ci sembra che i risultati finora ottenuti sieno tali da incoraggiarci a sostenere che la cura quotidiana di chinina prolungata fino alla perdita della proprietà agglutinante del siero dei malarici è molto efficace, e coincide col maggior numero delle guarigioni complete.

In Istia d'Ombrone durante l'ultima stagione malarica si presentarono per fare la cura chininica circa 800 persone, e in tutte quelle che dichiaravano di non avere avuto accessi febbrili da parecchi mesi o da parecchi anni venne sempre eseguita la ricerca dell'agglutinazione, allo scopo di potere fissare l'epoca in cui questo fenomeno scompare per estenzione naturale del processo infettivo non coadiuvato dalla chinizzazione energica e prolungata.

Da questi esami risultò che quasi tutti presentavano il fenomeno dell'agglutinazione; però bisogna avvertire che ricercando esattamente l'anamnesi, queste persone finivano sempre con l'ammettere che nella stagione malarica dello scorso anno o nei mesi dell'inverno susseguente, avevano sofferto qualche febbre di strapazzo o di straccaia, come loro dicono, che era guarita dopo l'ingestione di pochi grammi di chinina. Non fu invece trovato il fenomeno nei sieri di poche persone in cui il periodo apirettico, esattamente controllato, durava da 2-3-4 anni.

Probabilmente sulla scomparsa naturale della proprietà agglutinante devono agire molti fattori, come la maggiore o minore chinizzazione durante gli accessi febbrili, la buona nutrizione, il riposo, ecc.; ed è facile che in queste eccellenti condizioni si trovavano le persone di cui parlava Grixoni [1], nel sangue delle quali non erano più apprezzabili le agglutinine malariche dopo 3-5 mesi di completa apiressia. Nei malarici non fortemente chinizzati e in cui non erano sopravvenute molte o lunghe recidive, secondo le nostre esperienze, il fenomeno agglutinante non dura mai meno di due anni. Esso, fino a prova in contrario, indica che l'infezione non è estinta; e in favore di questa teoria rammentiamo la facilità con cui gl'individui già malarici,

[1] Grixoni, Gazzetta degli Ospedali, 1901.

e dotati di siero fortemente agglutinante, riprendono le febbri appena fanno un lavoro faticoso, o si espongono alle intemperie della stagione.

Negli individui che avevano sofferto di febbre tifoide, dagli esami fatti non così numerosi come quelli eseguiti sui sieri malarici, risultò invece che la proprietà agglutinante nella maggior parte dei casi più non si riscontra dopo 2-5-10 mesi dalla guarigione. Questa persistenza del fenomeno agglutinante nel tifo, difficilmente si può spiegare con la teoria sostenuta da Eisenberg, il quale ammette che le agglutinine non hanno nulla di specifico, e che esse non sono se non l'espressione della reazione dell'organismo sul riassorbimento delle parti componenti gli eritrociti. Secondo questa teoria in tutti gli stati patologici dove più energica è la distruzione dei globuli rossi, più alta dovrebbe trovarsi la capacità agglutinante.

Ma così in vero non avviene, perchè in generale la capacità agglutinante è più alta nei processi infettivi che nelle malattie discrasiche. Anzi a ciò dobbiamo aggiungere che negli stati inoltrati di cachessia palustre, la capacità agglutinante, forse per assenza della reazione dell'organismo, si trova sempre meno alta che nei malarici in atto, anche quando abbiano sofferto più recidive, ma ancora resistenti alla malattia e in grado di lavorare nei periodi apirettici. D'altra parte se la presenza delle isoagglutinine dipendesse solamente dalla distruzione degli eritrociti, la chinina in vitro dovrebbe agire egualmente sia su quelle malariche, che su quelle delle altre infezioni, la qual cosa, come abbiamo detto nella seconda Nota, non siamo riusciti a dimostrare. Si deve quindi concludere che per la produzione delle isoagglutinine e forse anche delle isoemolisine intervengano fattori di origine infettiva, i quali, modificando o distruggendo gli elementi del sangue, i cui prodotti di riassorbimento si riverserebbero nel plasma, riescono a rendere evidente la capacità agglutinante del siero, il quale normalmente non mostra di essere dotato di questa proprietà.

Fisiologia. — *Su alcune alterazioni dei ganglii linfatici nelle dermopatie distrofiche.* Nota del dottor VINCENZO MONTESANO [1], presentata dal Socio LUCIANI.

In molti infermi con dermopatie distrofiche si verificano delle tumefazioni dei ganglii linfatici. Più di tutto, questo fenomeno si riscontra nella prurigine di Hebra, in cui, accanto alle più evidenti manifestazioni distrofiche della cute, ed ai disturbi subbiettivi, sotto forma di prurito, vi hanno alterazioni dei ganglii linfatici crurali, che hanno avuto il nome di bubbone pruriginoso.

[1] Lavoro eseguito nella Clinica Dermosifilopatica diretta dal prof. Campana.

Tutti i dermatologi sono concordi nel ritenere che questo bubbone sia l'effetto delle irritazioni per grattamento a cui gl'infermi ricorrono per il prurito: ma, oltre il fatto, che in molte altre malattie croniche pruriginose della cute, non si ha un fenomeno consimile, non è dubbio che il bubbone da prurigine abbia caratteri obbiettivi speciali, che lo fanno distinguere dalle comuni alterazioni di ganglii linfatici da irritazione cutanea. Essi possono così riassumersi:

1°. Il bubbone pruriginoso non suppura mai (Lesser).

2°. Non dà disturbi subbiettivi degni di nota.

3°. Il connettivo sotto-cutaneo e perigangliare, in corrispondenza del bubbone pruriginoso, è più lasco del normale, e la cute sovrastante assume uno stato sclerotico, non aderisce perfettamente al sotto-cutaneo e dà l'apparenza, nei ganglii ipertrofici, di una tumefazione riducibile alla pressione (Campana, *Frammenti di Dermatologia*).

4°. Il bubbone pruriginoso assume talvolta l'aspetto di un linfangioma, specialmente del connettivo perigangliare (Campana, ibid.).

Inoltre sono state notate dagli autori tumefazioni dei ganglii linfatici corrispondenti nelle regioni cutanee affette da *herpes zoster*, e noi stessi in un infermo con eritemi e flittenosi degli arti, riferibili, con ogni probabilità a lesioni del midollo spinale, abbiamo osservato ipertrofia dei gangli epitrocleari e crurali, che non ci è stato possibile riferire a nessuna delle comuni cause morbose, che sogliono produrre queste tumefazioni.

Ora si sa, che il fenomeno dell'ipertrofia di dati tessuti, organi e sistemi, suole riscontrarsi in svariate malattie del sistema nervoso centrale e periferico, ad esempio nella siringomielia, in cui possono aversi, oltre dell'ipertrofia dei capi ossei di alcune articolazioni, delle vertebre nonchè delle mani (chiromegalia di Charcot e Brissaud) delle alterazioni ipertrofiche del connettivo sottocutaneo; nell'acromegalia; nella paralisi muscolare pseudo-ipertrofica o miosclerotica. Ci siamo perciò domandati se l'ipertrofia dei ganglii linfatici in queste dermopatie distrofiche non fosse essa pure la conseguenza delle stesse alterazioni del sistema nervoso che producono l'affezione cutanea, dal momento che queste cosidette adeniti, per i caratteri clinici, differiscono dalle comuni poliadeniti da irritazione cronica della pelle e si trovano in relazione cronologica colle altre alterazioni dovute al sistema nervoso, che non sono i sintomi infrequenti in questa malattia.

Per dare una base sperimentale al nostro concetto, abbiamo istituito il seguente esperimento, in parecchi animali, il quale ha concesso nuovo appoggio alla nostra idea.

In tre cani di media statura, e di sesso maschile, previa narcosi eterea, con tutte le cautele asettiche s'incide la cute nella regione crurale destra e si asporta un tratto del nervo crurale corrispondente, lungo quattro centimetri circa, nella sua porzione più alta, verso il bacino.

Si asportano nel tempo stesso alcune glandole linfatiche della regione Sutura a punti staccati della cute e del sottocutaneo.

In uno di questi cani si pratica contemporaneamente un' incisione della cute e del sottocutaneo nella regione ascellare sinistra, senza asportare verun nervo, indi si sutura a strati.

Salvo uno di questi cani, in cui qualche punto di sutura non tenne e fu necessario ridarlo, gli altri guarirono regolarmente senza suppurazione.

Dopo uno spazio di tempo variabile da due a tre mesi, lungo le cicatrici delle ferite già fatte, si pratica una seconda incisione in tutti e tre i cani, e si asportano dalla regione crurale dei ganglii linfatici tumefatti di grandezza variabile da quella di una piccola avellana a quella di un grosso cece, di consistenza piuttosto dura. Nella regione ascellare del terzo cane, ov' era stata già praticata una prima incisione, non si riscontra alcuna alterazione nel volume delle glandole.

Osservando a fresco i ganglii linfatici asportati dopo la resezione del nervo, si nota che essi raggiungono le dimensioni triple o quadruple dei normali, sono isolati, tondeggianti, a superficie liscia, di consistenza piuttosto notevole.

Alla sezione si osserva che non esistono focolai suppurativi e necrotici: in alcuni di esse la superficie di sezione non è uniforme: si notano invece dei tratti periferici di colorito bianco-giallastro, in corrispondenza dei quali la consistenza è meno notevole.

Anche nel centro di questi ganglii si notano dei tratti nei quali la consistenza appare diminuita.

Esame istologico. — Le glandole sono state indurite nel liquido del Müller e poi in alcool: altre in liquido del Müller ed acido osmico.

Le sezioni sono state colorate con ematossilina, con ematossilina ed eosina, col policromo triacido del Pappenheim.

Fig. 1. — Glandola linfatica asportata prima del taglio del n. crurale: *c* capsula; *m* parte midollare; *s* setti.

Facendo il paragone tra un ganglio, nello stato normale ed un altro alterato per resezione del nervo, si notano delle rilevanti differenze, anche osservando con un lieve ingrandimento. Difatti questa figura riproduce un ganglio normale (fig. 1).

Ecco che cosa si osserva con un piccolo ingrandimento:

La capsula è evidentemente ispessita, ma solo in alcuni tratti si osservano i setti che invia nell'interno.

Nella parte follicolare del ganglio si osserva una notevole quantità di tessuto adiposo che si è sostituito a quello adenoideo, il quale è soltanto in parte conservato, ma non reagisce alle comuni sostanze coloranti con la stessa intensità del tessuto glandolare sano.

La particolarità più notevole è la presenza di numerose lacune, specialmente nella parte più centrale del ganglio, limitate da tessuto connettivo fibroso, nel cui interno si osservano dei leucociti. Le pareti di queste lacune sono rivestite qua e là da cellule endoteliali.

E questa seconda (fig. 2) un ganglio patologico per resezione sperimentale del nervo. Noi non riportiamo che una sola figura di questa condizione

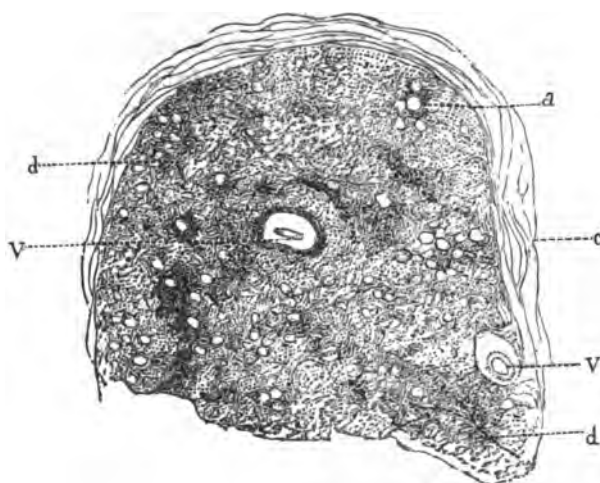



Fig. 2. — Metà di una glandola linfatica asportata alcuni mesi dopo la recisione del n. crurale: *c* capsula; *d* struttura glandolare follicolare e cavernosa; *a* globuli adipiferi; *v* vasi sanguigni, visibili con lo stesso ingrandimento col quale non si riesce a vedere quelli della glandola sana (Zeiss. Oc. 2. Ob. BB. Ingr. 130.

patologica; ma ne avremmo potute riportare moltissime; perchè nelle tre osservazioni eseguite abbiamo avuto sempre lo stesso fonomeno.

In mezzo al tessuto ove la struttura normale è conservata, ed anche ove essa manca, qua è là si vedono aree di effusione di corpuscoli rossi più o meno conservati nella loro forma.

Si notano altresì dei vasi in numero più abbondante che non nei ganglii normali: alcuni di essi sono così dilatati da assumere l'aspetto di un tessuto cavernoso (fig. 3); altri sono ispessiti tanto nella tunica media come nell'avventizia (fig. 3, 4), che in alcuni di essi appare distaccata.

Con un ingrandimento maggiore si osserva che gli elementi cellulari contenuti nelle maglie del tessuto lacunare appaiono sotto tre forme:

1°. Corpuscoli simili comuni leucociti del sangue, della grandezza media che supera di tre-quattro volte quella dei corpuscoli rossi.

Fig. 3. — *a* Deformazione e distacco dell'endotelio di un vaso arterioso di glandola linfatica, dopo la recisione del nervo crurale in un fascio artero-venoso ispessito nelle proprie parti.

2°. Corpuscoli molto grossi con nucleo bi- o tripartito, scarsi: rarissimi fra questi i corpuscoli contenenti granuli eosinofili. In gran parte questi corpuscoli si colorano con bleu di metile basico, salvo le poche cellule eosino-

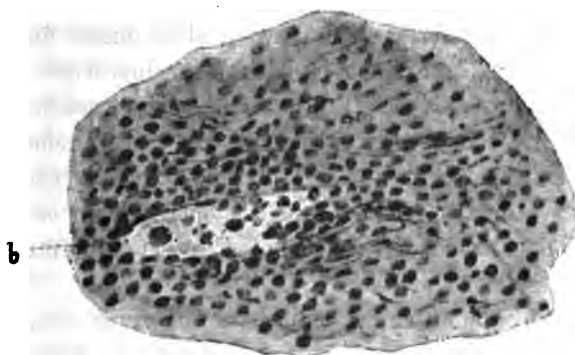



Fig. 4. — *b* Tratti del sistema lacunare di una glandola linfatica, dopo la recisione del n. crurale, con scarso contenuto, di forma varia, al contrario di quel che si vede nella glandola sana, ov' è più abbondante e più uniforme (Zeiss. Oc. 3. Ob. BB. Ingr. 175).

file che si vedono con la soluzione policroma triacida del Pappenheim.

3°. Corpuscoli piccolissimi, veri microciti.

Inoltre il tessuto connettivale di sostegno delle glandole appare iperplasizzato in alcuni tratti, con fibre sottili ma numerose, evidentissime.

Le sezioni dei ganglii fissati con liquido del Müller ed acido osmico, lasciano distinguere con maggiore evidenza le lacune che hanno sostituito il tessuto gangliare ed intorno alle quali si osserva il tessuto connettivo fibroso. Inoltre notasi la presenza del tessuto adiposo, colorato dall'acido osmico, non con una disposizione irregolare, ma con quella del tessuto sottocutaneo; disposizione che pare segua un decorso di fasci e di fibre, consistente in aggregati di globuli adipiferi limitati da una rete connettivale sottile ma diffusa, allo stesso modo come nel tessuto sottocutaneo.

Queste per sommi capi sono le alterazioni istologiche riscontrate nelle glandole linfatiche di tre cani, dopo l'esportazione di un tratto del corrispondente nervo crurale.

Esse possono così riassumersi:

1°. Sostituzione al tessuto gangliare di tessuto adiposo con disposizione analoga a quella del connettino sottocutaneo e formazione di uno stato lacunare da ricordare un linfagioma.

2°. Iperplasia del tessuto connettivale di sostegno della glandola.

3°. Dilatazione dei vasi ed ispessimento delle loro tuniche più interne.

Evidentemente, qui le mutate condizioni trofiche per l'asportazione di un tratto nervoso, hanno agito sulle glandole linfatiche, favorendo l'abnorme sviluppo del tessuto adiposo in modo paragonabile a ciò che si verifica nella paralisi muscolare pseudo-ipertrofica, e l'iperplasia del tessuto connettivale di sostegno in maniera analoga a quella che osserviamo nei fibromi della cute, nei quali l'origine trofica è fuori discussione.

Come e perchè la resezione del nervo produca questo fenomeno, io non cercherò di spiegare. Al mio scopo basterà l'aver dimostrato che si possono sperimentalmente ottenere speciali alterazioni macroscopiche ed istologiche in ganglii linfatici, quando si modifichino le condizioni trofiche naturali; e come queste alterazioni possano paragonarsi a quelle della paralisi muscolare pseudo-ipertrofica e di altre malattie del sistema nervoso centrale e periferico, nelle quali l'ipertrofia di tessuti, organi e sistemi forma spesso la più importante manifestazione morbosa.

Se adunque ricordiamo che il bubbone accompagna sempre la prurigo, malattia la cui origine distrofica non può mettersi in dubbio, mentre manca in altre malattie croniche con prurito; e che l'esperimento ci ha mostrato come le mutate condizioni trofiche possono essere la causa di un aumento di volume dei ganglii linfatici, non sembrerà arrischiato il ritenere che le alterazioni gangliari della prurigine e di altre malattie distrofiche della cute, possano essere la conseguenza delle stesse cause a cui le predette affezioni devono la loro origine.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Cerruti comunica che ai concorrenti ai premi Ministeriali del 1901, per le *Scienze matematiche*, dei quali venne dato l'elenco nella scorsa seduta, devonsi aggiungere i seguenti, che inviarono al Ministero in tempo utile i loro lavori:

7. Buffa Pietro. — 1) *Primo studio della geometria piana* (st.). — 2) *Movimento ed eguaglianza* (st.).

8. Chini Mineo. — 1) *Sulle formule che esprimono la lunghezza di un arco e l'area di un settore circolare* (st.). — 2) *Sui fattori integranti di una o più forme differenziali di grado n ad m variabili* (st.). — 3) *Sopra alcune equazioni differenziali del 1° ordine* (st.). — 4) *Sopra alcune equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine* (st.). — 5) *Sulla determinazione di una funzione di due variabili indipendenti quando ne siano assegnate le espressioni delle due derivate parziali d'ordine n rispetto a ciascuna delle variabili* (st.). — 6) *Sulle equazioni a derivate parziali di 2° ordine* — 7) *Geometria infinitesimale delle linee nello spazio e sopra una superficie* (litogr.).

9. De Francesco Domenico. — 1) *Sopra alcune formole elementari di geometria non euclidea* (st.). — 2) *Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante.* Note I e II (st.). — 3) *Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a 3 dimensioni di curvatura costante.* Mem. I e II (st.). — 4) *Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (st.). — 5) *Su alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico, analiticamente equivalenti a problemi nello spazio ordinario* (st.). — 6) *Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (st.).

10. Delitala Giuseppe. — 1) *La risoluzione completa del tetragono piano* (st.). — 2) *Relazioni dipendenti da raggi uscenti da un punto e passanti pei vertici di un triangolo* (st.). — 3) *Un correlativo del teorema di Stewart* (st.). — 4) *Nuova risoluzione di due problemi*, (st.). — 5) *La risoluzione del pentagono completo e sue applicazioni* (ms.). — 6) *Un nuovo sistema di coordinate trilineari* (ms.) — 7) *Per la risoluzione generale del tetragono completo* (ms.). — 8) *Alcune proprietà dell'inversione isogonale* (ms). — 9) *Nuove proprietà dei punti notevoli del triangolo* (ms.). — 10) *La tetragonometria piana?* (ms.) — 11) *Le formule definitive di risoluzione del problema di Pothenot* (ms.).

11. Palatini Francesco. — 1) *I sistemi lineari di grado n e dimensioni* $n+i$ *di varietà algebriche* V_i *nello spazio* S_{i+1} *in relazione alle*

trasformazioni birazionali (st.). — 2) *Sulla rappresentazione lineare dei complessi lineari di rette di uno spazio a quattro dimensioni coi punti dello spazio a nove dimensioni* (st.). — 3) *Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni* (st.). — 4) *Fondamenti di una teria dei sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio ad n dimensioni* (ms.). — 5) *Prodotto di due condizioni caratteristiche relative ai piani di un iperspazio.* — 6) *Numero delle rette di un* S_n *soddisfacenti ad un prodotto di condizioni caratteristiche indipendenti tali da formare una condizione di multiplicità* $2(n-1)$ (ms.). — 7) *Sulla teoria delle proporzioni tra grandezze geometriche* (st.).

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una estensione del metodo di Eulero-Laplace per l'integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine.* Memoria del Socio Ulisse Dini.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Meccanica. — *Sul principio delle immagini di Thomson e le equazioni dell'elasticità.* Nota del Corrisp. C. Somigliana.

Geologia. — *I terreni eocenici presso Bribir in Croazia* Nota del Socio C. De Stefani e del dott. G. Dainelli.

Le due precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre.* Nota di Francesco Severi, presentata dal Socio C. Segre.

La ricerca delle condizioni perchè una forma, particolarmente ternaria, si possa esprimere come combinazione lineare di altre due forme date, ha occupato molti geometri, e fra i più insigui.

Ai noti lavori, fondamentali, di Nöther, han fatto seguito altri (di Nöther stesso, di Voss, Stickelberger, Zeuthen, Bertini, Brill, ecc.) nei quali il problema fu considerato dal punto di vista puramente algebrico ed anche sotto altri aspetti.

Recentemente nei Mathematische Annalen, i quali accolsero la maggior parte dei lavori precedenti, vide la luce una breve Nota della sig.na Scott [1], nella quale è dimostrato il « *Fundamentalsatz* » di Nöther, per le forme ternarie, con mezzi molto semplici.

1. Date $h\,(\leqq r)$ forme $F_1, F_2, \ldots F_h$ delle $r+1$ variabili $x_0, x_1, \ldots, x_r$, supposto che le equazioni

$$(1)\qquad F_1=0\,,\ldots,F_h=0\,,\quad \left\|\begin{matrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \ldots\ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial F_h}{\partial x_0} & \ldots\ldots & \frac{\partial F_h}{\partial x_r}\end{matrix}\right\|=0$$

abbiamo meno che ∞^{r-h} soluzioni comuni, trovare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma F, delle medesime variabili, si possa esprimere come combinazione lineare di $F_1, F_2, \ldots, F_h$; ossia affinchè esistano certe forme $A_1, A_2, \ldots, A_h$ in guisa che:

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_h F_h.$$

Tale è il problema che ci occuperà nella presente Nota.

Esso assume un aspetto geometrico quando $x_0, x_1, \ldots, x_r$, s'interpretino come coordinate omogenee di punto in uno spazio S_r. Alla totalità delle soluzioni dell'equazione $F_1=0$ viene a corrispondere una ∞^{r-1} di punti dello S_r, i quali diremo costituire una *ipersuperficie* [2], che denoteremo con la lettera $\mathbf{F}_1$; e analogamente per le equazioni $F_2=0, \ldots, F_h=0$.

Mentre la forma F_1 determina $\mathbf{F}_1$, a questa corrispondono infinite forme che differiscono tra loro per fattori costanti.

Se in un punto comune a $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ sono soddisfatte le equazioni $\left\|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right\|=0\,,\begin{pmatrix}i=1,\ldots,h\\ j=0,\ldots,r\end{pmatrix}$, quel punto o sarà multiplo per qualcuna delle $\mathbf{F}$, oppure in esso gli iperpiani tangenti alle $\mathbf{F}$ saranno linearmente dipendenti; e quindi o il punto sarà multiplo per la varietà Φ comune alle $\mathbf{F}$, oppure apparterrà ad una varietà, più che $r-h$ volte estesa, costituita da punti comuni alle $\mathbf{F}$. Questa osservazione prova che se le equazioni (1) hanno meno che ∞^{r-h} soluzioni, la varietà Φ comune alle $\mathbf{F}$ sarà precisamente di dimensione $r-h$ e non avrà parti multiple [3], potendo del resto possedere

(1) *A proof of Nöther's fundamental Theorem* (Math. Ann., Bd. 52, pag. 598 [1899]).

(2) Non adoperiamo, come si usa anche di fare, la parola *forma* per indicare l'insieme delle soluzioni di $F_1=0$, e analoghe, perchè in *questo lavoro* è utile non confondere la concezione della forma F_1, con la concezione della totalità de' suoi zeri.

(3) Ora e nel seguito parlando di *parte* di una varietà, s'intenderà di parlare di una varietà di *ugual dimensione*, in essa contenuta.

singolarità qualunque; e viceversa. Sicchè geometricamente le condizioni a cui sono assoggettate le F si traducono in ciò che *la varietà Φ è di dimensione $r-h$ e non ha parti multiple.*

2. Per rispondere alla domanda che abbiam fatto al numero precedente, ci occorreranno alcune nozioni sulla teoria dei moduli, e, per comodità del lettore, le riuniremo qui ([1]).

Si dice che un sistema illimitato di forme costituisce un *modulo* quando combinando linearmente un numero qualsiasi di forme del sistema si ottiene una forma di questo.

Si dimostra allora ([2]) che tra le forme di un modulo se ne può sempre trovare un numero finito $F_1, \ldots, F_h$, talchè ogni forma F del modulo possa esprimersi come combinazione lineare di quelle:

$$F \equiv A_1 F_1 + \ldots + A_h F_h .$$

Le forme $F_1, \ldots, F_h$ posson dirsi gli *elementi fondamentali* del modulo, che s'indicherà con $(F_1, F_2, \ldots, F_h)$.

Interpretando le variabili $x_0, \ldots, x_r$, delle quali le F son funzioni, come coordinate di punti in uno S_r, avremo le ipersuperficie $F_1, \ldots, F_h$ corrispondenti agli elementi fondamentali, e se c'è una varietà M comune alle F potrà chiamarsi la *varietà base* del modulo.

Considerando la totalità delle ipersuperficie passanti per M ([3]), verremo a considerare in corrispondenza un certo sistema di forme, il quale subito si scorge essere un modulo: bisogna però ben badare di non confondere questo modulo col modulo $(F_1, F_2, \ldots, F_h)$; ci saranno dei casi in cui i due moduli coincidono, ma è facile persuadersi sopra esempî, che non è sempre così.

Nella Memoria citata di Hilbert ([4]) si dimostra inoltre che il numero $\chi(l)$ delle condizioni indipendenti che s'impongono ad una forma d'ordine l (ai suoi coefficienti), obbligandola ad appartenere ad un certo modulo, se l è abbastanza grande, si rappresenta così:

$$\chi(l) = \chi_0 + \chi_1 \binom{l}{1} + \chi_2 \binom{l}{2} + \cdots + \chi_d \binom{l}{d},$$

ove $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_d$ sono certi numeri, indipendenti da l, caratteristici del modulo dato, del quale $\chi(l)$ si chiama la *funzione caratteristica.*

([1]) Vedasi l'importante Memoria di Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (Math. Ann., Bd. XXXVI, pag. 473 [1890]). Ivi si troveranno le citazioni relative ai lavori anteriori di Kronecker, Dedekind e Weber.

([2]) Hilbert, loc. cit., pag. 479.

([3]) Dicendo « ipersuperficie *passante* per M » intendiamo, come è d'uso nella geometria iperspaziale, alludere ad una ipersuperficie corrispondente ad una forma che si annulla in tutti i punti di M, senza che sia *necessariamente* soddisfatta qualche altra condizione circa l'annullarsi della forma stessa nei punti di M.

([4]) Ved. a pag. 512.

3. La questione del n. 1 è risoluta dal teorema seguente:

Se le ipersuperficie $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ $(h \leq r)$ *corrispondenti alle forme* $F_1, \ldots, F_h$ *delle* $r+1$ *variabili* $x_0, \ldots, x_r$, *si tagliano in una varietà di dimensione* $r-h$, *priva di parti multiple, la condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie* $\mathbf{F}$ *corrisponda ad una forma* F *tale che*

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_h F_h ,$$

le $A_1, \ldots, A_h$ *essendo forme di convenienti ordini, è che* $\mathbf{F}$ *passi per la varietà comune ad* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_h$ [1].

Insieme alla proposizione enunciata noi dimostreremo quest'altra:

La funzione caratteristica del modulo $(F_1, F_2 \ldots, F_h)$ *ove* $F_1, \ldots, F_h$ *sono* h $(\leq r)$ *forme (di* $r+1$ *variabili), rispettivamente degli ordini* $n_1, n_2, \ldots, n_h$, *alle quali corrispondono le ipersuperficie* $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$ *intersecantesi secondo una varietà* $r-h$ *volte estesa e priva di parti multiple, è:*

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \\ + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + (-1)^h \binom{l-n_1-\cdots-n_h+r}{r}$$

ove i sommatori s'estendono alle combinazioni semplici di $1^a, 2^a, \ldots (h-1)^a$ *classe degli indici* $1, 2, \ldots, h$ [2].

La dimostrazione delle due proposizioni antecedenti si farà simultaneamente e per induzione completa. Si osservi che l'un teorema e l'altro sono veri quando $h = 1$; perciò li avremo dimostrati in ogni caso quando, ammettendoli veri per $h-1$ forme, di un numero qualsiasi di variabili, riusciremo a dimostrarli anche per h forme.

(1) Nella Memoria di Hilbert, *Ueber die vollen Invariantensysteme* (Math. Annalen, Bd. 42 [1892], ved. a pag. 320), si dimostra un teorema di cui è caso particolare il seguente: *Se una forma* F *di* $x_0, x_1, \ldots, x_r$ *si annulla per gli stessi valori delle* x *per i quali si annullano simultaneamente le forme* $F_1, \ldots, F_h$ *delle medesime variabili, si può sempre determinare un numero intero* s *tale che* $F^s \equiv A_1 F_1 + \cdot + A_h F_h$.

Nella Nota, di poco anteriore, del prof. Bertini, *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2), t. XXIV [1891]) il numero s, di cui parla il teorema precedente, è determinato quando $h=2$ e F, F_1, F_2 son forme ternarie. Il teorema da noi dato nel testo dice che quando $h \leq r$ e le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$ passano per meno che ∞^{r-h} zeri di $F_1, \ldots, F_h$, il numero s di Hilbert è uguale ad 1.

(2) Nella Memoria di Wirtinger, *Untersuchungen über Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner 1895, a pag. 20, trovasi una formola che esprime la funzione caratteristica della intersezione di una varietà, di data funzione caratteristica, con un certo numero di forme generiche. Ma la dimostrazione della formola suddetta mi sembra in qualche punto dubbia, sicchè non ne ho fatto uso.

4. Le ipersuperficie $F_1, \dots, F_h$ di ordini $n_1, n_2, \dots, n_h$, e di equazioni $F_1 = 0, \dots, F_h = 0$ s'intersechino secondo la varietà Φ, ad $r - h$ dimensioni, e senza parti multiple.

Una ipersuperficie F, d'ordine l, insieme ad un iperpiano che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple, corrisponda ad una forma appartenente al modulo $(F_1, \dots, F_h)$; allora io dico che anche *la forma* F, *corrispondente a* F, *appartiene a questo modulo.*

Supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sia generico in guisa che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple; per ipotesi la forma $x_0 F$ apparterrà allora al modulo $(F_1, \dots, F_h)$, ossia avremo:

$$x_0 F \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h, \tag{1}$$

donde:

$$A_1(0, x_1, \dots, x_r) F_1(0, x_1, \dots, x_r) + \dots + A_h(0, x_1, \dots, x_r) F_h(0, x_1, \dots, x_r) \equiv 0,$$

dalla quale rilevasi che alla forma $A_1(0, x_1, \dots, x_r) F_1(0, x_1, \dots, x_r)$ corrisponderà una ipersuperficie passante per la M_{r-h}, *senza parti multiple,* comune alle ipersuperficie, che nell' iperpiano $x_0 = 0$, son determinate dalle forme $F_2, \dots, F_h$, delle quali (al pari della F_1) nessuna, nelle nostre ipotesi, si annulla identicamente ponendovi $x_0 = 0$. Siccome la sezione di F_1 con $x_0 = 0$ non passa per la suddetta M_{r-h}, chè altrimenti $x_0 = 0$ secherebbe Φ secondo una varietà più che $r - h - 1$ volte estesa, dovrà l'ipersuperficie corrispondente ad $A_1(0, x_1, \dots, x_r)$ passare per la M_{r-h} più volte nominata; e, pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, sarà:

$$A_1(0, x_1, \dots, x_r) \equiv B_2(x_1, \dots, x_r) F_2(0, x_1, \dots, x_r) + \cdots + B_h(x_1, \dots, x_r) F_h(0, x_1, \dots, x_r),$$

ossia:

$$A_1(x_0, x_1 \dots, x_r) \equiv B_2(x_1, \dots, x_r) F_2(x_0, x_1, \dots x_r) + \cdots + B_h(x_1, \dots, x_r) F_h(x_0, \dots, x_r) + \\ + x_0 A_1'(x_0, \dots, x_r).$$

Sostituendo nella (1), verrà:

$$x_0 F \equiv x_0 A_1' F_1 + (A_2 + B_2 F_1) F_2 + \cdots + (A_h + B_h F_1) F_h,$$

la quale prova che la ipersuperficie corrispondente alla forma $x_0 (F - A_1' F_1)$ passa per la M_{r-h+1}, *priva di parti multiple*, comune a $F_2, \dots, F_h$. Siccome $x_0 = 0$ non passa per la M_{r-h+1} suddetta, ci passerà l'ipersuperficie di equazione $F - A_1' F_1 = 0$, ossia, sempre pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, $F - A_1' F_1$ apparterrà al modulo $(F_2, \dots, F_h)$:

$$F - A_1' F_1 \equiv A_2' F_2 + \cdots + A'_h F_h,$$

donde:

$$F \equiv A_1' F_1 + A_2' F_2 + \dots + A'_h F_h,$$

che dimostra quanto abbiamo enunciato al principio di questo numero.

5. Per l'ipotesi fatta sulla Φ, comune a $F_1, \ldots, F_h$, le $F_1, \ldots, F_{h-1}$, come già abbiamo osservato, s'intersecheranno secondo una varietà ψ, ad $r-h+1$ dimensioni, priva di parti multiple.

Il modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, di cui indichiamo con $\chi_1(l)$ la funzione caratteristica, è il « *grösste gemeinsame Modul* » (1) rispetto ai due moduli (F_h) e $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, dei quali sono $\binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$ e $\chi(l)$ rispettivamente le funzioni caratteristiche. Il « *kleinste enthaltende Modul* » dei due (F_h) e $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, ossia il sistema delle forme appartenenti contemporaneamente ai moduli suddetti, è costituito dalle forme B tali che:

$$B \equiv A_h F_h \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_{h-1} F_{h-1}.$$

Ad ogni tal forma B risponderà una ipersuperficie B passante per ψ; e siccome la ipersuperficie F_h non passa per ψ, dovrà la A_h passare per ψ, e *quindi*, pel teorema ammesso per $h-1$ forme, sarà A_h del modulo $(F_1, .., F_{h-1})$; ossia il kleinste enthaltende Modul, del quale parlavamo, è, nelle nostre ipotesi $(F_1 F_h, \ldots, F_{h-1} F_h)$. Una forma d'ordine l di questo modulo dipende da tante costanti quante sono quelle contenute in una forma d'ordine $l-n_h$ del modulo $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, sicchè la funzione caratteristica del modulo suddetto è $\chi(l-n_h) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$.

Applicando la relazione fondamentale di Hilbert (pag. 519), avremo:

$$\chi(l) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r} = \chi_1(l) + \chi(l-n_h) + \\ + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r},$$

donde, in virtù della espressione ammessa per $\chi(l)$, si trae:

$$\chi_1(l) = \binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + \\ + (-1)^h \binom{l-n_1-\ldots-n_h+r}{r},$$

ove i sommatori si estendono alle combinazioni semplici di 1ª, 2ª, ..., $(h-1)$ª classe degli indici $1, 2, \ldots h$.

6. Suppongasi $r=h$. In tal caso è facile vedere che se nella $\chi_1(l)$ si pone una qualunque delle n uguale a 0, i termini si elidono a due a due, e si ha $\chi_1(l)=0$. Siccome $\chi_1(l)$ è funzione intera di grado h nelle $n_1, n_2, \ldots, n_h$, si deduce $\chi_1(l) = C n_1 n_2 \ldots n_h$, essendo C indipendente da $n_1, \ldots, n_h$. Esa-

(1) Hilbert, loc. cit., pag. 517.

minando poi l'espressione trovata di $\chi(l)$ si vede che in essa il coefficiente di $n_1 \ldots n_h$ è 1. Dunque:

$$\chi_1(l) = n_1 n_2 \ldots n_h .$$

Ciò posto, nelle ipotesi nostre, le ipersuperficie $F_1, \ldots, F_h$ si tagliano in $n_1 n_2 \ldots n_h$ punti P tutti distinti. Questi punti alle ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \ldots n_h - 1$ obbligate a contenerli, impongono $n_1 n_2 \ldots n_h$ condizioni semplici, perchè è possibile costruire una ipersuperficie d'ordine l per $n_1 n_2 \ldots n_h - 1$ punti P e non pel rimanente; p. e. mediante $n_1 n_2 \ldots n_h - 1$ iperpiani per altrettanti punti P e una ipersuperficie generica d'ordine $l - n_1 \ldots n_h + 1$.

Sicchè le ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \ldots n_h - 1$ passanti pei P, formano un sistema lineare di dimensione

$$\binom{l+h}{h} - 1 - n_1 n_2 \ldots n_h ;$$

cioè un sistema così esteso come il sistema delle ipersuperficie, pure passanti pei P, che corrispondono a forme d'ordine l, abbastanza alto, appartenenti al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$. Ne segue che ogni forma $F(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ d'ordine $l \geq N$, ove N è un conveniente limite, passante per gli $n_1 n_2 \ldots n_h$ zeri, tutti distinti, comuni alle forme $F_1(x_0, x_1, \ldots, x_r), \ldots, F_h(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, appartiene al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$ [1].

Se F è una forma d'ordine $N - 1$ passante per gli zeri comuni a $F_1, \ldots, F_h$, considerandola insieme ad una forma lineare generica, avremo una forma d'ordine N passante per gli zeri comuni a $F_1, \ldots, F_h$, e quindi appartenente al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$. Ma allora per la proposizione del n. 4 anche F apparterrà a questo modulo. Analogamente dalle forme di ordine $N - 1$ si passa a quelle di ordine $N - 2$, etc. Onde si può enunciare:

Ogni forma $F(x_0, \ldots, x_r)$ *passante per gli* $n_1 n_2 \ldots n_h$ *zeri, tutti distinti, comuni alle forme* $F_1, \ldots, F_h$, *è del modulo* $(F_1, \ldots, F_h)$.

7. Infine, sia $r = h + k \; (k \geq 1)$, e supponiamo di aver dimostrato che se h forme delle r variabili $x_1, \ldots, x_r$, corrispondono ad altrettante ipersuperficie che si secano secondo una M_{r-h-1} priva di parti multiple, ogni forma di $x_1, \ldots, x_r$, corrispondente a una ipersuperficie per questa M_{r-h-1}, appartiene al modulo delle h forme primitive; il che (grazie alla proposizione ammessa per $h - 1$ forme) si è dimostrato quando $k = 1$, al numero precedente.

Le ipersuperficie $F_1, \ldots, F_h$ di ordini $n_1, \ldots, n_h$, corrispondenti alle forme $F_1, \ldots, F_h$, si sechino secondo una varietà Φ di dimensione $r - h$,

[1] Questo ragionamento è analogo a quello fatto dalla Scott (loc. cit.), nel caso di due forme ternarie.

priva di parti multiple, e supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sechi Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple. Se F è una ipersuperficie, di ordine l, passante per Φ, considerando le sezioni di $F, F_1, \dots, F_h$ con $x_0 = 0$ si potrà scrivere, nelle nostre ipotesi,

$$F(0, x_1, \dots, x_r) \equiv A_1(x_1, \dots, x_r) F_1(0, x_1, \dots, x_r) + \cdots + A_h(x_1, \dots, x_r) F_h(0, x_1, \dots, x_r),$$

donde:

$$F(x_0, \dots, x_r) \equiv A_1(x_1, \dots, x_r) F_1(x_0, x_1, \dots, x_r) + \cdots + A_h(x_1, \dots, x_r) F_h(x_0, x_1, \dots, x_r) + \\ + x_0 F'(x_0, x_1, \dots, x_r),$$

la quale mostra che la ipersuperficie F', di ordine $l-1$, passa per Φ.

Se $l = m$, essendo m l'ordine minimo delle ipersuperficie passanti per Φ, dovrà dunque essere $F' \equiv 0$; se poi $l = m + q\ (q > 0)$, ragionando su F' come su F, e così di seguito, avremo una successione di forme $F, F', F'', \dots$, corrispondenti ad altrettante ipersuperficie passanti per Φ, e di ordini decrescenti, di una unità alla volta. Al più questa successione di forme si spingerà fino alla forma $F^{(q)}$, giacchè la forma successiva $F^{(q+1)}$, per essere di ordine $m-1$, sarà identicamente nulla. Ne viene che $F^{(q)}, \dots, F'', F', F$ apparterranno al modulo $(F_1, \dots, F_h)$.

I teoremi enunciati al n. 3 risultano così pienamente dimostrati.

8. Una conseguenza immediata del primo di questi teoremi è che il modulo $(F_1, \dots, F_h)$, quando le forme F_i corrispondano ad h ipersuperficie che si taglino secondo una varietà Φ_{r-h}, priva di parti multiple, coincide col modulo delle forme a cui corrispondono ipersuperficie per Φ.

Dunque pel secondo dei teoremi del n. 3 abbiamo:

La postulazione di una varietà Φ_{r-h}, priva di parti multiple, ma avente singolarità qualsiasi, che sia completa intersezione di h ipersuperficie di ordini $n_1, n_2, \dots, n_h$, per le ipersuperficie di ordine l abbastanza alto, è espressa da

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + \\ + (-1)^h \binom{l-n_1-\dots-n_h+r}{r},$$

i sommatori essendo estesi come al n. 3.

Osservazioni sul caso di due forme.

9. Il caso di due forme si può trattare particolarizzando i ragionamenti fatti in generale, per una via del tutto elementare, senza neppure ricorrere alla teoria dei moduli. Basta osservare che, nel caso di due forme, la dimostrazione dell'esistenza della funzione caratteristica $\chi(l)$ del modulo (F_1, F_2)

e il calcolo effettivo di essa, si posson condurre molto semplicemente, partendosi dall'ipotesi (più larga di quella che abbiam fatto nel caso generale di un numero qualsiasi di forme) che le due forme non abbiano *fattori comuni*; giacchè allora se una forma F, d'ordine l, è del modulo (F_1, F_2), ossia se

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2$$

ogni altra rappresentazione della F, quando $l \geq n_1 + n_2$, è data dalla identità:

$$F \equiv (A_1 + XF_2) F_1 + (A_2 - XF_1) F_2,$$

ove X è una forma arbitraria di ordine $l - n_1 - n_2$; sicchè il numero delle costanti indipendenti che determinano F, si ottiene togliendo dalla somma dei numeri di costanti che compaiono in A_1 e in A_2, il numero delle costanti che compaiono in X; e quindi:

$$\chi(l) = \binom{l+r}{r} - \left[\binom{l-n_1+r}{r} + \binom{l-n_2+r}{r} - \binom{l-n_1-n_2+r}{r}\right].$$

Il ragionamento del n. 6, nel caso di due forme, ci dà facilmente la dimostrazione della rappresentabilità di una forma ternaria, che passi per gli zeri comuni a due altre, come combinazione lineare di queste, non solo nella ipotesi che le ultime due forme abbian comuni zeri tutti distinti, ma anche nelle ipotesi più generali di Nöther. E infine il ragionamento del n. 7 permette di risalire dal caso di due forme ternarie, al caso di Nöther per due forme qualunque [1].

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali.* Nota del dott. GUIDO FUBINI, presentata dal Socio DINI.

La teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, non appartenenti alla classe di Fuchs, presenta molte difficoltà, perchè certi elementi, algebrici per le equazioni di Fuchs, sono trascendenti per quelle. Lo scopo, che io ora mi propongo in questa Nota, è di far vedere come lo studio delle equazioni non di Fuchs, possa per certi lati essere immaginato come lo studio di un caso limite delle equazioni di Fuchs. Il metodo consiste nel

[1] Nella *Théorie des fonctions algébriques des deux variables indépendantes* di Picard et Simart, alla pag. 17 del t. II, si estende alle forme quaternarie il *Fundamentalsatz*, deducendolo dall'analogo per le forme ternarie, con un procedimento che si può ripetere per *due* forme qualunque. Ma questo procedimento non è certo più semplice di quello che ci dà in tal caso il ragionamento del n. 7, nè si può estendere facilmente al caso di un numero *qualsiasi* di forme.

far sovrapporre i punti singolari di un'equazione Fuchsiana. Noi sappiamo infatti che un'equazione

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots\dots + p_n y = 0$$

a coefficienti razionali è o non è appartenente alla classe di Fuchs, secondo che l'ordine di polarità di p_k nei varî punti singolari per l'equazione non supera, o supera il numero k (supposto il punto all'infinito punto non singolare). Ed è ben chiaro che se questo limite fosse superato p. es. in un punto A, noi potremo immaginare che si sia arrivato ad esso, facendo sovrapporre parecchi punti singolari, in cui questi limiti non erano superati. Mi spiegherò con un esempio.

L'equazione:

$$(\alpha) \qquad y'' + \frac{m}{(x-b)^2(x-c)^2} y' + \frac{n}{(x-b)^6(x-c)^4} y = 0$$

dove m, n, b, c sono costanti si può immaginare dedotta dalla:

$$(\beta) \qquad y'' + \frac{m}{(x-b)(x-\beta)(x-c)(x-\gamma)} y' +$$
$$+ \frac{n}{(x-b)^2(x-\beta)^2(x-l)^2(x-c)^2(x-\gamma)^2} y = 0$$

facendo tendere i punti β ed l verso il punto b fino a sovrapporsi a esso, e facendo quindi tendere il punto γ verso il punto c fino a sovrapporsi a c. E si osserva che, mentre la (β) è della classe di Fuchs, la (α) non appartiene alla classe delle equazioni Fuchsiane.

In generale noi stabiliremo il seguente teorema:

Per stabilire la sostituzione lineare che un sistema di integrali della (1) *subisce in un punto* A *singolare non di Fuchs dell'equazione, in cui però le p_i non hanno singolarità essenziali e sono monodrome, basterà, nel modo precisato sostituire alla* (1) *un'altra equazione che in luogo del punto singolare* A *abbia altri punti singolari* B, B′ ... *di Fuchs, studiare per questa l'effetto di un giro attorno i punti* B, B′ ..... *e passare quindi al limite facendo coincidere i punti* B, B′ .....

E se le p_i non hanno singolarità essenziali, ossia sono razionali, si potrà ripetere questo procedimento per (1) in tutti i punti singolari non di Fuchs.

Per dimostrare questo teorema, basterà chiaramente dimostrare il lemma seguente:

Sia

$$(2) \quad y^{(n)} + \frac{l_1(x)}{(x-a)^{p_1}(x-b)^{q_1}} y^{(n-1)} + \frac{l_2(x)}{(x-a)^{p_2}(x-b)^{q_2}} y^{(n-2)} + \dots = 0$$

un'equazione lineare a derivate ordinarie; e siano $l_1(x)$, $l_2(x)$, ... *fun-*

zioni razionali di x, regolari nei punti a, b e indipendenti da b. La sostituzione Σ *fondamentale che un sistema di integrali subisce per un giro* C *chiuso, finito, non intrecciantesi attorno ai punti $x = a$, $x = b$ e a nessun altro punto singolare della* (2) *tende a un limite, quando b tende ad a e precisamente alla sostituzione* T *fondamentale per l'equazione*

$$(3) \qquad y^{(n)} + \frac{l_1}{(x - a)^{p_1 + q_1}} y^{(n-1)} + \ldots = 0$$

dovuta a un giro semplice, finito attorno il punto $x = a$ e a nessun altro punto singolare della (3).

La dimostrazione di questo teorema si compie nel modo più semplice per mezzo delle seguenti considerazioni:

I) La sostituzione Σ dovuta al giro C si può anche immaginare come dovuta a un giro attorno a tutti gli altri punti singolari eventuali della (2).

II) Questa sostituzione si può immaginare come prodotto delle sostituzioni dovute ai cappî attorno a ciascuno degli altri punti singolari eventuali, supposti in numero finito.

III) Basterà, per dimostrare il nostro teorema, far vedere che la sostituzione dovuta a uno di questi cappî relativa alla (2), diventa al limite una sostituzione dovuta allo stesso cappio, relativa alla (3).

Dimostriamo dunque quest'ultima asserzione. Per far questo ricorriamo al metodo del prolungamento analitico, che immagineremo proprio eseguito al modo di Weierstrass.

Cioè immagineremo lungo il cappio distribuiti dei cerchietti Γ, in numero finito, non includenti punti singolari della (3) in modo che due cerchietti consecutivi abbiano una parte comune. E di più li sceglieremo in modo che mentre b si avvicina ad a, almeno da un certo punto in poi non includano neppure punti singolari della (2).

Pensiamo gli integrali come funzioni delle variabili x, b. E sia $x = \mathrm{K}$ il centro di uno dei nostri cerchietti. Il punto $x = \mathrm{K}$, $b = a$ è un punto di regolarità per i coefficienti della nostra equazione; quindi, per noti teoremi, noi potremo segnare attorno ad a nel piano complesso di b un intorno Γ' tale che per x variabile nel cerchietto di centro K e per b variabile in Γ', gli integrali siano olomorfi in x, e b. Anzi, poichè i cerchietti Γ sono in numero finito, potremo costruire un intorno Γ' che valga per tutti questi cerchietti. E allora si deduce senz'altro che poichè i coefficienti della sostituzione si deducono dai valori dei detti integrali (a Wronskiano non nullo) e dalle loro derivate, essi saranno funzioni analitiche regolari di b nell'intorno Γ'. È perciò lecito il succitato passaggio al limite.

Queste considerazioni, che per maggiore chiarezza abbiamo applicato ai varî cappî, si potevano del resto anche applicare direttamente al giro C.

Sia ora un'equazione con più punti singolari $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n)}$ [1]. Sdoppiamo ciascuno di essi nel modo descritto in più punti singolari di Fuchs, e siano $A_0^{(k)} A_1^{(k)} \ldots A_{t_k}^{(k)}$ i punti singolari cui ha dato origine il punto $A_0^{(k)}$ (per $k = 1, 2, \ldots n$) dove t_k è un numero intero nullo o positivo. Immaginiamo i valori della variabile complessa in tutti questi nuovi punti singolari funzioni, p. es. lineari, di un parametro ε, tali che per $\varepsilon = 0$ ciascun punto $A_r^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots n; r = 1, 2, \ldots t_k)$ venga a cadere nel punto $A_0^{(k)}$. Facciamo un giro semplice C attorno ai punti $A_0^{(i)} A_1^{(i)} \ldots A_{t_i}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots m; m < n)$. Le stesse considerazioni precedenti applicate senza altro al cammino C, che noi naturalmente supponiamo a distanza finita da $A_0^{(i)}$, dimostrano che i coefficienti della sostituzione dovuta al giro C, sono olomorfi nella ε in un piccolo intorno di $\varepsilon = 0$ nel piano complesso di ε. È dunque lecito il passaggio al limite per $\varepsilon = 0$, cosicchè l'effetto dovuto al giro attorno ai punti singolari $A_0^{(i)}$ dell'equazione iniziale si può immaginare come caso limite di quello dovuto al giro attorno ai punti $A_0^{(i)}, A_1^{(i)} \ldots A_{t_i}^{(i)}$ dell'equazione trasformata. Dunque:

Un'equazione differenziale lineare ordinaria a punti singolari di Fuchs si può, per quanto riguarda le sostituzioni che subiscono gli integrali attorno ai punti critici, immaginare limite di un'equazione a soli punti singolari di Fuchs.

Questi teoremi, che mi sembrano notevoli dal punto di vista teorico, hanno anche il vantaggio di potere con un nuovo metodo calcolare la sostituzione dovuta ad un giro attorno a uno o più punti singolari A, nel caso che l'equazione sia a coefficienti razionali. Basta infatti a una tale equazione sostituire nel modo descritto un'equazione a soli punti Fuchsiani singolari e calcolare, per es. col metodo di Fuchs, l'effetto dovuto a un giro per gli integrali di quest'ultima attorno ai punti A e a quei nuovi punti singolari, che si devono poi far tendere ai punti A stessi. Un semplice passaggio al limite, ci darà allora la sostituzione cercata. Questo metodo, che praticamente è certo complicato, non usa però alcun algoritmo di determinanti infiniti o di rappresentazioni conformi.

Fisica terrestre. — *Sopra un sismografo per forti terremoti.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio P. Tacchini.

Dopo aver pubblicato in questi stessi Rendiconti la descrizione di svariati apparecchi sismici, quali più quali meno sensibili, sia per la semplice indicazione delle scosse di terremoto (*sismoscopi*), sia per la misura dell'effettivo movimento del suolo provocato dalle medesime (*sismometrografi*), credo di qualche interesse far conoscere un nuovo strumento, destinato allo

[1] In cui i coefficienti abbiano sole singolarità polari.

studio delle perturbazioni sismiche d'una certa forza, in occasione delle quali possono diventare insufficienti gli altri strumenti di maggiore sensibilità. Di ciò abbiamo avuta ampia prova negli ultimi anni, in occasione d'alcuni terremoti piuttosto sensibili avvenuti nel Lazio, i quali riuscirono con facilità a mettere fuori d'azione tanto gli strumenti esistenti all'Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, quanto quelli collocati nella Stazione sismica sperimentale di Roma, presso l'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica.

Il nuovo strumento è stato denominato *macrosismometrografo* in contrapposto al titolo di *microsismometrografo*, da me dato ad altro apparecchio assai più delicato, già fatto conoscere all'Accademia e destinato, invece, ai minimi movimenti del suolo (1). Prima che ancora fosse costruito, pubblicai fin dal 1900 una breve Nota, nella quale esposi per sommi capi i criterî a' quali doveva ispirarsi la sua costruzione (2). Ed ora che lo strumento è stato effettivamente costruito, grazie ai mezzi messi a mia disposizione dal prof. L. Palazzo, il nuovo direttore dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, ed è stato installato fin dal settembre 1901 nel R. Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, stimo opportuno di darne qui un breve cenno, riserbandomi di darne una descrizione completa in una Memoria, corredata da figure, che sarà prossimamente pubblicata nel vol. VII del Bollettino della Società Sismologica Italiana.

Per uno studio rigoroso dei terremoti, è bene che in ogni località il movimento del suolo sia risoluto secondo tre componenti ad angolo retto tra loro, e precisamente due orizzontali ed una verticale. Per la registrazione delle due prime io ho adottato due piccoli pendoli orizzontali, impiantati ad angolo retto, l'uno per rapporto all'altro, sopra una solida base quadrata in ghisa. La sospensione di detti pendoli assomiglia assai a quella del *Braket Seismometer* dell'Ewing ed è costruita in guisa che i pendoli non debbono tralasciare di ben funzionare, anche in presenza di poderosi scuotimenti impressi alla loro base. Dall'asse di rotazione verticale di ogni pendolo, dell'altezza di circa 25^{cm}, partono, sotto un angolo di 45°, due sbarre di ferro orizzontali, lunghe 40^{cm} e collegate tra loro: l'una di sezione quadrata, sulla quale può scorrere un cilindro di piombo del peso di circa kg. 1 $^1/_2$; l'altra di sezione rettangolare che funge da stilo scrivente e che termina con un ago alla sua estremità. La disposizione dei due pendoli è tale che quando le due sbarre quadrangolari fanno tra loro un angolo di 90°, le altre due risultano parallele

(1) G. Agamennone, *Nuovo tipo di sismometrografo*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol, IX, pag. 31, seduta del 15 luglio 1900. — Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VI, 1900-1901, pag. 71. — Id., *Il microsismometrografo a tre componenti*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. X, pag. 291, seduta del 21 aprile 1901. — Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VII, 1901-1902, pag. 70.

(2) *Sismometrografo a tre componenti per forti terremoti*. Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VI (1900-1901), pag. 135.

tra loro e ad una distanza di 12^{cm}, quanta appunto ne corre tra gli assi di rotazione dei pendoli. Ogni asse di rotazione è bilicato, in basso, sopra una punta fissa, e può essere spostato, in alto, in due direzioni ortogonali tra loro, mediante due viti di registro, allo scopo di rendere paralleli i due stili scriventi, come pure d'inclinare convenientemente gli stessi assi di rotazione, affinchè si possa far variare a piacere il periodo oscillatorio delle masse di piombo.

Nel modello di Rocca di Papa il tempo, impiegato da ogni pendolo a compiere un'oscillazione semplice, è di 4^{s}, quale appunto si avrebbe da un pendolo verticale di ben 16 metri. Questo periodo è già abbastanza lento, per permettere di poter sceverare con facilità le oscillazioni strumentali dai veri moti del suolo, i quali sono generalmente piuttosto rapidi nei terremoti locali, od in quelli d'origine relativamente vicina. Quando le masse di piombo sono fissate all'estremità delle rispettive sbarre quadrangolari, e cioè alla stessa distanza (40^{cm}) a cui trovansi gli aghi scriventi dall'asse di rotazione, è ovvio come non possa aversi alcuna moltiplicazione nelle indicazioni dello strumento. Facendo però scorrere le masse indietro, e cioè avvicinandole all'asse di rotazione del pendolo, l'ingrandimento va crescendo poco a poco; e quando le masse siano fissate giusto alla metà di dette sbarre, ciò che costituisce l'estremo limite della loro corsa, l'ingrandimento raggiunge il valore massimo di 1 a 2.

Per la registrazione della componente verticale, avuto riguardo ai maggiori attriti, à stata adottata una massa di piombo alquanto più grande (2 kg.), sospesa a quattro saltaleoni d'acciaio mediante il sistema *Ewing*, nello stesso modo appunto adoperato per la componente verticale del *microsismometrografo*, sopra ricordato. Tutto il meccanismo è stato poi disposto in tal guisa, in mezzo ai due pendoli orizzontali sopra descritti, che mediante opportune compenetrazioni si è realizzata una grande economia di spazio e si è potuto dare all'intero apparato una forma abbastanza semplice e razionale. I quattro saltaleoni, d'ugual lunghezza e paralleli tra loro, pendono da una colonna fissata sulla stessa piattaforma, dove sono imperniate le estremità superiori degli assi di rotazione dei pendoli orizzontali, e sorreggono, in basso, il telaio che posteriormente ruota attorno ad un asse orizzontale, consimile a quello dei pendoli anzidetti, e termina davanti pure con una sbarra quadrangolare, sulla quale si fa scorrere la massa di piombo di 2 kg. I movimenti poi del telaio, dall'alto in basso e viceversa, sono trasformati, mediante una leva codata a bracci uguali, in movimenti in senso orizzontale d'uno stilo, lungo pure 40^{cm} e che risulta parallelo ed intermedio agli altri due, destinati alle componenti orizzontali; ma questo terzo stilo resta alquanto più basso e spostato di poco indietro, affinchè ne' suoi movimenti non possa urtare gli altri due. Anche qui non mancano le viti di rettifica per regolare il periodo oscillatorio di questa terza massa, il quale può essere con facilità reso uguale a quello di 4^{s},

con cui oscillano ambo i pendoli orizzontali. Inoltre, col fare scorrere in avanti od indietro questa terza massa sulla rispettiva sbarra quadrangolare, si riesce a far variare l'ingrandimento per la componente verticale, e precisamente entro gli stessi limiti, già fatti conoscere per le componenti orizzontali.

La registrazione delle tre componenti si compie, mediante tre piccoli aghi verticali, scorrevoli entro convenienti guide, sopra una zona di carta laccata affumicata, chiusa in sè stessa, larga 25^{cm} e lunga circa $3 \, ^1/_2$ metri. Quest'ultima sta a cavalcioni sopra un cilindro d'ottone, lungo 30^{cm} e del diametro di 20^{cm}, il quale riposa, con l'asse disposto orizzontalmente, sopra due cosciali robusti, fissati a due bracci in ferro e sporgenti dalla parte anteriore della base dello strumento. L'asse del cilindro termina da una parte con una ruota dentata, la quale ingrana con un rocchetto d'un semplice meccanismo d'orologeria, fissato ad uno degli anzidetti cosciali, e dal lato opposto termina con una carrucola, sulla quale si avvolge un cordoncino. Quando a quest'ultimo si attacchi un conveniente peso, il cilindro si pone tosto in rapida rotazione, nella ragione d'una trentina di metri all'ora, velocità questa sufficiente per mettere non solo in evidenza tutte le particolarità d'un sismogramma, per quanto complicato, ma per fare una buona analisi del moto del suolo, anche se abbastanza rapido. Ad ogni modo, se si credesse opportuno d'accrescere ancora di più la velocità della carta, non si avrebbe che da aumentare il peso motore.

Il cilindro è destinato ad entrare in rotazione soltanto in occasione d'una scossa piuttosto sensibile, in seguito al funzionare d'uno qualunque d'una serie di sismoscopî, non troppo delicati, capaci di lasciar libera la ventola del meccanismo l'orologeria, sia agendo elettricamente per l'intermediario d'un piccolo elettromagnete, sia in modo meccanico. Considerando che i forti terremoti sono piuttosto rarî per una data località, si capisce come non sarebbe stato conveniente l'adottare pel nuovo strumento la registrazione continua, come pure di far uso di sismoscopî estremamente sensibili i quali, al verificarsi anche di scosse minime, pongano in moto la zona affumicata senza speranza che gli stili dello strumento vi possano tracciar sopra altro che linee rette. Una volta che la zona affumicata ha cominciato a scorrere, può restare in movimento, senza che i tracciati si sovrappongano, per circa 7-8 minuti, tempo questo più che sufficiente per registrare completamente qualsiasi scossa, anche se di straordinaria durata. Anzi, potrà avvenire che si registri sulla stessa zona anche qualche scossa secondaria che, a pochissimi minuti di distanza, preceda o segua quella principale. Ad impedire poi che lo stesso tratto di zona passi due volte sotto gli aghi scriventi, basta regolare la lunghezza del cordoncino avvolto alla carrucola, che è fissata all'asse del cilindro motore; per modo che tagliando poi la zona in un punto intermedio al principio ed alla fine del sismogramma, si possa ottenere quest'ultimo tutto per intero ed aver così agio di poterlo studiare con maggiore facilità e senza aver bisogno di

doverlo ricopiare. Per raggiungere ancor meglio questo scopo, gli aghi scriventi, relativi alle componenti orizzontali, toccano il cilindro sulla stessa generatrice, in guisa che non vi è nemmeno bisogno di conoscere la così detta *parallasse*; e per conseguenza si può benissimo fare a meno di copiare il sismogramma, come si suol fare comunemente, spostando il tracciato d'una componente per rapporto all'altra, per correggere l'errore della *parallasse* e poi procedere alla ricomposizione del moto effettivo del suolo. Evidentemente, con la predetta disposizione resta diminuita la corsa degli aghi scriventi, relativi alle componenti orizzontali, non potendo l'uno passare al di sopra od al di sotto dell'altro; ma convien riflettere che ogni ago può muoversi per ben 6^{cm} al di qua ed al di là della sua posizione di riposo, e che il massimo ingrandimento, consentito dall'apparecchio, non supera quello di 1 a 2. Ad ogni modo, per prevenire che gli stili per le componenti orizzontali possano urtarsi tra loro, od uscire dalla zona affumicata, in caso di terremoti di straordinaria intensità, è prudente di porre opportuni ostacoli laterali alle masse dei pendoli orizzontali.

Allo scopo di segnare il tempo, è stata fissata sopra lo stesso meccanismo d'orologeria una piccola elettro-calamita, la cui àncora fa muovere, sul bordo corrispondente della carta, un quarto ago che scrive in modo identico a quelli dei tre stili e, mediante apposite viti di registro, può essere allineato con i due aghi relativi alle componenti orizzontali, in modo che anche qui non si abbia da tenere conto alcuno della così detta *parallasse*. Questa elettro-calamita è collegata ad un cronometro, che stabilisce un brevissimo contatto elettrico ad ogni secondo ed un altro, un po' meno breve, ad ogni minuto. Si è così in grado di poter conoscere l'ora esattissima d'ogni parte del sismogramma, quando siasi potuto riconoscere il primo minuto, segnato sulla zona di carta già in movimento, e ciò grazie ad un orologio sismoscopico che si pone in marcia all'istante stesso in cui comincia a ruotare il cilindro motore, in seguito al funzionamento di uno qualunque dei sismoscopî. Affinchè poi questo quarto ago, destinato alla misura del tempo, non debba agire inutilmente — scrivendo sulla zona di carta quando quest'ultima è ferma — e possa quindi a lungo andare perfino lacerarla nel punto ove la sfrega, è stato disposto, mediante un semplice interruttore, che la corrente lanciata dal cronometro non cominci a passare per l'elettro-calamita che solo al funzionare dei sismoscopî.

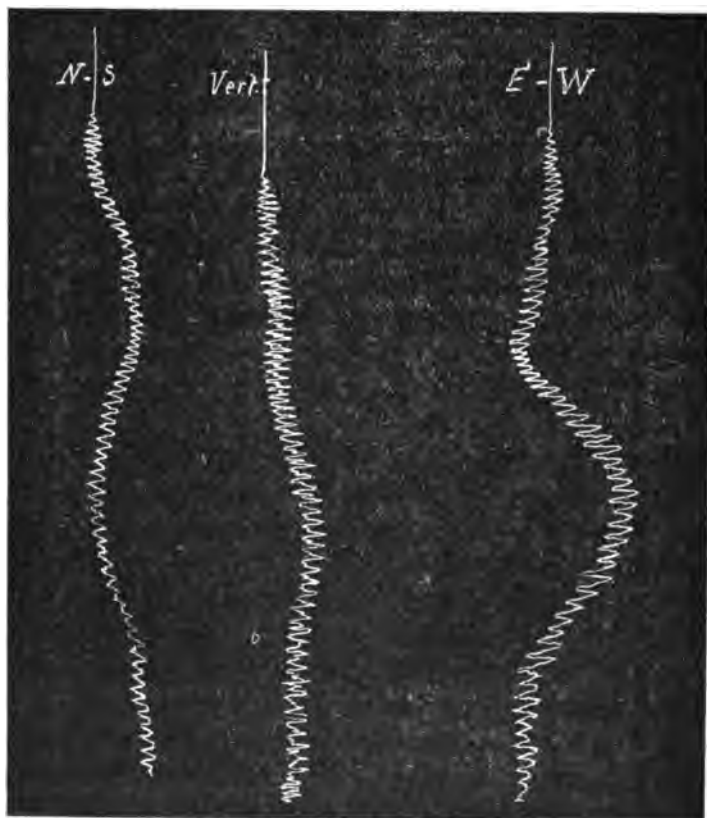
Fino ad oggi non si è verificato ancora a Rocca di Papa alcun terremoto un po' intenso, tale da mettere a prova il nuovo strumento, e da ottenerne un sismogramma per quanto di menoma importanza. Veramente il macrosismometrografo ha funzionato già due volte, e ciòè il 15 ottobre 1901, in occasione d'una scossa abbastanza sensibile negli Abruzzi, e di nuovo il 16 dicembre dello stesso anno, in seguito ad una moderata perturbazione sismica nell'Umbria; ma, com'era da aspettarsi, tutt'e due le volte gli stili

non lasciarono altro che linee rette, in quanto che le onde sismiche che passarono sul Lazio furono di sì poca entità da non essere menomamente avvertite dagli abitanti. In entrambe le volte tuttavia ebbe a constatarsi il buon funzionamento dello strumento e la registrazione esatta dei minuti e dei secondi sulla zona affumicata.

In mancanza di forti terremoti che fortunatamente non sono frequenti, ho voluto però rendermi conto del modo di funzionare del macrosismometrografo, prima ancora che fosse definitivamente installato all'Osservatorio di Rocca di Papa. A tal fine lo si collocò sopra una tavola quadrata sospesa, ai quattro angoli, a quattro robusti e corti saltaleoni in acciaio verticali e paralleli tra loro, in guisa da imprimere alla tavola movimenti piuttosto rapidi tanto in senso orizzontale, quanto in senso verticale, nel tempo stesso che si faceva scorrere la zona affumicata. Ognuno vede come in questa esperienza, al pari di quanto si verifica nei veri terremoti, abbian partecipato al movimento complicato della tavola non solo la base dell'apparecchio, ma gli stessi assi di rotazione dei due pendoli orizzontali e di quello verticale; e malgrado ciò si ottenne un sismogramma assai nitido, nel quale si videro le oscillazioni, impresse alla tavola, sovrapposte a quelle assai più lente corrispondenti alle oscillazioni proprie dei pendoli. Da una misura eseguita sul sismogramma si poterono ricavare valori in grande accordo con quelli direttamente osservati sulla direzione, ampiezza e periodo oscillatorio dei movimenti subìti dalla tavola.

Un' altra esperienza consistette nel collocare il macrosismometrografo sopra un piccolo carretto a quattro ruote, e nel farlo poi correre sopra un pavimento a mosaico, nel mentre che la zona di carta si spostava al di sotto degli stili. La seguente figura in zincofototipia riproduce fedelmente ed in vera grandezza un tratto del sismogramma artificiale, che si ottenne in una di queste prove. I sobbalzi del carretto, unitamente agli spostamenti bruschi del medesimo, vi appariscono distintamente sovrapposti alle lente ondulazioni, dovute esclusivamente al pendolo oscillante verticalmente ed ai due pendoli orizzontali N-S ed E-W. Il periodo oscillatorio semplice è di circa 4^s in ogni pendolo, mentre i tremiti principali, registrati dallo strumento, sono caratterizzati da un periodo semplice di poco più di $^1/_{10}$ di secondo per tutte e tre le componenti.

Dall' esame di questo sismogramma artificiale mi pare potersi logicamente concludere che, quando il periodo oscillatorio del suolo è assai rapido in confronto di quello strumentale, come appunto nel nostro caso, si è in grado di determinare con grande facilità ed approssimazione il moto assoluto d'una particella del suolo. Ma non v'è niun che non veda come, per raggiungere questo intento, bisogna assolutamente dare alla zona di carta velocità piuttosto considerevoli, senza di che tornerebbe ben difficile il voler misurare non tanto il periodo oscillatorio, quanto l'ampiezza e la direzione dell'effettivo

moto del suolo. Quello che asserisco riesce tanto più evidente, se vogliansi esaminare nel sismogramma riportato anche i tremiti secondarî che accompagnano quelli principali.

Salta agli occhi la difficoltà, per non dire impossibilità, di volerli studiare con una certa esattezza, nonostante che nel nostro caso la velocità di scorrimento della zona sia stata d'una trentina di metri all'ora, e perciò ben superiore a quella che taluni ancor si compiacciono d'adottare, dichiarandola più che sufficiente per i bisogni dell'odierna sismometria.

Fisica terrestre. — *Propagazione dei terremoti.* Nota di Giulio Grablovitz, presentata dal Socio Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Wavellite di Manziana* (Provincia di Roma). Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio STRUEVER.

Avendo avuto occasione di vedere a Biella la collezione di minerali dei fratelli Sella, mi colpì un esemplare (n. 3848 di catalogo) accompagnato dalla seguente etichetta: « Prehnite sopra trachite. — Manziana (Roma) » (¹).

Questa indicazione mi colpì non poco, perchè, per quanto è a mia conoscenza, la prehnite non è stata finora rinvenuta nei dintorni del lago di Bracciano. Mi parve quindi non inutile eseguire qualche saggio chimico per accertare la natura del singolare campione, ciò che mi fu subito concesso dai signori Corradino ed Alfonso Sella, ai quali mi è grato rendere anche qui i miei più vivi ringraziamenti.

Il minerale in questione si presenta in sfere e semisfere a struttura fibro-raggiata perfettissima, su un pezzo della solita trachite a grossi cristalli di sanidino, nota a Roma sotto il nome di *pietra della Manziana.*

Queste sfere, che superano talvolta anche 5 mm. di diametro, hanno colore superficiale verdognolo chiarissimo: somigliano dunque moltissimo, per il loro aspetto esterno, alla prehnite globulare della Val di Fassa. Molta somiglianza hanno ancora questi globuli di Manziana con la phillipsite fibro-raggiata, così frequente nella leucitite di Vallerano, nei dintorni di Roma.

Le poche proprietà ottiche e cristallografiche che si poterono determinare nei sottili individui che costituiscono i globuletti, e l'analisi chimica mi dimostrarono che si aveva a che fare con *wavellite.*

Gli individui separati dalle sferette mostrano al microscopio, tra nicol incrociati, estinzione parallela alla loro direzione di allungamento (asse z); in tre di essi si potè misurare con sufficiente approssimazione l'angolo del prisma, che risultò molto vicino a $53\,^1/_2{}^\circ$. In base alle costanti di Senff, accettate dal Dana, si avrebbe $(110):(1\bar{1}0) = 53^\circ\ 34\,^2/_3{}'$. Oltre il prisma fondamentale, si riconosce frequentemente il pinacoide }010{, ed in un cristallo notai anche due faccie terminali, ad un' estremità di z, che sono, con tutta probabilità, quelli di }101{.

La wavellite di Manziana al cannello non fonde, manda una viva luce e diventa bianca, opaca. Non ho potuto constatare il rigonfiamento indicato dal Des Cloizeaux e dal Dana nei loro trattati. Nel tubo chiuso svolge molta acqua a reazione fortemente acida, e diventa bianca, opaca. Colora, e nettamente, ove sia umettata con acido solforico, la fiamma in verde molto pallido.

(¹) Manziana è un piccolo paese sulla ferrovia Roma-Viterbo, a pochi chilometri dal lago di Bracciano.

Si scioglie completamente negli acidi: bisogna per altro porre grande attenzione nella scelta del materiale per l'analisi, perchè con la massima facilità si possono mescolare ad esso delle particelle feldspatiche [1], talchè si può essere tratti in inganno sull'azione che gli acidi effettivamente esercitano sul minerale.

Per determinare l'acido fosforico mi sono servito del metodo di Woy, così come è descritto dal Treadwell [2] nel suo recentissimo trattato: del resto ho seguito il Fresenius: per il fluoro ho fatto una determinazione a parte.

I risultati dell'analisi sono i seguenti:

P_2O_5	33,76
Al_2O_3	37,11
H_2O	26,69
F	2,05
	99,61

Si ha dunque la composizione di una wavellite molto pura: io infatti non ha potuto constatare la presenza del calcio e del magnesio: il ferro è presente in quantità indeterminabile.

Il Rammelsberg [3] per le wavelliti fluorifere ha calcolato, in base all'analisi che Pisani ha pubblicato della wavellite di Montebras, la formula seguente:

$$\left\{ \begin{array}{c} 24\,(Al^6\,P^4\,O^{19} + 12\,aq) \\ Al^6\,P^4\,Fl^{38} + 12\,aq \end{array} \right\}$$

Ma questa complicata formula resta non poco scossa dalla giusta osservazione che egli fa subito dopo, che, cioè, in base alle ricerche di Church sulla perdita d'acqua a varie temperature, la wavellite deve contenere $H^6\,Al^2\,O^6$.

A. Carnot [4] ha pubblicato qualche hanno fa, quattro analisi di wavelliti irlandesi ed americane, particolarmente interessanti per le esatte determinazioni di fluoro eseguite col suo elegante metodo: dai suoi risultati egli calcola la formula $2(P_2O_5, Al_2O_3) + Al_2(O_3, F_6) + 13\,H_2O$, nella quale $^1/_8 - ^1/_4$ dell'ossigeno nel secondo termine è sostituito da fluoro. Nella recensione di questo lavoro del Carnot, il Groth [5] propone per la wavellite l'ele-

[1] Se si osservano al microscopio delle sezioni un po' sottili delle sferette, si constata *talvolta* in esse la presenza di piccole quantità di sanidino.

[2] *Kurzes Lehrbuch der analytischen Chemie*, 1901, Bd. II, 292.

[3] *Handbuch der Mineralchemie*. Leipzig, 1875, 319.

[4] *Sur la composition chimique des wavellites et des turquoises*. C. R. 1894, CXVIII, 119.

[5] Zeitschr. f. Krystall. 1896, XXVI, 108.

gante e semplice formula $(PO_4)_2(AlOH)_3, 5H_2O$, nella quale $^1/_6$ dell'OH è sostituito da F. La wavellite di Manziana per la sua composizione si accorda perfettamente con la formula di Groth, la quale, infatti, richiede:

P_2O_5	33,9
Al_2O_3	36,8
H_2O	27
F	2,3
	100,0

La wavellite è molto rara in Italia. Molti anni fa, fu scoperta a N. O. dei monti di Allumiere in una trachite decomposta dal barone A. Klitsche de la Grange, e fu descritta dal Bombicci ed analizzata dal Lucchetti (1). L'averla ora ritrovata anche a Manziana, accenna ad una diffusione maggiore di questo minerale nella regione trachitica che intercede fra il lago di Bracciano ed il mare.

Petrografia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei.* II. *Jalotrachite rossa e grigio-cinerea ad augite ed egirina e tufo giallo.* Nota di E. Manasse (2), presentata dal Corrispondente De Stefani.

Jalotrachite rossa e grigio-cinerea.

Ad occhio nudo o munito di lente si riconoscono nella scoria rossa della Concola come già nelle scorie nere precedentemente descritte (3) segregazioni feldispatiche, pirosseniche e biotitiche; ma sono assai scarse. Al microscopio essa apparisce formata quasi esclusivamente da un vetro rosso, porosissimo e povero di microliti augitici e feldispatici e di trichiti. Le segregazioni porfiriche sono qui pure dovute al plagioclasio nelle sue diverse modalità, al sanidino, forse all'anortose, alla biotite, all'augite, all'egirina. Non mi riuscì scorgere nè l'orneblenda, nè l'hauina, nè la sodalite; e la roccia, trattata con acido nitrico, non dà reazione alcuna di anidride solforica, ma dà reazione di cloro (0,29 %). La magnetite esiste solo in piccola parte, chè essa è sostituita da ematite e da poca limonite.

(1) *Analisi della Wavellite recentemente scoperta alla Tolfa, presso le Allumiere.* Rend. Accad. Scienze dell'Ist. di Bologna, anno 1879-80.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

(3) Rend. Acc. Lincei, Serie 5ª, Vol. XI, fasc. 2°, pag. 85. 1902.

Ecco ora ciò che ottenni nell'analisi centesimale di questa jalotrachite rossa:

H^2O a 110°	0,25
H^2O sopra 110°	0,24
SiO^2	57,25
Al^2O^3	19,93
Fe^2O^3	4,83
FeO	2,27
MnO	0,09
CaO	3,40
MgO	1,78
K^2O	6,96
Na^2O	4,43
Ph^2O^5	tracce
Cl	0,29
	101,72
— O = 2Cl	0,07
	101,65

da cui, portando a 100 con esclusione di acqua, cloro e anidride fosforica, e deducendone le quantità molecolari dei componenti, la formula magmatica, α e β, si ha:

SiO^2	56,72	0,9390	0,9390	0,9390
Al^2O^3	19,74	0,1931	0,2229	0,2229
Fe^2O^3	4,79	0,0298		
FeO	2,25	0,0312	0,1361	0,2797
MnO	0,09	0,0012		
CaO	3,37	0,0601		
MgO	1,76	0,0436		
K^2O	6,89	0,0730	0,1436	
Na^2O	4,39	0,0706		
	100,00			

$$9{,}4\ SiO^2\ ;\ 2{,}2\ R^2O^3\ ;\ 2{,}8\ \bar{R}O,\ \text{ovvero}\ 4{,}3\ SiO^2\ ;\ R^2O^3\ ;\ 1{,}3\ \bar{R}O$$

$$\alpha = 1{,}98\ ;\ \beta = 54$$

$$R^2O : RO = 1 : 1\ ;\ Na^2O : K^2O = 1 : 1$$

Un campione di questa stessa scoria, ma con colorazione più chiara, cinereo-

rossastra, ricco in oligisto micaceo, e racchiudente dei frammenti consistenti, credo di tufo, diede all'analisi:

H^2O a 110°	0,15
H^2O sopra 110°	0,64
SiO^2	51,48
Al^2O^3	17,80
Fe^2O^3	14,27
FeO	1,59
MnO	0,15
CaO	0,89
MgO	1,04
K^2O	5,64
Na^2O	4,94
Cl	0,46
Ph^2O^5	tracce
	99,05
— O = 2Cl	0,10
	98,95

Un'altra scoria infine, raccolta pure alla Concola, ha colore grigio-cinereo ed è tanto friabile che riesce impossibile farne delle sezioni per lo studio microscopico. La sua composizione chimica, qui sotto riportata, corrisponde però assai bene a quella delle altre scorie. La sola differenza notevole consiste in un aumento dell'ossido ferrico e relativa diminuzione dell'ossido ferroso, e in un aumento dell'acqua di costituzione:

H^2O a 110°	0,19
H^2O sopra 110°	1,58
SiO^2	56,27
Al^2O^3	18,67
Fe^2O^3	5,74
FeO	1,58
CaO	4,47
MgO	1,44
K^2O	5,03
Na^2O	4,65
Ph^2O^5	tracce
Cl	tracce
	99,62

Da questa analisi si deduce:

SiO^2	57,50	0,9519	0,9519	0,9519
Al^2O^3	19,08	0,1866	0,2232	0,2232
Fe^2O^3	5,87	0,0366		
FeO	1,62	0,0225	0,1405	0,2716
CaO	4,57	0,0816		
MgO	1,47	0,0364		
K^2O	5,14	0,0545	0,1311	
Na^2O	4,75	0,0766		
	100,00			

$$9,5\,SiO^2 ; 2,2\,R^2O^3 ; 2,7\,\bar{R}O, \text{ ovvero } 4,3\,SiO^2 ; R^2O^3 ; 1,2\,\bar{R}O$$

$$\alpha = 2,02 ; \beta = 52$$

$$R^2O : RO = 1 : 1,1 \; ; \; K^2O : Na^2O = 1 : 1,4$$

Tutte quindi le scorie diversamente colorate del cratere del Fondo Riccio sono simili fra di loro e tutte, stando ai caratteri mineralogici, sono riferibili al tipo delle roccie trachitiche ad augite ed egirina con marcato carattere alcalino. Ma ove si dia maggiore importanza ai caratteri chimici che ai caratteri mineralogici, come il Loewinson-Lessing propone [1], le scorie studiate differiscono un poco dalle comuni trachiti (rocce neutre o mesiti a magma alcalino) e differiscono pure dalle andesiti (esse pure rocce neutre o mesiti a magma alcalino terroso); alle quali ultime potrebbero ravvicinarsi in certo modo per la prevalenza del feldispato sodico-calcico sul feldispato alcalino. Esse si avvicinano invece alle rocce intermedie alle trachiti e alle andesiti (rocce basiche o basiti a magma intermedio). Infatti per le scorie studiate si ha:

	Formula magmatica	α	β	$R^2O:RO$	$Na^2O:K^2O$
Scoria nera della Concola	$4,5\,SiO^2\,R^2O^3\,1,5\bar{R}O$	2,00	56	1 : 1,2	1 : 1,1
Scoria nera di Moscaglione. . . .	$4,1\,SiO^2\,R^2O^3\,1,4\bar{R}O$	1,87	59	1 : 1,5	1 : 1
Scoria rossa della Concola	$4,3\,SiO^2\,R^2O^3\,1,3\bar{R}O$	1,98	54	1 : 1	1 : 1
Scoria grigio-cinerea della Concola .	$4,3\,SiO^2\,R^2O^3\,1,2\bar{R}O$	2,02	52	1 : 1,1	1,4 : 1
Media . . .	$4,3\,SiO^2\,R^2O^3\,1,4\bar{R}O$	1,97	55	1 : 1,2	1,1 : 1

[1] *Note sur la classification et la nomenclature des roches éruptives.* Compte Rendu du Congrès géologique international, VII session, pag. 52. St. Pétersbourg, 1897; *Studien über die Eruptivgesteine,* id. id. id, pag. 193.

e il Loewinson-Lessing dà:

	Formula magmatica	α	β	$R^2O:RO$
Trachiti.	$5,2\ SiO^2\ R^2O^3\ 1,25\ \bar{R}O$	2,42	44	1 : 1,1
Trachiti Andesiti. . . .	$4,46\ SiO^2\ R^2O^3\ 1,4\ \bar{R}O$	2,07	53	1 : 1
Andesiti.	$5,2\ SiO^2\ R^2O^3\ 1,7\ \bar{R}O$	2,20	50	1 : 2,8

Ma si considerino esse rocce come dei vetrofiri trachitici, ovvero come vetrofiri trachitico-andesitici, sembrami in ogni modo che esse siano del tutto simili alle rocce del cratere scoriaceo centrale degli Astroni descritte dal Pampaloni ([1]) e da lui riferite al tipo delle trachiti augitiche e riportate invece dal Rosenbusch ([2]) al tipo delle trachiti ad augite ed egirina.

Tufo giallo pisolitico.

Il tufo giallo del Fondo Riccio è costituito da un vetro giallo-grigiastro, assai compatto, che fa da cemento a delle piccole pisoliti quasi arrotondate, nerastre, picee, misuranti uno o due centimetri nel loro maggiore diametro. È più abbondante però la materia giallognola terrosa avvolgente delle pisoliti stesse.

L'analisi chimica qualitativa, che io feci completa di questo tufo del Fondo Riccio, diede più abbondante di tutte la reazione della silice, indi dell'allumina, minore dell'ossido ferroso, dell'ossido ferrico, della calce, della potassa, della soda, minore ancora della magnesia e dell'acqua; diede infine soltanto tracce di cloro, di anidride carbonica e di anidride fosforica.

Le sezioni sottili di questo tufo, osservate al microscopio apparvero costituite principalmente da un vetro pochissimo poroso, grigio-giallognolo, e impregnato molto debolmente di carbonato calcico, come dimostrano le sole tracce avute di anidride carbonica. In mezzo al vetro sono rari i microliti di augite, rarissimi quelli di feldispato prevalentemente alcalino, le laminette di biotite e i trichiti o altre forme filamentose simili. Tal vetro fa da cemento alle pisoliti, le quali sono molto più porose della materia avvolgente e sono costituite esse pure da un vetro grigio-nero, o grigio-giallognolo se osservato in sezioni molto sottili, e da pochi cristalletti microlitici di augite e da pochissimi di biotite e di feldispato alcalino.

Come minerali porfirici inclusi nella sostanza cementizia vanno annoverati il sanidino, l'anortose, il plagioclasio, la biotite, l'augite, l'egirina, la

([1]) *Le rocce trachitiche degli Astroni nei Campi Flegrei*. I. *Rocce del cratere scoriaceo centrale*. Rendiconti R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. VIII, fasc, 2°, pag. 86, 1899.
([2]) *Mikrosk. Physiogr. d. Massigen Gesteine*, pag. 750, Stuttgart, 1896.

sodalite, la magnetite. L'ematite e la limonite vi si trovano come prodotti di decomposizione. In tutti poi i minerali porfirici abbondano in generale le inclusioni vetrose e scarseggiano quelle di apatite.

Più frequente è il feldispato alcalino, in parte anortose, in parte sanidino, il quale ora è in cristalli a contorni ben netti e spesso geminati con la legge di Carlsbad, ora in frammenti cristallini irregolari. Molto più scarso è il feldispato calcico-sodico e, sembrami, di varia acidità, con prevalenza di termini piuttosto basici. L'augite, verde, in prismetti e in frammenti irregolari, è frequente; talora è associata al plagioclasio, e spesso è circondata e framezzata da magnetite, la quale anche si trova in grosse sezioni di cristalli. L'ematite e la limonite sono secondarie; quest'ultima è frequente quasi quanto la magnetite. L'egirina in lamine isolate e la biotite sono più scarse dell'augite. Scarsissima è la sodalite, cui riferisco un cristallo incoloro, isotropo, quasi quadrato e della cui presenza fa fede il saggio chimico che ha dato reazione di cloro, sebbene in minime tracce.

In conclusione il tufo pisolitico giallo del Fondo Riccio, per la presenza di tutti questi minerali sopra descritti, risulta costituito dagli stessi materiali dei vetrofiri ed anche, può fin da ora dirsi, delle rocce ipocristalline e pure di natura trachitica che vi sono incluse, e di cui sarà detto in altra prossima Nota; materiali uniti in un impasto che si è poi alterato più o meno per azioni secondarie.

Chimica. — *Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento di alcune cloroanidridi inorganiche.* Nota IV [1] di G. Oddo, presentata dal Socio Paternò.

Nel lavoro sulle cloroanidridi inorganiche, eseguito in parte in collaborazione col dott. Serra [2], abbiamo osservato che alcune di esse in soluzione hanno un peso molecolare variabile con la natura del solvente e la temperatura. Riscontrammo questo fenomeno in modo notevole nell'ossicloruro di fosforo, per il quale col metodo ebullioscopico in soluzione nel tetraclometane e nel benzolo ottenemmo dei valori corrispondenti quasi alla formola doppia; e valori alquanto più bassi nel solfuro di carbonio (p. e. 47°); mentre nel cloroformio (p. e. 63°) e nell'etere ricavammo risultati corrispondenti alla formola semplice; similmente valori per la formola semplice ottenemmo nelle soluzioni benzoliche col metodo crioscopico. Paragonammo quindi questo

[1] V. pag. 85.
[2] Gazz. chim. ital. 1899, II, 318 e Rend. Acc. Lincei 1899, 244.

fenomeno di polimerizzazione che avviene all'ebollizione alla condensazione riscontrata crioscopicamente nei composti ossidrilati organici in soluzione nei solventi esenti d'ossidrile, come il benzolo; e io poi, in alcune ricerche chimiche (1) dimostrai come, sostituendo agli atomi di cloro dell'ossicloruro dei radicali organici positivi (anilidi), o negativi (esteri dei fenoli), nei primi derivati soltanto si manifesta la tendenza alla condensazione, ma questa non dà mai origine a prodotti a molecola doppia stabile, se si eccettua forse l'ossifosfazobenzolanilide, della quale però i caratteri di solubilità, mentre fanno ammettere la condensazione, impediscono di poterla dimostrare sperimentalmente.

Di altre cloroanidridi studiammo il comportamento ebullioscopico, ma con risultati poco soddisfacenti: quasi per tutte ottenemmo grandezze molecolari superiori alle calcolate per la molecola semplice; ma se per l'ossicloruro di fosforo l'intensità del fenomeno e il comportamento rispetto ai diversi solventi e segnatamente al cloroformio e al solfuro di carbonio ci fece ritenere senza esitanza che una polimerizzazione parziale realmente avvenisse, sugli altri risultati sollevammo dei dubbî; scrivemmo esplicitamente (2), « Con altre cloroanidridi abbiamo ottenuto dei risultati i quali possono far supporre finora che avvenga soltanto polimerizzazione parziale a caldo, che varia alquanto con la natura del solvente. Diciamo finora, perchè i valori dei pesi molecolari che pubblichiamo sono stati calcolati secondo la nota formola

$$M = \frac{C \cdot K}{I} .$$

In una prossima comunicazione dimostreremo quale sia il valore della tensione di vapore parziale delle singole sostanze disciolte, alla temperatura di ebollizione delle soluzioni usate, e, introducendo questa correzione, indicheremo i risultati definitivi. Si può prevedere però fin da ora che per alcuni di essi la correzione d'apportare sarà quasi trascurabile, poichè W. Nernst (3) con soluzioni di benzolo e cloroformio in etere trovò che il peso molecolare osservato supera quello corretto soltanto dal 10 al 20 %.

I risultati che ho ora ottenuto in parte collimano con queste nostre previsioni, in parte le hanno sorpassate: resta però confermato il fatto che alcune cloroanidridi e più di tutto finora l'ossicloruro di fosforo in alcune soluzioni bollenti tendono a polimerizzarsi.

In tutte l'esperienze riportate nelle tavole, la cloroanidride distillata col solvente veniva decomposta con acqua a temperatura ordinaria e, scacciato

(1) Gazz. chim. ital. 1899, II, 330.
(2) L. c.
(3) Zeits. phys. Chemie 8, 129.

il solvente organico, si dosava il cloro (o il bromo per l'ossibromuro) col metodo ponderale.

Ossicloruro di fosforo in tetraclorometane.

$\Gamma = 52,6$; $PO\,Cl_3 = 153,5$

		Determinazioni			
		I	II	III	IV
Frazione distillata	peso	4,6620	3,9516	4,0966	5,1878
	ossicloruro in essa contenuto	0,0327	0,0411	0,0462	0,0790
	solvente	4,6293	3,9105	4,0504	5,1088
	concentrazione (g_1)	0,7063	1,0510	1,1406	1,5463
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,4662	2,3869	2,9508	4,1322
	" finale	1,6435	2,6369	3,2874	4,8286
	media (g_2)	1,55485	2,5119	3,1191	4,4804
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,45	0,41	0,365	0,34
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,221	0°,356	0°,391	0°,570
	" finale	0, 243	0, 387	0, 481	0, 678
	media (Δ)	0, 232	0, 372	0, 436	0, 624
Molecola	osservata	352	355	376	378
	corretta	194	210	239	250

I valori ottenuti da me per la molecola osservata coincidono quasi del tutto con quelli precedentemente da noi pubblicati. Quantunque la correzione che in essi s'introduce sia molto elevata, tuttavia riesce evidente il fenomeno della condensazione, che cresce coll'aumentare della concentrazione.

Ossicloruro di fosforo in benzol.

$\Gamma = 26,7$; $PO\,Cl_3 = 153,5$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	1,9844	2,0506	2,1661
	ossicloruro in essa contenuto	0,0056	0,0138	0,0207
	solvente " "	1,9788	2,0368	2,1454
	concentrazione (g_1)	0,2829	0,6775	0,9648
Soluzione bollente	a concentrazione iniziale	0,9893	2,0702	3,3240
	" finale	1,1037	2,3093	3,8021
	media (g_2)	1,0465	2,18975	3,56305
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,27	0,31	0,27
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,080	0°,163	0°,290
	" finale	0, 094	0, 188	0, 320
	media (Δ)	0, 087	0, 176	0, 305
Molecola	osservata	321	332	312
	corretta	234	229	228

I risultati dell'altra memoria oscillavano tra 283 e 309, molecola non corretta.

È degno di nota che la volatilità dell'ossicloruro in questo solvente (p. e. 80,5) è inferiore che nel tetraclorometane (p. e. 78,5).

Ossicloruro di fosforo in cloroformio.

$\Gamma = 36,6$; $POCl_3 = 153,5$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,1953	7,1742	4,3812
	ossicloruro in essa contenuto	0,0024	0,0081	0,0078
	solvente	4,1929	7,1661	4,3734
	concentrazione (g_1)	0,0572	0,1130	0,1783
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,7673	2,5866	6,2765
	» finale	2,0137	3,3207	7,3866
	media (g_2)	1,8905	2,9536	6,8315
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,03	0,038	0,026
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,410	0°,560	1°,372
	» finale	0, 448	0, 760	1, 690
	media (Δ)	0, 429	6, 660	1, 531
Molecola	osservata	161	163	163
	corretta	153	156,8	158,7

Risulta da quest'esperienze che l'ossicloruro di fosforo è molto volatile in CCl_4 e lo è pochissimo in $CHCl_3$, quantunque questi due solventi abbiano costituzione paragonabile e il loro punto d'ebollizione non differisca che di 15°,5.

Non avendo a mia disposizione del solfuro di carbonio e per la difficoltà di poterlo avere in questa città prima delle vacanze estive, non ne ho potuto ripetere l'esperienze, quantunque presentassero un certo interesse; difatti, mentre in cloroformio (p. e. 63°) si ottengono, come abbiamo visto anche a molecola non corretta valori corrispondenti alla formola semplice, in solfuro di carbonio, che bolle a temperatura alquanto più bassa (47°), abbiamo ottenuto cifre molto più elevate (da 214 a 239).

Ho creduto inutile ripetere l'esperienze in etere, avendo ricavato, nelle determinazioni pubblicate, risultati che corrispondono alla molecola semplice.

Cloruro di tionile in cloroformio.

$\Gamma = 36,6$; $SOCl_2 = 119$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,1308	2,7328	2,4752
	cloruro di tionile in essa contenuto	0,0359	0,0322	0,0375
	solvente	4,0949	2,7006	2,4377
	concentrazione (g_1)	0,8767	1,1923	1,5383
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,5725	2,2455	3,3410
	» finale	1,6963	2,3429	3,5491
	media (g_2)	1,6344	2,2942	3,44505
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,53	0,52	0,44
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,207	0°,297	0°,370
	» finale	0, 235	0, 307	0, 426
	media (Δ)	0, 221	0, 302	0, 398
Molecola	osservata	271	278	316
	corretta	127	134	177

Col cloruro di tionile ho ottenuto per la « molecola osservata » dei risultati un po' superiori a quelli pubblicati (233-240 con concentrazione da 1,2 a 2,3 %; questa differenza io credo sia d'attribuire all'azione dell' $SOCl_2$ sui turaccioli di sughero, di cui allora facemmo uso per l'apparecchio ebullioscopico.

Anche questa cloroanidride mostra dunque tendenza a polimerizzarsi, tendenza che cresce coll'aumentare della concentrazione della soluzione.

Ossibromuro di fosforo in benzol.

$\Gamma = 26,7$; $POBr_3 = 287$

		Determinazione	
		I	II
Frazione distillata	peso	3,4087	5,6281
	ossibromuro in essa contenuto	0,0005	0,0023
	solvente	3,4082	5,6258
	concentrazione (g_1)	0,0146	0,0408
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,9692	5,8739
	" finale	2,5732	8,9012
	media (g_2)	2,2712	7,3875
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,006	0,005
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,176	0°,502
	" finale	0, 226	0, 721
	media (Δ)	0, 201	0, 612
Molecola	osservata	302	322
	corretta	300	320

I valori da me ottenuti, per la « molecola osservata » sono un po' inferiori a quelli già pubblicati (334-352) ed evidentemente per la causa menzionata dianzi. Accennano però sempre ad una condensazione che si va determinando nella molecola col crescere della concentrazione.

Solfocloruro di fosforo in benzol.

$\Gamma = 26,7$; $PSCl_3 = 169,5$

		Determinazioni	
		I	II
Frazione distillata	peso	4,5134	3,6619
	solfocloruro in essa contenuto	0,0061	0,0160
	solvente	4,5073	3,6459
	concentrazione (g_1)	0,1353	0,4388
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,5697	4,6856
	" finale	2,2421	6,4449
	media (g_2)	1,9059	5,5652
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,07	0,07
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,169	0°,537
	" finale	0, 233	0, 707
	media (Δ)	0, 201	0, 622
Molecola	osservata	253	239
	corretta	235	222

Per decomporre completamente il solfocloruro di fosforo distillato con la benzina e dosare il cloro ho dovuto farlo bollire a ricadere con acqua per circa due ore. A causa di questa difficoltà di decomposizione, ho rinunziato a ripetere le determinazioni in tetraclorometane, nel quale solvente del resto avevamo ottenuti valori non molto superiori a quelli calcolati per la molecola semplice (209).

Nelle due cloroanidridi contenenti zolfo che ho studiato, ho separato questo elemento dal cloruro d'argento precipitato sciogliendo in ammoniaca e riprecipitando con acido nitrico.

Protocloruro di zolfo in tetraclorometane.
$\Gamma = 52,6$; $S_2Cl_2 = 135$

		Determinazioni I	Determinazioni II
Frazione distillata	peso	6,6912	12,9743
	protocloruro in essa contenuto	0,0105	0,0520
	solvente	0,6807	12,9223
	concentrazione (g_1)	0,1572	0,4024
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,2976	2,5002
	" finale	1,7278	5,0104
	media (g_2)	1,5127	3,7553
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,10	0,10
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,422	0°,802
	" finale	0 ,540	1, 520
	media (Δ)	0, 481	1, 161
Molecola	osservata	165	170
	corretta	149	153

Protocloruro di zolfo in benzolo.
$\Gamma = 26,7$; $S_2Cl_2 = 135$

		Determinazioni I	Determinazioni II
Frazione distillata	peso	3,0400	3,2500
	protocloruro in essa contenuto	0,0048	0,0059
	solvente	3,0352	3,2441
	concentrazione (g_1)	0,1581	0,1818
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,2578	2,0132
	" finale	1,6000	2,7484
	media (g_2)	1,4289	2,3808
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,11	0,08
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,205	0°,302
	" finale	0, 258	0, 460
	media (Δ)	0, 232	0, 381
Molecola	osservata	164	167
	corretta	146	154

Per la « molecola osservata » ho ottenuto con questo solvente dei risultati un po' inferiori a quelli pubblicati nell'altra nota. Il protocloruro di zolfo

sia in tetraclorometane che in benzolo mostra debole tendenza a polimerizzarsi, che aumenta anche lentamente col crescere della concentrazione.

Conclusioni.

Riassumo i risultati definitivi di tutte le ricerche descritte in questa e nelle quattro note precedenti che ho citato a principio di questo lavoro.

1°. L'iodio nelle soluzioni bollenti in solfuro di carbonio, benzolo e alcool etilico mostra molecole biatomiche; invece in cloroformio e tetraclorometane assieme alle biatomiche conserva molecole tetraatomiche. Il numero degli atomi che costituiscono le molecole e si rivelano ebullioscopicamente, sembra non abbia alcuna influenza sulla colorazione della soluzione; difatti questa è violetta sia nel solfuro di carbonio che nel cloroformio e nel tetraclorometane.

2°. Una proprietà quasi analoga a quella dell'iodio mostrano alcune anidridi alogenate inorganiche: in parecchi solventi all'ebollizione tendono a polimerizzarsi: ciò avviene principalmente con l'ossicloruro di fosforo in tetraclorometane e benzolo; meno col cloruro di tionile in cloroformio, con l'ossibromuro e il solfocloruro di fosforo in benzolo; molto poco col protocloruro di zolfo in tetraclorometane e benzolo.

È degno di nota che crioscopicamente tutte queste anidridi in soluzione nel benzolo mostrano molecola semplice, anche a concentrazioni alquanto elevate. È una polimerizzazione molto labile che avviene quindi in condizioni speciali di temperatura e di soluzione.

Molecola semplice col metodo crioscopico in benzolo mostrano il cloruro di cromile e di solforile, che non si prestano per lo studio ebullioscopico.

3°. Sostituendo nell'ossicloruro di fosforo gli atomi di cloro con i radicali $C_6H_5.NH$ — e $C_6H_5.O$ — non si riesce ad isolare dei derivati della forma polimerica. La fosfossibicloromonoanilide $C_6H_5.NH.POCl_2$ mostra in benzolo sia col metodo crioscopico che con l'ebullioscopico notevole tendenza a polimerizzarsi; nulla posso dire della bi- e trianilide, perchè poco solubili in questo solvente. Nell'alcool etilico col metodo ebullioscopico la prima mostra molecola semplice, ma reagisce col solvente; la seconda fornisce dei valori superiori a quelli calcolati per la molecola semplice.

Per tutti i suoi caratteri fisici (punto di fusione, solubilità ecc.) e anche chimici debbo ritenere come derivato di una forma polimerica dell'ossicloruro (forse la dimera) l'ossifosfoazobenzolanilide $\begin{matrix} C_6H_5 . N \\ C_6H_5 . NH \end{matrix} \!\!>\! PO$, descritta la prima volta da A. Michaelis e Silberstein; e similmente il fosfonitrile di Gladstone, al quale si è attribuito finora la formola semplice NPO; ma appunto per la mancanza d'un solvente, non si riesce a determinare nè nell'uno nè nell'altro la grandezza molecolare.

Gli eteri fenolici $C_6H_5O.POCl_2$ e $(C_6H_5O)_3PO$, i soli che si riesca ad ottenere puri, anche nel benzolo bollente, al contrario delle anilidi, mostrano molecola semplice.

4°. Lo zolfo in tetraclorometane col metodo ebullioscopico mostra la molecola costituita da otto atomi.

5°. Il pentacloruro di fosforo nel medesimo solvente e pure col metodo ebullioscopico, mostra molecola semplice.

6°. Il protocloruro e il tricloruro di iodio in soluzione nel tetraclorometane invece di farne inalzare ii punto d'ebollizione lo abbassano, perchè si dissociano.

7°. Dirò finalmente che questo lavoro ci ha permesso di modificare alcuni processi di preparazione di cloroanidridi e trovarne qualche altro [1] nuovo; ho potuto semplificare, come risulta da questa memoria, il metodo per la determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili; e trovare altri fatti nuovi, come l'azione clorurante d'un miscuglio d'ossicloruro di fosforo e clorato potassico, l'eliminazione di HCl dalle monoanilidi $R.NH.POCl_2$ con formazione di una nuova classe di corpi; fatti quest'ultimi che non mancherò di studiare estesamente, quando i mezzi e gli aiuti necessarî me lo permetteranno.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Righi ed Abetti, ed un lavoro a stampa del professore Gino Loria, avente per titolo: *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche.*

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società italiana delle scienze (detta dei XL) di Roma; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società di scienze naturali di Emden: la Società zoologica di Tokyo; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la R. Scuola Navale superiore di Genova; il R. Istituto Geodetico di Potsdam.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società geologica di Calcutta; le Università di Groningen, di Marburg e di Greifswald.

[1] Gazz. chim. ital. 1899 (II) 333 e 355.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 febbraio 1902.

Abetti A. — Galileo in Arcetri. Firenze, 1901. 8°.

Id. — L'Osservatorio astronomico di Arcetri. Appunti storici ed illustrazioni. Firenze, 1901. 4°.

Boffito G. — Intorno alla « Quaestio de aqua & terra » attribuita a Dante. Memoria I. La controversia dell'acqua e della terra prima e dopo Dante. Torino, 1902. 2°.

Brough B. H. — Te Scarcity of Coal. London, 1900. 8°.

Chantre E. — Les Barabra. Esquisse ethnographique et anthropométrique. Lyon, 1901. 8°.

Id. — Les Béduins d'Égypte. Esquisse ethnographique et anthropométrique. Lyon, 1901 8°.

Della Rovere D. — De l'infection des animaux à sang froid par le bacille ictérode. Paris, 1901. 8°.

Fritsche H. — Die Tägliche Periode der Erdmagnetischen Elemente. St. Petersburg, 1902. 8°.

Kölliker A. v. — Ueber einen noch unbekannten Nerven-Zellenkern im Rückenmark der Vögel. Wien, 1901. 8°.

Loria G. — Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. Leipzig, 1891. 8°.

Marson L. — Nevai di circo e tracce carsiche e glaciali nel Gruppo del Cavallo. Milano, 1901. 8°.

Nordhavs-Expedition (Den Norske). XXVIII Zoologi. Mollusca III ved H. Friele og J. A. Grieg. Christiania, 1901. 4°.

Passerini N. — Sui tubercoli radicali della M e d i c a g o s a t i v a L. Firenze, 1901. 8°.

Righi A. — Sulla questione del campo magnetico generato dalla convezione elettrica e su altre analoghe questioni. Pisa, 1901. 8°.

Tommasina Th. — Sur l'auscultation des orages lointains et sur l'étude de la variation diurne de l'électricité athmosphérique. Paris, 1901. 4°.

Id. — Sus l'existence de rayons qui subissent la réflexion dans le rayonnement émis par un mélange de chlorures de radium et de baryum. Paris, 1901. 4°.

Walzof S. — Tremblements de terre en Bulgarie an XIX siècle. Sofia, 1902. 8°

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 febbraio 1902.

Presidenza del Socio anziano L. LUZZATTI.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di fattoriali.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

In due recenti comunicazioni all'Accademia delle Scienze di Parigi (¹), il sig. Niels Nielsen richiama l'attenzione sulle serie di fattoriali, dando notevoli condizioni relative alla sviluppabilità delle funzioni in serie della forma

$$\Sigma c_n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{1}$$

Simili serie, insieme con le analoghe

$$\Sigma c_n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \tag{2}$$

mi sono sempre sembrate meritevoli di un particolare interesse (²), specialmente per una questione che risale al Laplace, ma che è stata ridestata di recente e tiene occupati con successo i moderni analisti, particolarmente i francesi; intendo la questione della relazione fra una serie di potenze ed il coefficiente del suo termine generale considerato come funzione dell'indice:

(¹) Comptes Rendus, T. CXXXIII e CXXXIV, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902.
(²) V. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, T. II, dicembre 1888 e T. XIV, dicembre 1890, e Annali di Matematica, S. III, T. IV, pag. 245.

infatti, per molteplici classi di serie di potenze di z, il coefficiente, considerato come funzione del suo indice x, ammette sviluppi in serie della forma (1) o (2).

A questo proposito mi sia concesso di rilevare una notevole affermazione fatta dal sig. E. Lindelöf in una recente occasione [1]: ed è che bene spesso, più dell'ordine di grandezza dei coefficienti di una serie di potenze, ha importanza, nello studio di tale serie, la forma sotto cui si presenta questo coefficiente come funzione dell'indice. Il sig. Lindelöf limita questa osservazione alle serie rappresentanti funzioni intere, ma la portata di essa mi sembra generale.

In questa prima Nota mi fermerò sulla questione della convergenza delle serie della forma (1) e (2), dandone la condizione con qualche maggiore precisione di quanto si faccia per solito e rilevando, da questa condizione, un fatto che mi sembra non sia stato per anco avvertito nella sua generalità, sebbene assai degno di considerazione.

1. Si consideri una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)}$$

dove $c_0, c_1, \dots c_n, \dots$ è una successione qualsivoglia di numeri reali o complessi, ed x, y sono due variabili complesse. Si formi la successione

$$\frac{\log|c_n|}{\log n} \tag{4}$$

e sia k il suo massimo limite [2]; k è un numero reale finito od infinito. Indicando con $R(a)$ la parte reale di a, escludendo per x ed y valori interi negativi, e prendendo

$$R(x) < R(y) - k - 1, \tag{5}$$

la serie (3) è assolutamente convergente.

[1] Comptes Rendus, T. CXXXIII, 30 décembre 1901.

[2] Intendo con ciò quel numero che il Cauchy chiamava *la plus grande des limites*. Esso coincide col massimo dell'insieme derivato di (4), tranne il caso in cui i numeri di (4) hanno un massimo m non appartenente all'insieme derivato il quale si presenti infinite volte nella successione stessa: in tale caso è questo numero m che va preso come massimo limite. (V. Hadamard, *la Série de Taylor*, Paris, C. Naud, 1901, pag. 15). È da notare come la successione (4) si presenti (id., ibid., pag. 45) nello studio di una serie di Taylor sulla sua circonferenza di convergenza.

Infatti, verificata la (5), si potrà determinare un numero ε positivo abbastanza piccolo perchè sia anche

$$\mathrm{R}(x) < \mathrm{R}(y) - k - 1 - \varepsilon . \tag{5'}$$

Ora, da un valore dell'indice n in poi, segue, dall'essere k il massimo limite di (4), che è

$$|c_n| < n^{k+\varepsilon} .$$

Inoltre, dalla teoria della funzione Γ segue che

$$\lim_{n=\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!\, n^{x-1}} = \frac{1}{\Gamma(x)},$$

onde risulta che, essendo m un numero positivo finito, si ha

$$\left| \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)} \right| < m n^{\mathrm{R}(x-y)} .$$

Ne viene

$$\left| c_n \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)} \right| < m n^{\mathrm{R}(x-y)+k+\varepsilon},$$

e poichè, per la (5'), l'esponente di n è minore di -1, la serie (3) è assolutamente convergente.

Prendendo invece

$$\mathrm{R}(x) > \mathrm{R}(y) - k, \tag{6}$$

la serie (3) è divergente. Infatti, per essere k il massimo limite di (4), per infiniti valori di n si ha

$$|c_n| > n^{k-\varepsilon'},$$

dove ε' si è preso abbastanza piccolo perchè sia anche

$$\mathrm{R}(x) > \mathrm{R}(y) - k + \varepsilon',$$

E poichè, essendo m' un numero positivo finito e non nullo, si ha, per la formula citata della teoria della funzione Γ, che è per i detti valori di n:

$$\left| c_n \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)} \right| > m' n^{\mathrm{R}(x-y)+k-\varepsilon'}$$

dove l'esponente di n è positivo, ne viene che infiniti termini della (3) hanno il modulo superiore ai numeri di un sistema crescente indefinitamente, e quindi la serie stessa è divergente.

2. Supposto fissato y, risulta dal teorema precedente che la serie (3) è convergente assolutamente ed uniformemente rispetto ad x, a sinistra della parallela all'asse immaginario condotta per il punto $x = y - k - 1$, ed è divergente a destra della parallela condotta per il punto $x = y - k$. Fra queste due parallele è compresa una striscia, che si può chiamare **striscia neutra**; il teorema del numero precedente non c'insegna quale sia il comportamento della (3) per i valori della x compresi entro quella striscia. Ma assoggettando i coefficienti c_n a qualche altra condizione, anche se assai poco restrittiva; p. es., supponendo che sia

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{k + ih}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}, \tag{7}$$

dove ε_n va a zero con $n = \infty$ e k, h sono numeri reali, il primo dei quali, come è facile vedere, non differisce dal massimo limite di $\frac{\log|c_n|}{\log n}$, si può dire qualche cosa di più circa al comportamento delle (3) quando x è preso entro alla striscia neutra. Infatti, posto

$$u_n = c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)},$$

viene

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{k + ih + x - y}{n} + \frac{\varepsilon'_n}{n},$$

e quindi, prendendo i moduli:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 + \frac{k + \mathrm{R}(x-y)}{n} + \frac{\varepsilon''_n}{n},$$

dove ε'_n, ε''_n vanno a zero per $n = \infty$. Ne viene che se è

$$\mathrm{R}(x-y) + k < 0,$$

cioè se si prende x a sinistra della parallela all'asse immaginario condotta per $y - k$, i termini della serie (3) vanno decrescendo in valore assoluto e tendendo a zero. Ciò accade quindi anche nella striscia neutra, oltrecchè nel campo di convergenza, permettendoci in conseguenza di dare facilmente condizioni di convergenza valide in codesta striscia; soltanto, mentre nel campo di convergenza definito da

$$\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(y) < -k - 1$$

la convergenza è assoluta, nella striscia neutra la serie, se convergente, lo è

solo semplicemente, come mostra l'applicazione del noto criterio di Raabe.

Ad esempio, ogni serie trigonometrica della forma

$$\Sigma c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)} \cos n\theta ,$$

in cui le c_n soddisfano alla condizione (7), è convergente semplicemente (¹) per ogni valore di x preso nella striscia neutra e per θ diverso da un multiplo di 2π.

La nota proposizione sulla serie binomiale

$$\Sigma \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!} z^n$$

per $|z|=1$ si deduce facilmente da quanto precede.

3. Le considerazioni precedenti conducono a dividere le serie della forma (3) in tre classi.

Una prima classe è costituita da quelle serie per cui è

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |c_n|}{\log n} = -\infty .$$

Esse sono assolutamente convergenti per tutte le coppie di valori di x e di y. In particolare, appartengono alla detta classe tutte le serie (3) per le quali la successione delle c_n è tale che $\Sigma c_n z^n$ converga in un cerchio di raggio maggiore dell'unità.

Alla seconda classe apparterranno quelle serie per le quali k ha un valore finito. Per ogni valore $\bar{y}$ assegnato ad y, esiste per queste serie, nel piano della variabile x, un campo di convergenza (assoluta), un campo di divergenza, ed una striscia neutra in cui può accadere, in casi estesi, che la serie converga semplicemente. Queste tre regioni sono rispettivamente caratterizzate da

$$\begin{aligned} &R(x) < R(\bar{y}) - k - 1 , \\ &R(x) > R(\bar{y}) - k , \\ &R(\bar{y}) - k - 1 < R(x) < R(\bar{y}) - k . \end{aligned}$$

Infine, formano la terza classe quelle serie per cui si ha $k = +\infty$. Esse sono divergenti per tutti i valori di x e di y. Questo caso si presenta, in

(¹) Per un noto teorema; v. p. es. Picard, *Traité d'Analyse*, 2^me^ édition, T. I, pag. 251.

particolare, quando la successione c_n è tale che la serie $\Sigma c_n x^n$ abbia un raggio di convergenza inferiore ad uno.

4. Ad ogni successione data

$$c_0, c_1, c_2, \dots c_n, \dots$$

si può fare corrispondere una serie di potenze $\Sigma c_n x^n$, e ad ogni proprietà della successione corrisponde una proprietà per la funzione analitica definita dalla serie ([1]). Fra queste proprietà, la prima e la più elementare riguarda il cerchio in cui converge la serie di potenze; la sua determinazione è fondata sul più elementare dei criterî di convergenza, quello che considera il massimo limite di $\sqrt[n]{|c_n|}$. A tutte le successioni per le quali questo massimo limite è il medesimo, corrispondono serie di potenze aventi il medesimo raggio di convergenza. Se ora alle potenze si sostituiscono fattoriali; se, per es., nelle serie di potenze aventi l'unità come raggio di convergenza, si sostituisce ad x^n il fattoriale

$$\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!},$$

i campi di convergenza vengono a distinguersi; le serie di fattoriali convergono in aree diverse, le quali vengono a dipendere da un criterio di convergenza più discriminativo del precedente, cioè da quello fondato sulla considerazione del massimo limite di $\frac{\log|c_n|}{\log n}$.

La sostituzione dei fattoriali alle potenze nelle serie $\Sigma c_n x^n$ produce dunque, per così dire, una dilatazione nell'insieme di quelle che hanno uno stesso cerchio di convergenza. Un'altra dilatazione si produce, per fatto di quella sostituzione, nel limite fra la regione di convergenza e quella di divergenza; mentre infatti questo limite, nelle serie di potenze, è costituito semplicemente dalla circonferenza di convergenza, esso si dilata, nelle serie di fattoriali, in una striscia compresa fra due parallele all'asse immaginario, quella che abbiamo chiamata striscia neutra.

([1]) È noto dai lavori di Borel, Le Roy ed altri, come anche alle serie di potenze costantemente divergenti si possa fare corrispondere una funzione analitica determinata.

Meccanica. — *Sul principio delle immagini di lord Kelvin e le equazioni dell'elasticità.* Nota del Corrisp. C. Somigliana.

Non credo sia stato finora osservato che il principio delle immagini di lord Kelvin può essere esteso alle equazioni della elasticità, e conduce, sotto certe condizioni, e in certi casi, alla loro integrazione in campi limitati da piani, analoghi a quelli nei quali esso porta alla soluzione del problema di Dirichlet. Però le condizioni al contorno, che conviene supporre conosciute, non sono quelle che più ordinariamente si considerano, cioè le componenti degli spostamenti o quelle delle forze superficiali esterne, ma parte delle une e parte delle altre, cioè due delle componenti di spostamento ed una di pressione o viceversa. Questi problemi, del resto, vengono di solito considerati come di natura più complessa dei precedenti.

1. Supponiamo che il mezzo elastico, che si considera, sia cristallino ed ammetta il piano $z = 0$ come piano di simmetria. Le considerazioni che seguono sono valide per tutti i mezzi cristallini che godono di questa proprietà, in particolare quindi anche pei mezzi isotropi, e per quelli incompletamente isotropi, che hanno un asse d'isotropia parallelo all'asse delle z.

Il potenziale elastico, quando il piano $z = 0$ è di simmetria, ha la forma

$$\begin{aligned} 2\Pi = c_{11}\, x_x^2 + c_{22}\, y_y^2 + c_{33}\, z_z^2 + 2c_{23}\, y_y z_z + 2c_{31}\, z_z x_x + 2c_{12}\, x_x y_y \\ + c_{44}\, y_z^2 + c_{55}\, z_x^2 + 2c_{54}\, y_z z_x \\ + 2x_y(c_{16}\, x_x + c_{26}\, y_y + c_{36}\, z_z) + c_{66}\, x_y^2 \end{aligned}$$

e quindi per le componenti di pressione si ha

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} -X_x &= c_{11}\, x_x + c_{12}\, y_y + c_{13}\, z_z + c_{16}\, x_y \\ -Y_y &= c_{21}\, x_x + c_{22}\, y_y + c_{23}\, z_z + c_{26}\, x_y \\ -Z_z &= c_{31}\, x_x + c_{32}\, y_y + c_{33}\, z_z + c_{36}\, x_y \\ -Y_z &= c_{44}\, y_z + c_{45}\, z_x \\ -Z_x &= c_{54}\, y_z + c_{55}\, z_x \\ -X_y &= c_{16}\, x_z + c_{26}\, y_y + c_{36}\, z_z + c_{66}\, x_y \end{aligned} \right.$$

e le equazioni dell'equilibrio, supposte nulle le forze di massa, sono, come è notissimo,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right.$$

Se ora noi facciamo la seguente trasformazione

$$\begin{array}{ll} u' = u & x' = x \\ v' = v & y' = y \\ w' = -w & z' = -z \end{array}$$

le equazioni (2), a cagione della proprietà di simmetria ammessa, si mutano nelle equazioni formate colle u', v', w', x', y', z' in modo identico a quello con cui le (2) sono formate colle u, v, w, x, y, z. Noi possiamo interpretare questa proprietà anche dicendo: *Se tre funzioni*

$$u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)$$

sono integrali delle equazioni (2), *anche le funzioni*

$$\overline{u} = u(x, y, -z) \quad \overline{v} = v(x, y, -z) \quad \overline{w} = -w(x, y, -z)$$

godono della stessa proprietà.

Cerchiamo ora quali relazioni passano fra le componenti L, M, N delle forze superficiali che mantengono in equilibrio il corpo quando in esso avviene la deformazione u, v, w, e le analoghe $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ che adempiono lo stesso ufficio quando nel corpo si ha la deformazione $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$. Per le L, M, N si ha

$$2') \qquad \begin{aligned} L &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ M &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ N &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) \end{aligned}$$

ove n indica la normale diretta verso l'interno del corpo, e per avere le $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ dovremo costruire le espressioni analoghe a quelle dei secondi membri formate colle

$$\overline{1}) \qquad -\overline{X}_x = c_{11}\,\overline{x}_x + c_{12}\,\overline{x}_y + c_{13}\,\overline{z}_z + c_{16}\,\overline{x}_y$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

In generale quindi non è possibile avere relazioni semplici fra i due sistemi di forze superficiali, se il corpo che si considera ha una forma qualsiasi. Però se esso è limitato dal piano $z = 0$, e formato ad es. dello spazio indefinito che si trova dalla banda positiva di questo piano, tali relazioni si riducono semplicissime.

Infatti se data una funzione $f = f(x, y, z)$, noi formiamo la funzione

$$F = f(x, y, -z)$$

è facile vedere che, per $z = 0$, sono soddisfatte le seguenti relazioni

$$f = F$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e quindi, ricordando le espressioni delle componenti di deformazione, si trova subito che, per $z=0$, sono soddisfatte le relazioni:

$$\bar{x}_x = x_x \qquad \bar{y}_y = y_y \qquad \bar{z}_z = z_z$$
$$\bar{y}_z = -y_z \quad \bar{z}_x = -z_x \quad \bar{x}_y = x_y$$

e quindi a cagione delle (1) anche le seguenti:

$$\bar{X}_x = X_x \qquad \bar{Y}_y = Y_y \qquad \bar{Z}_z = Z_z$$
$$\bar{Y}_z = -Y_z \quad \bar{Z}_x = -Z_x \quad \bar{X}_y = X_y$$

Ora nel caso in cui la superficie che limita il corpo è il piano $z=0$, si ha

$$\cos(nx) = 0 \quad \cos(ny) = 0 \quad \cos(nz) = 1$$

quindi, osservando le (2′) ($\bar{1}$), concludiamo subito che si hanno le relazioni

$$\bar{L} = -L \quad \bar{M} = -M \quad \bar{N} = N$$

Riassumendo possiamo dire:

Si abbia un corpo limitato dal piano $z=0$, e la cui struttura cristallina ammetta come piani di simmetria i piani a questo paralleli, e siano

$$u(x,y,z)\ ,\ v(x,y,z)\ ,\ w(x,y,z)$$
$$L \quad , \quad M \quad , \quad N$$

gli spostamenti e le corrispondenti forze superficiali che determinano una speciale deformazione elastica del corpo. Il corpo stesso rimarrà ancora in equilibrio, quando in esso avvengono gli spostamenti

$$u(x,y,-z)\ ,\ v(x,y,-z)\ ,\ -w(x,y,-z)$$

mentre alla superficie sono applicate forze le cui componenti sono

$$-L\ ,\ -M\ ,\ N.$$

Noi diremo che le due terne integrali u, v, w e $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ si ottengono l'una dall'altra *per riflessione* sul piano $z=0$.

Questo teorema ha, rispetto alle equazioni dell'elasticità considerate, lo stesso valore che il principio delle immagini rispetto all'equazione di Laplace. Vediamo come.

2. Dato un sistema qualsiasi di integrali u, v, w delle equazioni dell'equilibrio considerate, corrispondenti alle forze superficiali L, M, N, poniamo

$$u_1 = u - \bar{u} \quad v_1 = v - \bar{v} \quad w_1 = w - \bar{w} \tag{3}$$

Le u_1, v_1, w_1 costituiranno una nuova terna integrale delle equazioni d'equilibrio, la quale sul piano $z = 0$ soddisferà alle condizioni

$$(4) \qquad u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad N_1 = 0,$$

se chiamiamo L_1, M_1, N_1 le componenti delle forze che applicate sul piano $z = 0$ producono gli spostamenti u_1, v_1, w_1.

Analogamente otterremo una nuova terna integrale ponendo

$$(3') \qquad u_2 = u + \bar{u} \quad v_2 = v + \bar{v} \quad w_2 = w + \bar{w}$$

per la quale invece avremo sul piano $z = 0$

$$(4') \qquad w_2 = 0 \quad L_2 = 0 \quad M_2 = 0$$

Data dunque una terna integrale qualsiasi, possiamo subito dedurne due altre le quali soddisfano alle condizioni che, sul piano $z = 0$, sono nulle le due componenti tangenziali dello spostamento e la componente normale della pressione superficiale, o viceversa sono nulle le due componenti tangenziali della pressione e la componente normale dello spostamento.

Supponiamo che le u, v, w siano regolari in tutto lo spazio $z \geq 0$, all'infuori che in un punto (a, b, c), e siano omogenee di grado -1 nelle variabili $x - a$, $y - b$, $z - c$. La esistenza di tali integrali in generale per le equazioni della elasticità è stata dimostrata in un lavoro recente (*Acta mathematica*, 23, 1900) quantunque si presentino delle difficoltà ad ottenerne espressioni semplici mediante i coefficienti delle equazioni d'equilibrio. Nel caso della isotropia soddisfanno alle condizioni suddette gli spostamenti che si ottengono prendendo per terna di funzioni generatrici due costanti e la funzione

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Sono gli integrali che hanno per le equazioni dell'isotropia lo stesso ufficio che il potenziale newtoniano elementare $\frac{1}{r}$ ha per l'equazione di Laplace, e mi hanno servito altre volte per trovare le formole che, per le equazioni della elasticità, sono equivalenti a quella di Green.

Per spostamenti di tal fatta le componenti delle pressioni interne risulteranno regolari in tutto lo spazio $z \geq 0$, eccetto che nel punto (a, b, c) e saranno funzioni omogenee di grado -2. Inoltre le funzioni $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ corrispondenti avranno al pari delle u, v, w un solo punto di singolarità, ma questo sarà nel punto $x = a$, $y = b$, $z = -c$, e quindi esterno dal campo $z \geq 0$. Perciò anche gli spostamenti u_1, v_1, w_1 e u_2, v_2, w_2 definiti dalle (3) (3') saranno omogenei di grado -1, con un solo punto isolato di singolarità in (a, b, c), e le pressioni ad essi corrispondenti saranno funzioni omogenee di grado -2.

Ciò posto, supponiamo che sulla superficie $z=0$ del corpo dato siano applicate delle forze L, M, N, e indichiamo con u, v, w le componenti degli spostamenti prodotti. Noi potremo applicare il teorema di Betti alle due terne di integrali

$$\begin{matrix} u & v & w \\ L & M & N \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{matrix}$$

purchè dal campo $z \geq 0$ venga escluso il punto (a, b, c) mediante una piccola sfera σ avente il centro in esso. Avremo, ricordando le (4), e indicando con s la superficie limite del corpo,

$$\int_s (uL_1 + vM_1)\, s - \int_s w_1 N ds = \int_\sigma (uL_1^{(\sigma)} + vM_1^{(\sigma)} + wN_1^{(\sigma)})\, d\sigma$$
$$- \int_\sigma (u_1 L^{(\sigma)} + v_1 M^{(\sigma)} + w_1 N^{(\sigma)})\, d\sigma$$

dove con $L_1^{(\sigma)}$ $M_1^{(\sigma)}$ $N_1^{(\sigma)}$ indichiamo le componenti delle forze che conviene applicare sulla superficie σ, onde mantenere l'equilibrio, quando è soppressa questa parte del corpo, mentre si ha la deformazione u_1, v_1, w_1; ed $L^{(\sigma)}$, $M^{(\sigma)}$, $N^{(\sigma)}$ hanno un significato analogo riguardo alla deformazione u, v, w.

Ora se noi supponiamo che il raggio ϱ della sfera σ divenga piccolissimo, a cagione del modo di comportarsi delle u_1 v_1 w_1 in (a, b, c) si ha

$$\lim_{\varrho=0} \int_\sigma (u_1 L^{(\sigma)} + v_1 M^{(\sigma)} + w_1 N^{(\sigma)})\, d\sigma = 0$$

mentre l'altro integrale del secondo membro tende ad una funzione lineare a coefficienti costanti dei valori U, V, W delle funzioni u, v, w nel punto a, b, c. Indicando k_1, k_2, k_3 i coefficienti di questa funzione lineare, troviamo

$$k_1 U + k_2 V + k_3 W = \int_s (uL_1 + vM_1)\, ds - \int_s w_1 N ds. \tag{5}$$

Noi non vogliamo entrare qui nei particolari del calcolo, per il caso delle equazioni generali che abbiamo considerato. Osserveremo solo che stabilite tre formole analoghe alla precedente, in cui le funzioni lineari dei primi membri siano indipendenti fra loro, risulta risoluto il seguente problema:

Determinare la deformazione prodotta in un corpo indefinito, limitato da un piano, e cristallizzato in modo che siano piani di simmetria i piani paralleli alla superficie limite, quando su questa superficie sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e la componente normale delle pressioni esterne.

Una formola analoga alla (5) si può trovare considerando invece degli spostamenti u_1, v_1, w_1 gli altri già considerati u_2, v_2, w_2. Tenendo conto delle (4′) si troverebbe

$$k_1 U + k_2 V + k_3 W = \int_s N_2 w ds - \int_s (Lu_2 + Mv_2)\, ds \tag{5'}$$

e si arriverebbe alla soluzione del problema precedente, quando alla superficie si conoscono *le componenti normali degli spostamenti e le componenti tangenziali delle pressioni.*

Nel caso della isotropia il calcolo ora indicato è semplicissimo. Possiamo prendere, per quanto si è già detto,

$$u' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2\alpha^2}{r}$$

$$v' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x\, \partial y}$$

$$w' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x\, \partial z}$$

(ove α, β indicano le due velocità di propagazione delle onde piane); e, coi calcoli stessi che servono alla determinazione delle formole analoghe a quella di Green, si trova al posto delle (5) (5')

$$8\pi\alpha^2\beta^2 \mathrm{U} = \int_s (u\mathrm{L}_1 + v\mathrm{M}_1)\, ds - \int_s w_1 \mathrm{N}\, ds$$

$$8\pi\alpha^2\beta^2 \mathrm{U} = \int_s \mathrm{N}_2 w\, ds - \int_s (\mathrm{L}u_2 + \mathrm{M}\mathrm{N}_2)\, ds$$

Le altre formole per la determinazione di V, W nei due casi si possono dedurre facilmente da queste con sostituzioni circolari. Le espressioni effettive delle L_1, M_1, N_2, ... si possono costruire in forma esplicita mediante le formole date in due miei lavori: *Sulle equazioni della elasticità* (Annali di Matematica, 1889) e *Sopra gli integrali delle equazioni della isotropia elastica* (Nuovo Cimento, 1894).

Il problema ora considerato, nel caso della isotropia, fu risoluto la prima volta da Boussinesq (Comptes Rendus, T. CVI, 1888) e ristudiato poi da Cerruti e Marcolongo. I loro metodi di integrazione sono però assai meno semplici di quello ora esposto.

3. Supponiamo ora che il corpo che si deforma, ammetta due piani ortogonali di simmetria elastica, che supporremo siano i piani $x = 0$, $y = 0$. Se allora $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ rappresentano una terna di componenti di spostamento soddisfacenti alle equazioni di equilibrio, noi, applicando successivamente il teorema dimostrato nel § 1, potremo dedurne altre tre terne, che godono della stessa proprietà. Difatti le equazioni d'equilibrio in questo caso rientrano in se stesse tanto per una riflessione sul piano $x = 0$ che sul piano $y = 0$. Per semplicità di scrittura introdurremo la notazione $\bar{\alpha} = -\alpha$; e allora i quattro sistemi d'integrali si potranno scrivere nel modo seguente:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
u_1 = u\,(x\,,y\,,z) & u_2 = \overline{u}\,(\overline{x}\,,y\,,z) \\
v_1 = v\,(x\,,y\,,z) & v_2 = v\,(\overline{x}\,,y\,,z) \\
w_1 = w\,(x\,,y\,,z) & w_2 = w\,(\overline{x}\,,y\,,z) \\
\\
u_3 = \overline{u}\,(\overline{x}\,,\overline{y}\,,z) & u_4 = u\,(x\,,\overline{y}\,,z) \\
v_3 = \overline{v}\,(\overline{x}\,,\overline{y}\,,z) & v_4 = \overline{v}\,(x\,,\overline{y}\,,z) \\
w_3 = w\,(\overline{x}\,,\overline{y}\,,z) & w_4 = w\,(x\,,\overline{y}\,,z)
\end{array}
\right.
$$

Questi quattro sistemi di integrali *costituiscono un gruppo*, in quanto sono tutti e soli quelli che si possono ottenere da uno qualunque di essi per riflessione sui due piani $x = 0$, $y = 0$. Se poi supponiamo che il primitivo sistema abbia un punto d'infinito isolato d'ordine -1, gli altri tre ammetteranno una singolarità analoga rispettivamente nei punti immagini di questo punto rispetto ai piani $x = 0$, $y = 0$, e quindi una combinazione lineare qualsiasi di quei quattro sistemi, darà un nuovo sistema integrale, avente una singolarità di tal fatta in ciascuno dei quattro angoli determinati dai piani $x = 0$, $y = 0$. Perciò, mediante questo gruppo d'integrali è possibile risolvere, rispetto al diedro solido rettangolo limitato dai mezzi piani positivi $x = 0$, $y = 0$, problemi di equilibrio elastico analoghi a quelli considerati nel paragrafo precedente per un solido limitato da un piano. Ma per vedere quali siano le condizioni alla superficie che debbono essere conosciute in questo caso, è necessario prima stabilire le relazioni che si verificano fra gli spostamenti e fra le pressioni dei sistemi (6), sui piani $x = 0$, $y = 0$.

Queste relazioni si trovano assai facilmente applicando il teorema fondamentale del § 1. Noi le scriveremo senz'altro, indicando in generale con L_i, M_i, N_i le componenti secondo gli assi delle x, y, z delle pressioni che conviene supporre applicate in superficie per mantenere l'equilibrio, quando avviene la deformazione u_i, v_i, w_i. Si trova così:

per $x = 0$:

$$
(7)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
u_1 = \overline{u}_2 & u_3 = \overline{u}_4 & L_1 = L_2 & L_3 = L_4 \\
v_1 = v_2 & v_3 = v_4 & M_1 = \overline{M}_2 & M_3 = \overline{M}_4 \\
w_1 = w_2 & w_3 = w_4 & N_1 = \overline{N}_2 & N_3 = \overline{N}_4
\end{array}
\right.
$$

per $y = 0$:

$$
(7')\quad \left\{
\begin{array}{llll}
u_2 = u_3 & u_1 = u_4 & L_2 = \overline{L}_3 & L_1 = \overline{L}_4 \\
v_2 = \overline{v}_3 & v_1 = \overline{v}_4 & M_2 = M_3 & M_1 = M_4 \\
w_2 = w_3 & w_1 = w_4 & N_2 = \overline{N}_3 & N_1 = \overline{N}_4
\end{array}
\right.
$$

Consideriamo ora gli spostamenti

$$
(8)\quad \left\{
\begin{array}{l}
u' = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \\
v' = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \\
w' = w_1 - w_2 + w_3 - w_4
\end{array}
\right.
$$

Dalle relazioni precedenti (7) (7′) risulta subito che noi avremo

per $x=0$: $\quad L'=0$, $v'=0$, $w'=0$
per $y=0$: $\quad u'=0$, $M'=0$, $w'=0$

Siano ora

$$\begin{matrix} u & v & w \\ L & M & N \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u' & v' & w' \\ L' & M' & N' \end{matrix}$$

due terne di spostamenti e le relative forze superficiali per cui si ha equilibrio elastico nel diedro solido cristallino considerato. Applicando il teorema di Betti e indicando con s_1 il mezzo piano positivo $x=0$, con s_2 il mezzo piano positivo $y=0$, avremo in generale:

$$\int_{s_1}(uL'+vM'+wN')\,ds_1+\int_{s_2}(uL'+vM'+wN')\,ds_2$$
$$-\int_{s_1}(u'L+v'M+w'N)\,ds_1-\int_{s_2}(u'L+v'M+w'N)\,ds_2=0.$$

Ma se gli spostamenti u', v', w' coincidono con quelli indicati con queste notazioni nelle (8), nel secondo membro, invece dello zero, avremo una funzione lineare dei valori delle u, v, w nel punto di singolarità per u', v', w' compreso nel diedro positivo e la somma di integrali del primo membro si ridurrà a contenere sei soli termini; avremo cioè

$$\int_{s_1}(vM'+wN'-u'L)\,ds_1+\int_{s_2}(uL'-v'M+wN')\,ds_2$$
$$=k_1U+k_2V+k_3W.$$

Nel caso della isotropia nel secondo membro si avrebbe

$$8\pi\alpha^2\beta^2U.$$

Mediante questa formola e le altre due analoghe che in generale si possono stabilire, si può ritenere risoluto *il problema della deformazione del diedro retto, solido, isotropo, oppure cristallizzato in modo che i piani paralleli alle faccie siano piani di simmetria, quando sopra una delle faccie*, $x=0$, *sono date le componenti*

$$L\ ,\ v\ ,\ w$$

e sopra l'altra, $y=0$, *le componenti*

$$u\ ,\ M\ ,\ w$$

cioè su entrambe le faccie del diedro la componente normale delle forze esterne e le componenti tangenziali degli spostamenti.

Poniamo ora

$$
\begin{aligned}
u'' &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
v'' &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\
w'' &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4 .
\end{aligned}
$$

Dalle (7) (7′) risulta immediatamente che sulle faccie del diedro già considerato si hanno le seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
&\text{per } x=0 : u''=0 \ , \ M''=0 \ , \ N''=0 \\
&\text{per } y=0 : L''=0 \ , \ v''=0 \ , \ N''=0 .
\end{aligned}
$$

Di qui, ripetendo le considerazioni del caso precedente, e coll'applicazione del teorema del Betti, risulta che mediante questi integrali u'', v'', w'' si può risolvere il problema dell'equilibrio del diedro solido già considerato quando sulla faccia $x=0$ sono date le componenti

$$u \ , \ M \ , \ N$$

e sulla faccia $y=0$ le componenti

$$L \ , \ v \ , \ N$$

cioè *su tutta la superficie del diedro la componente normale degli spostamenti, e le componenti tangenziali delle forze.*

Questi due problemi, che possiamo dire correlativi, corrispondono perfettamente ai due problemi risoluti dal Boussinesq nel caso del solido limitato da un piano, e dei quali già abbiamo fatto cenno. Ma nel caso del diedro esistono altri due problemi analoghi, che non hanno i loro corrispondenti nel caso del piano; quando cioè sopra una faccia è data la componente normale delle forze e le tangenziali degli spostamenti, e sull'altra invece la componente normale degli spostamenti e le tangenziali delle forze. Anche questi due problemi possono essere risoluti col nostro metodo. Basta porre

$$
\begin{aligned}
u''' &= u_1 - u_2 - u_3 + u_4 \\
v''' &= v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \\
w''' &= w_1 - w_2 - w_3 + w_4
\end{aligned}
$$

Dalle (7) (7′) risulta subito che si ha:

$$
\begin{aligned}
&\text{per } x=0 : L'''=0 \ , \ v'''=0 \ , \ w'''=0 \\
&\text{per } y=0 : L'''=0 \ , \ v'''=0 \ , \ N'''=0.
\end{aligned}
$$

Quindi mediante gli integrali u''', v''', w''' possiamo risolvere il problema dell'equilibrio *quando sulla faccia* $x=0$ *sono date le componenti* v, w *dello spostamento tangenziale e la componente normale* L *delle forze, mentre*

sulla faccia $y=0$ le componenti L, N *della forza tangenziale e la componente normale* v *degli spostamenti.*

Il problema correlativo si risolve ponendo

$$u^{\text{IV}} = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$$
$$v^{\text{IV}} = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$$
$$w^{\text{IV}} = w_1 + w_2 - w_3 - w_4.$$

Si ha infatti dalle (7) (7′):

$$\text{per } x=0 : u^{\text{IV}}=0 \ , \ \text{M}^{\text{IV}}=0 \ , \ \text{N}^{\text{IV}}=0$$
$$\text{per } y=0 : u^{\text{IV}}=0 \ , \ \text{M}^{\text{IV}}=0 \ , \ w^{\text{IV}}=0.$$

Quindi si risolverà il problema dell'equilibrio *quando sulla faccia* $x=0$ *si conosce la componente normale* u *degli spostamenti, e le componenti* M, N *della forza tangenziale; e sulla faccia* $y=0$ *la componente normale* M *delle forze e le componenti* u, w *degli spostamenti tangenziali.*

È facile vedere che le considerazioni precedenti sono estendibili al caso di un triedro trirettangolo solido, quando i piani paralleli alle sue faccie sono piani di simmetria elastica, il caso cioè dei cristalli del sistema rombico. A tale scopo basterebbe costruire il gruppo di otto terne di integrali che si ottiene dal gruppo (6) con una riflessione sul piano $z=0$.

Noi non svilupperemo, per ora, i risultati, a cui così si può arrivare; i quali sono facilmente prevedibili e nulla ci apprenderebbero di nuovo circa il metodo di integrazione studiato. Ci basta aver mostrato con alcuni esempi come mediante il principio delle immagini ed il concetto di *gruppo di integrali* delle equazioni d'equilibrio, possa essere di molto aumentata la serie, finora assai limitata, dei problemi di statica elastica, di cui può assegnarsi la soluzione generale in termini finiti.

Mi è grato ricordare che fui condotto ad occuparmi dei problemi precedenti dalla lettura delle due Note del prof. Tedone, pubblicate nei Rendiconti del passato dicembre, riguardanti la deformazione del diedro e del trietro solido isotropo per dati spostamenti alla superficie.

Geologia. — *I terreni eocenici presso Bribir in Croazia* [1]. Nota del Socio C. De Stefani e del dott. G. Dainelli.

Nel 1884 il Frauscher [2] determinò una piuttosto numerosa collezione di fossili di Kosavin, presso Bribir, in Croazia, raccolti dal signor Hire, e li riconobbe molto giustamente equivalenti al piano di Roncà, cioè all'Eocene

[1] La parte stratigrafica di questa Nota è del prof. C. De Stefani, la parte paleontologica del dottor G. Dainelli.

[2] C. F. Frauscher. *Die Eocän-Fauna von Kosavin nächst Bribir im kroatischen Küstenlande.* Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanstalt. Wien, 1884, pag. 58.

medio, soggiungendo però che nuovi studî si richiedevano per ben determinare la esatta stratigrafia. Egli pertanto citava la seguente successione dall'alto al basso, come gli era stata comunicata dallo stesso signor Hire:

un conglomerato rossastro, ben saldo;
arenaria cenerognola con numerose *Nummulites;*
arenaria grigiastra ricca di fossili, ma che ne diviene priva alla base;
marne turchine;
calcare eocenico bianco giallognolo;
calcare cretaceo.

Il desiderio di rintracciare nelle ligniti del Vinodol, presso Bribir, nell'unico bacino pliocenico del versante adriatico orientale, che sarebbe stato paragonabile ai bacini lacustri del Pliocene italiano, i resti di mammiferi fossili, che il signor Wetzely, aveva trovato nel 1851, ci portò nei dintorni di Kosavin, presso Bribir, nella stessa località indicata da Franscher.

Questa località, come il Vinodol presso Novi, fa parte di un lunghissimo sinclinale, che, principiando per lo meno da Orehovica sulla Rečina, o Fiumara, presso Fiume, seguita appunto fino a Novi, e che comprende anche lo stesso golfo di Buccari-Porto Re. L'anticlinale che lo chiude all'esterno dalla parte del mare, interrotto dalla Fiumara di Fiume, dallo stretto marittimo o Vallone di Buccari, e dalla valle Dubracina verso Crkvenica, è costituito per intero da terreni cretacei, appartenenti in gran parte alla Creta superiore, con *Ostrea Johannae* Choffat, *Radiolites* ed altre bivalvi, e ad essi, specialmente dalla parte di terra, si sovrappongono i calcari dell'Eocene inferiore ad *Alveolina* ed a piccole *Nummulites* (calcare eocenico, bianco giallognolo, del Frauscher) soliti in tutta quanta la estensione della penisola Balcanica. Fra questi calcari ad *Alveolina* e le successive argille eoceniche, sono talora delle arenarie, nell'aspetto almeno identiche a quelle con *Nummulites perforata* di Arbe, di Veglia, e di altri luoghi.

I terreni calcarei cretacei, ma non sempre direttamente i calcari ad *Alveolina*, del resto abbastanza frequenti, occupano l'anticlinale successivo, ad Oriente. La presenza di terreni argillosi eocenici, assai più facilmente erodibili dei calcari, e che occupano il sinclinale, danno a questo la forma di una lunghissima valle longitudinale diretta da N.-O. a S.-E., interrotta però verso il mare nei luoghi sopra indicati. Delle parziali vallette longitudinali traversano con questa stessa direzione il sinclinale: gli spartiacque tra esse, cioè le loro porzioni più elevate, sono coperti da altre frane provenienti dai calcari cretacei ed eocenici, che nascondono il sottosuolo argilloso e che corrispondono al conglomerato rossastro di Frauscher.

Nel terreno cretaceo superiore, tra Selce, sul mare, e Bribir, notansi anche breccie marmoree, ceroidi, bianche, a cemento rossastro, simili ai marmi di Loparo e di Veglia e del Promontorio Garganico; i calcari intorno al bacino di Bribir, ed in parecchi altri punti del sinclinale, come morfologica-

mente scoscendono sovente a picco sopra l' Eocene, così stratigraficamente presentano spesso banchi strapiombanti e fin talora in piccola parte rovesciati sopra l'Eocene stesso. I paeselli della valle stanno appunto per lo più annidati al confine, tra i calcari cretacei, che s' alzano a picco, e i sottostanti banchi dell' Eocene, lievemente ondulati.

L' Eocene, che qua e là, sopre i calcari già detti, occupa il fondo del sinclinale, e nel quale furono trovati dal signor Hire i fossili presso Kosavin, è costituito da argille scure e da marne parimente scure, un poco più compatte, alternanti con un calcare simile al *colombino* toscano e con qualche strato di arenaria, in banchi poco inclinati, che formano colline lievemente ondulate, coperte di bella vegetazione, e qua e là nascoste da frane calcaree recentissime e da terra rossa. In queste argille furono trovati fossili specialmente sulla destra della valle presso al mulino sotto Podugrinac, e più ancora salendo sulla sinistra verso la strada di Kosavin; tali fossili sono assai perfettamente conservati, isolati, spersi; ma in certi punti molto abbondanti, comprese anche, cosa ben singolare, le *Nummulites* e le *Assilinae* in ottima conservazione; vi sono anche alcune rarissime ghiaie calcaree forate da Anellidi, e forse da Briozoi e Spongiari. Questa fauna, come si vedrà dall'elenco che facciamo seguire, è di tipo salmastro. Contrassegniamo con un asterisco le specie non indicate da Frauscher, e con un R quelle trovate anche a Roncà:

Tritonidea polygona Lamarck R.
**Natica patulina* Munier-Chalmas R.
Natica parisiensis D'Orbigny R.
**Rostellaria* n. sp.
Cerithium mutabile Lamarck.
Cerithium globulosum Deshayes R.
Cerithium crispum Defrance.
**Cerithium microstoma* Desh.
**Cerithium Bonellii* Deshayes.
**Cerithium* n. sp.
Potamides pentagonatum Schlotheim R.
Potamides calcaratum Brongniart R.
Potamides aculeatum Schlotheim R.
Potamides corrugatum Brongniart R.
Potamides baccatum Brongniart R.
Potamides lemniscatum Brongniart R.
**Turritella imbricataria* Lamarck R.
Melanatria vulcanica Schlotheim R.
**Melanatria undosa* Brongniart R.
**Melanatria* n. sp.

Oltre alle tre specie nuove, di *Rostellaria*, di *Cerithium* e di *Melanatria*, abbiamo ancora riconosciuto due nuove varietà delle specie *Natica parisiensis* D'Orbigny, e *Potamides pentagonatum* Schlotheim, e quattro differenti forme individuali, che si allontanano da quella tipica del *Potamides lemniscatum* Brongniart, dal quale però non abbiamo creduto di separarle nemmeno come semplici varietà. A tale elenco di fossili si aggiunga una **Crassatella*, riconoscibile pel cardine, ma sì mal conservata da rendere impossibile qualsiasi tentativo di determinazione; piccoli esemplari di Coralli, e infine frequenti individui di *Nummulites granulosa* D'Archiac,

Nummulites lucasana Defrance, ed *Assilina exponens* Sowerby. Facciamo seguire l'elenco delle specie indicate da Frauscher, e che noi non abbiamo riconosciute tra i nostri fossili di Bribir:

Auricula ovata Lamarck.
Auricula sp. n.
Conus scabriculus Brand.
Harpa mutica Lamarck.
Voluta digitalina Lamarck.
Voluta cithara Lamarck.
Murex cfr. *plicatilis* Deshayes.
Murex frondosus Lamarck.
Murex asper Brand.
Fusus subcarinatus Lamarck.
Fusus cfr. *muricinus* Deshayes.
Fusus polygonatus Brongniart.
Nassa semistriata Brac.
Buccinum cfr. *obtusum* Deshayes.
Buccinum decussatum Lamarck.
Buccinum cfr. *latum* Deshayes.
Buccinum cfr. *Desorii* Deshayes.
Buccinum n. sp.
Triton sp.
Cassidaria sp.
Rostellaria fissurella Lamarck.
Rostellaria cfr. *Lejeuni* Rouault.
Terebra Vulcani Brongniart.
Cerithium plicatum Brongniart.
Cerithium striatum Defrance.
Cerithium aff. *Defrancii* Deshayes.
Cerithium n. sp.
Ampullina Vulcani Brognniart.
Ampullina ponderosa Deshayes.
Natica canaliculata Deshayes.
Natica Heberti Deshayes.
Natica cfr. *Garnieri* Bayan.
Turritella carinifera Deshayes.
Turritella cfr. *hybrida* Deshayes.
Turritella cfr. *incisa* Brongniart.
Scalaria sp.
Velates Schmideliana Deshayes.
?*Teinostoma* sp.
Turbo trochiformis Deshayes.
Teredo sp.
Cardium sp.
Cyrena Baylei Bayan.
Cyrena cfr. *Veronensis* Bayan.
Chama cfr. *rusticula* Deshayes.
Ostrea sp.
Cidaris sp.
Pachygyra Saurii D'Archiac.
Tecosmilia sp.
Stylocoenia taurinensis Michelotti.
Dendracis sp.
Dendracis sp.
Stylophora conferta Reuss.
Heliastraea immersa Reuss.
Heliastraea sp.
Goniastraea Cocchii D'Ach.
Plocophyllia sp.
Trochocyathus sp.
Trochocyathus sp.
Nummulites Biarritzensis D' Archiac.
Nummulites striata D'Orbigny.

In generale i terreni eocenici del littorale istriano, croato e dalmato fino circa a Sebenico, ricordano quelli delle Alpi Orientali e non quelli dell'Appennino.

Abbiamo esaminato i dintorni delle escavazioni di lignite di Svati Stipan (Santo Stefano), per vedere di raccogliere fossili negli strati pliocenici, donde si dice provengano; ma almeno le collinette ed i piccoli rilievi sulla superficie del suolo sono solamente costituiti dalle argille eoceniche.

Botanica. — *Origine e differenziazione degli elementi vascolari primari nella radice delle Monocotiledoni.* Nota II preventiva del Socio R. Pirotta [1].

Lo sviluppo degli elementi vascolari, sia nel parenchima procambiale che in quello centrale, procede nelle sue linee generali pressapoco allo stesso modo in tutte le radici studiate fino ad ora. Le particolarità che si presentano nei singoli casi saranno esposte nel lavoro per esteso.

Se si segue con cura il successivo differenziamento del cilindro centrale nell'apice vegetativo della radice delle Monocotiledoni collo studio delle sezioni trasversali successive, l'origine e la differenziazione degli elementi vascolari ci si presentano molto chiare.

Nell'estremo apice, sotto la piloriza, in quella regione che viene anche chiamata punto vegetativo caratterizzata dalla formazione di nuove cellule per segmentazione di un gruppo di iniziali, si vede il pleroma costituito da elementi pochi di numero, quasi uniformi, ricchissimi di fitto citoplasma granelloso con grosso nucleo. Queste cellule continuano a segmentarsi, cosicchè un po' più indietro si possono distinguere a costituire il pleroma due gruppi di cellule embrionali, uno centrale ad elementi di regola poligonali in sezione, un po' più grandi, l'altro periferico a cellule più numerose, un po' più piccole, meno regolari, in attiva segmentazione, sopratutto le periferiche. Dalle prime cellule ha origine il parenchima centrale, dalle seconde il parenchima procambiale e il periciclo (fig. 1).

Un poco più lontano dall'apice, nel parenchima centrale comincia la differenziazione delle cellule madri o iniziali degli elementi vascolari centrali. Nel caso più semplice una cellula centrale, che occupa l'asse del cilindro, aumenta rapidamente, quasi improvvisamente di dimensioni, cosicchè spicca sulle altre cellule, e in pari tempo il suo citoplasma comincia a presentare vacuoli, che si fanno sempre più grandi, e in numero maggiore, cosicchè il protoplasto perde quella omogeneità e quell'aspetto granelloso, che caratterizza lo stadio embrionale e diventa più trasparente e meno colorabile (fig. 2).

In altri casi, più frequenti, le cellule iniziali o madri degli elementi dei vasi centrali sono più di una, poche o molte e diversamente distribuite nella massa del parenchima centrale. Allora, a seconda dei casi, la differenziazione delle iniziali ha luogo quasi contemporaneamente su tutta la superficie di sezione, più spesso successivamente benchè a distanza non troppo grande ed in modo non perfettamente regolare. Nel caso in cui le cellule iniziali

[1] Veggasi la Nota I a pag. 49 di questo stesso volume.

sono molte e distribuite per tutto il parenchima centrale, la comparsa loro si fa di regola centrifugamente.

Le iniziali possono continuare a segmentarsi; ma ben presto il processo di segmentazione cessa, dopochè esse sono cresciute più o meno in grossezza, talvolta enormemente, e dopo che il citoplasma ed il nucleo sono scomparsi dalla cavità cellulare. Si formano allora man mano gli elementi definitivi del vaso o dei vasi centrali.

Le cellule embrionali del parenchima procambiale, più piccole di solito di quelle del parenchima centrale e tanto più quanto più si va verso l'esterno, si mantengono più a lungo nello stato embrionale, quindi ricche di contenuto e in attiva segmentazione, in relazione appunto alla più tardiva differenziazione in esse degli elementi vascolari. Mentre le cellule madri dei vasi centrali si stanno differenziando e già spiccano per le loro dimensioni spesso enormi sulle altre cellule circostanti, il parenchima procambiale non presenta, di regola, ancora nessun accenno di differenziazione di elementi del raggio vascolare. Però ad una distanza variabile dal sommo apice, ma sempre più o meno presto dopo la prima differenziazione degli elementi dei vasi centrali, nella parte più interna del parenchima procambiale, in punti determinati per numero e pressapoco equidistanti, alcune cellule cominciano ad aumentare di dimensione ed a differenziarsi in modo analogo a quello sopra indicato per le iniziali dei vasi centrali, cosicchè spiccano presto su tutte le altre cellule del parenchima procambiale, ancora in segmentazione per la loro ampiezza e per la maggior trasparenza. Sono esse i primi elementi dei raggi vascolari, i quali hanno quindi origine all' interno, verso il centro del cilindro centrale (fig. 3). Questa prima differenziazione ha luogo, di solito, quando gli elementi costitutivi del periciclo, pur essendo ben distinti, sono ancora allo stato di segmentazione.

Più tardi, e molto rapidamente, si differenziano man mano e in ordine centrifugo, cioè verso la periferia, addossati più o meno regolarmente al primo comparso, gli elementi, pochi o molti, del raggio vascolare, elementi che sono ordinariamente più piccoli, talvolta molto più piccoli di quelli interni del raggio stesso (fig. 4). Gli elementi più esterni sono accollati alle cellule del periciclo (qualche volta stanno anche nel periciclo). Essi però si differenziano più rapidamente di tutti gli altri elementi vascolari, e le loro pareti ispessiscono e lignificano con molta precocità, quando gli elementi più interni del raggio vascolare e quelli dei vasi centrali non hanno ancora affatto lignificato la loro parete (fig. 5). La lignificazione procede dunque in direzione centripeta, e talvolta tutti gli elementi lignificano abbastanza rapidamente, altra volta quelli dei vasi centrali o anche i più interni dei raggi vascolari molto tardivamente.

Lo studio delle sezioni in serie longitudinali dell' apice vegetativo della radice, completa e conferma quanto sopra si è detto. Dal piccolo gruppo delle

iniziali del pleroma, in corrispondenza della regione costituita dal parenchima centrale si vedono partire, in linea retta se si tratta di vasi assili o mediani, o in linea prima curva verso l'esterno ed il basso, se si tratta di vasi che si formano verso la periferia del parenchima centrale, delle file di cellule spesso regolarissimamente sovrapposte.

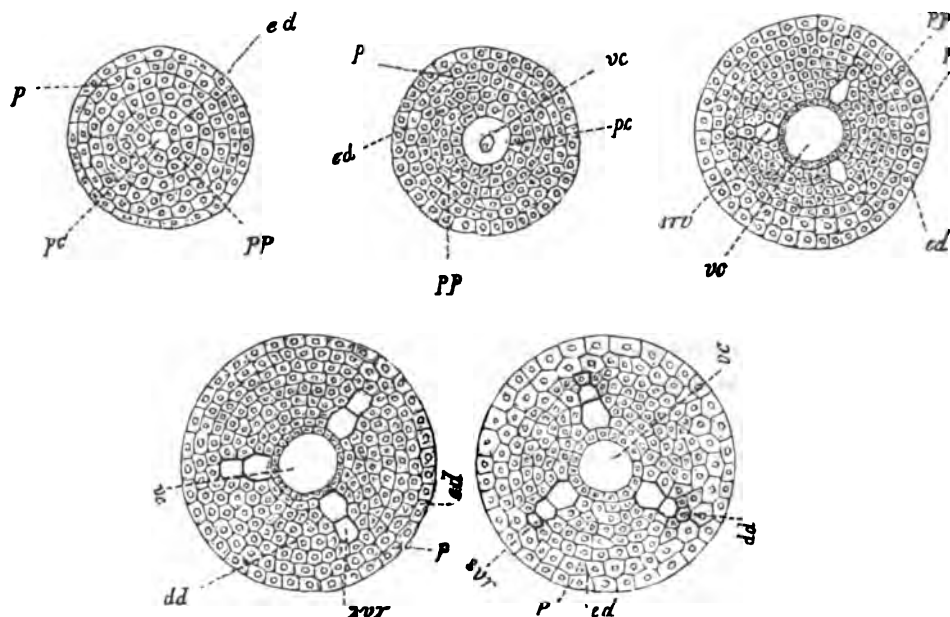



Fig. 1 a 5.

Figure schematiche rappresentanti i principali stadii di sviluppo degli elementi vascolari nel pleroma delle Monocotiledoni: fig. 1-5, sezione trasversale: *ed*, endodermide; *p*, periciclo; *pp*, parenchima procambiale; *pc*, parenchima centrale; *vc*, vaso centrale. 1*rv*, primo elemento vascolare radiale; 2*rv*, 3*rv*, rispettivamente, secondo, terzo elemento vascolare radiale. — Nella figura non sono segnati i tubi cribrosi.

Gli elementi di queste file di cellule, già a piccola distanza dal punto vegetativo, pur continuando a segmentarsi in direzione quasi sempre trasversale, crescono rapidamente di dimensioni trasversali, cosicchè spiccano sulle altre serie di cellule del pleroma (fig. 6). Ogni elemento di questa serie è una cellula madre dell'elemento del vaso centrale. Mentre essi crescono in grossezza, il citoplasma che avvolge il grosso nucleo centrale si scava di vacuoli e diventa sempre più trasparente, cosicchè la serie o le serie spiccano nettamente su tutto il resto della sezione.

Le cellule continuano a crescere, ma ora sopratutto in lunghezza; cosicchè a poca distanza dall'apice diventano più volte, anche molte volte, più lunghe che larghe, pur mantenendo ancora le pareti sottili.

Per tutto questo stadio il parenchima procambiale del pleroma si mantiene in istato di attiva segmentazione trasversale e longitudinale. Soltanto

quando le cellule madri dei grandi vasi sono già molto ampie e svuotate o quasi di citoplasma, cominciano alcune cellule ad ingrandire e ad allungarsi nel modo e nella successione più sopra indicati, e cioè, per ogni raggio vascolare, prima le cellule più interne, poi man mano le più esterne.

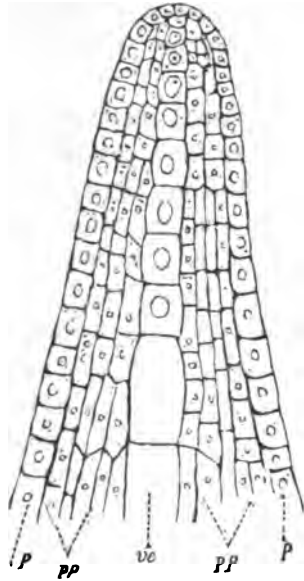



Fig. 6.

Figura schematica rappresentante i principali stadii di sviluppo degli elementi vascolari nel pleroma delle Monocotiledoni: fig. 2, sezione longitudinale, *ed*, endodermide; *p*, periciclo; *pp*, parenchima procambiale; *pc*, parenchima centrale; *vc*, vaso centrale.

Tutte le radici di Monocotiledoni finora studiate offrono le due sorta di elementi vascolari nella loro struttura primaria.

I raggi vascolari variano di numero da due a moltissimi, come variano in ciascun raggio il numero degli elementi che li costituiscono e la loro natura. La loro disposizione è però, di solito, costante e regolare. I più esterni, quelli che compariscono ultimi ma che lignificano prima, sono tracheidi, gli altri più interni che compiscono prima ma lignificano più tardi, sono di regola fusioni cellulari o trachee.

I vasi centrali possono variare non soltanto per il numero, ma anche per la disposizione, in relazione sopratutto colle dimensioni delle radici e col numero dei raggi vascolari. Senza entrare ora in particolari, basterà ricordare i casi principali che sono i seguenti, e presentano del resto tutte le forme di passaggio:

1° Presenza di un unico vaso centrale, che è allora quasi sempre assile (certe Graminacee, Ciperacee, Gigliacee, Amarilidacee, Commelinacee, ecc. ecc.).

2° Parecchi o molti vasi disposti in cerchia più o meno regolare verso la periferia del parenchima centrale, più o meno in relazione, a sviluppo completo, coi raggi vascolari; la porzione centrale è allora o priva di vasi, o presenta talvolta un vaso assile (certe Iridacee, Aracee, Commelinacee, Cannacee, Gigliacee, ecc. ecc.).

3° Numerosi vasi sparsi più o meno irregolarmente per tutta la massa del parenchima centrale (certe Palme, Gigliacee, Aracee, Ciclantacee, Taccacee, ecc. ecc.).

4° Gruppi di vasi (mescolati spesso con tubi cribrosi) sparsi più o meno in tutta la massa del parenchima centrale (certe Aracee, Bambusee fra le Graminacee, Musacee, Pandanacee, Gigliacee, Palme, ecc.).

Di regola nelle Monocotiledoni le radici sono poliarche, cioè provvedute di numerosi raggi vascolari; di rado diarche od oligarche. Nel primo caso ordinariamente i raggi vascolari formano una cerchia verso la periferia e la parte centrale ampia del cilindro centrale è occupata da molti o parecchi vasi centrali. Nel secondo caso i raggi vascolari si avvicinano al centro, dove si trova pochissimo parenchima, e toccano di regola il vaso assile o i pochi vasi centrali, facendo a completo sviluppo l'impressione come se i raggi vascolari si incontrassero al centro del cilindro centrale.

Nelle radici delle Monocotiledoni è caratteristica (benchè non esclusiva) la presenza di due sorta di elementi vascolari; quelli che costituiscono i raggi vascolari, più o meno regolarmente distribuiti e che si riscontrano anche in tutte le altre radici, e si svolgono dentro al parenchima procambiale (qualche volta anche in quello periciclico); quelli centrali, che diversi per numero e per disposizione, si svolgono nel parenchima centrale. Contrariamente all'opinione generalmente seguita, i primi vasi a differenziarsi sono quelli provenienti dagli elementi centrali; seguono poi gli elementi dei raggi vascolari in direzione centrifuga. Ma gli elementi più esterni, quelli che si credeva si formassero per i primi e che per ciò si ritenne costituissero un cosidetto *protoxilema*, sono però quelli che lignificano prima di tutti gli altri, cosicchè la lignificazione è centripeta.

Nelle radici delle Monocotiledoni non si può parlare di procambio, poichè gli elementi dei raggi vascolari, che sono fasci vascolari semplici, si svolgono per differenziazione diretta dalle cellule embrionali del meristema. Ho dato alla regione in cui essi si formano, il nome di parenchima procambiale per ricordare che in essa si differenziano i fasci vascolari.

La struttura e il modo di sviluppo degli elementi vascolari primarî nelle radici delle Monocotiledoni non sembra possano venire in sostegno della opinione recentemente esposta, all'appoggio del solo studio delle Dicotiledoni, da G. Bonnier intorno all'ordine di formazione degli elementi del cilindro centrale nella radice e nel caule.

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo*. Nota I di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio VOLTERRA.

Nel discutere (¹) le recenti esperienze sulla convezione elettrica, il prof. Righi lamentava la mancanza di indicazioni precise sugli effetti prodotti dalla presenza di un conduttore in un campo variabile. Egli mi ha allora cortesemente sollecitato a studiare dal punto di vista analitico un caso semplice, che corrisponde schematicamente ad alcuno dei dispositivi usati nelle ricordate esperienze, il caso cioè di una carica elettrica, che si muove di moto uniforme parallelamente a un piano conduttore indefinito.

I risultati, cui sono pervenuto (²), hanno servito al ch. autore (³) per completare quantitativamente alcune intuizioni, che egli aveva soltanto annunziato come probabili e che il calcolo ha in tutto giustificato.

La ricerca non è dunque stata inutile. Ma essa si riferisce pur sempre a fenomeni, pressochè al limite delle quantità osservabili e per cui si richiedono in ogni caso esperienze assai delicate. Mi sono quindi proposto di studiare qualche altra questione, dello stesso tipo, ma più facilmente accessibile al controllo sperimentale.

Si presta bene il caso di una corrente alternativa (di quelle ordinarie, adoperate nell'industria), supposta sinusoidale, rettilinea, indefinita e parallela a uno schermo conduttore.

La ricerca, che ho istituita a questo scopo, sarà, se l'Accademia lo consente, esposta in tre Note.

In questa prima potrò appena (dopo alcune indispensabili premesse) assegnare il campo elettromagnetico di una corrente rettilinea di intensità variabile e porre il problema analitico delle modificazioni, prodotte da una lastra conduttrice parallela alla corrente.

Nella seconda Nota risolverò il problema rigorosamente; e nella terza trasformerò e semplificherò con opportune approssimazioni la soluzione ottenuta, in modo da renderne trasparente il significato fisico.

Ecco un saggio del risultato definitivo.

(¹) Nuovo Cimento, ottobre 1901; comunicazione fatta alla Società di Fisica.

(²) In una Memoria, che trovasi presentemente in corso di stampa negli: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Ser. III, T. IV.

(³) Rendiconto della Reale Accademia di Bologna, gennaio 1902.

Sia n la frequenza della corrente; R la resistenza (espressa in unità elettromagnetiche assolute) dell'unità di superficie della lastra conduttrice; d e Δ le distanze della lastra e di un punto qualunque del campo della corrente; $\frac{1}{q} = \frac{R}{4\pi^2 n}$.

Supponiamo di considerare correnti industriali abbastanza frequenti, e lastre abbastanza conduttrici e discoste dalla corrente perchè $\frac{2}{qd} < \frac{1}{10}$ (1).

Si ha allora con sufficiente approssimazione (tanto maggiore quanto più piccolo è $\frac{2}{qd}$, ossia — caeteris paribus — quanto più grande è la frequenza), per i punti che si trovano, rispetto allo schermo conduttore, da banda opposta della corrente:

1.° La fase della forza magnetica differisce di $\frac{\pi}{2}$ da quella, che agirebbe qualora fosse rimosso lo schermo conduttore.

2.° La sua intensità massima, in un punto generico, sta a quella, che competerebbe allo stesso punto, se non ci fosse il conduttore, nel rapporto $\frac{1}{q\Delta}$. Nei punti del piano perpendicolare allo schermo passante per la corrente la forza magnetica è sempre parallela allo schermo e normale alla corrente.

Al crescere della frequenza, e quindi di q, (in causa dell'accennato fattore di riduzione $\frac{1}{q\Delta} \leq \frac{1}{qd}$) lo schermo conduttore tende a intercettare la forza magnetica.

3.° La forza elettrica è trascurabile.

Una verifica sperimentale sarebbe, a mio avviso, particolarmente interessante perchè nei risultati teorici sono implicate ipotesi non ancora messe alla prova dall'esperienza.

Infatti, in questo genere di problemi, non basta la teoria hertziana pura, ma occorre aggiungervi qualche cosa.

È ciò che si fa ricorrendo per es. a una delle teorie integrali di Maxwell o di Helmholtz (completata quest'ultima dall'ipotesi che i potenziali si propaghino colla velocità della luce).

Esse bastano e conducono agli stessi risultati (2).

(1) Per una lastra di rame, dello spessore di 1 millimetro, distante un metro dallo schermo, e una frequenza eguale a 100, si ha a un dipresso:

$$R = 16000,\ 4\pi^2 dn = 400000,\ \frac{2}{qd} = \frac{2R}{4\pi^2 dn} = 0{,}08.$$

(2) Per vero dire, io mi son qui (e nella precedente Memoria) attenuto esclusiva-

Si tratterebbe dunque di controllare un campo, comune bensì a entrambe le teorie integrali, ma non in pari tempo contenuto nel sistema differenziale di Hertz.

1. *Preliminari.* — In un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile [1] e in quiete, la cui omogeneità sia interrotta soltanto da alcune sedi Σ (isolate, a una, o a due dimensioni) di cariche e di correnti elettriche, si ha

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} L = \dfrac{dV}{dz} - \dfrac{dW}{dy}, \\ M = \dfrac{dW}{dx} - \dfrac{dU}{dz}, \\ N = \dfrac{dU}{dy} - \dfrac{dV}{dx}; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} X = -\dfrac{dF}{dx} - A\dfrac{dU}{dt}, \\ Y = -\dfrac{dF}{dy} - A\dfrac{dV}{dt}, \\ Z = -\dfrac{dF}{dz} - A\dfrac{dW}{dt}, \end{cases}$$

dove L, M, N; X, Y, Z designano al solito le componenti delle forze magnetica ed elettrica (valutate in unità elettrostatiche) rispetto ad un sistema di assi fissi orientati come in figura; A l'inversa della velocità della luce; F e (U, V, W) i potenziali elettrico e vettore, *ritardati* (cioè propagantisi con velocità $\dfrac{1}{A}$).

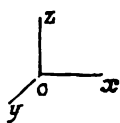



Fig. 1.

Nella loro qualità di potenziali ritardati, F, U, V, W soddisfanno alle equazioni

$$\text{(III)} \qquad \square F = 0, \ \square U = 0, \ \square V = 0, \ \square W = 0$$

$$\left(\square \equiv \Delta_2 - A^2 \frac{d^2}{dt^2}\right),$$

e si comportano nei punti delle Σ come potenziali ordinarî delle distribuzioni corrispondenti. A priori queste possono essere qualunque, purchè soltanto (oltre a ovvie condizioni di continuità, di derivabilità ecc.) sia soddi-

---

mente alla teoria di Helmholtz. Ho però verificato che la teoria di Maxwell porterebbe ad espressioni identiche per le forze elettromagnetiche.

Questo risultato sta in generale per un campo e per un conduttore qualunque. Mi si passi per ora l'asserzione, che mi propongo di giustificare quanto prima.

[1] Di cui cioè si suppongono eguali all'unità le costanti di dielettricità e di magnetismo (potere induttore specifico e permeabilità magnetica).

sfatto il principio di conservazione dell'elettricità. Tra i potenziali ne consegue la relazione

$$\text{(IV)} \qquad A\frac{dF}{dt}+\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=0,$$

che equivale d'altronde completamente all'accennato principio.

In virtù delle (III), (IV), le espressioni (I), (II) delle forze elettromagnetiche verificano identicamente le equazioni di Hertz ([1]).

È questa in sostanza la teoria conciliata di Helmholtz-Hertz.

2. *Campo elettromagnetico dovuto al tratto di corrente compreso fra un generatore e un collettore.* — Sia in O_1 il generatore, in O_2 il collettore. Supponiamo che la corrente si trasmetta da O_1 ad O_2 lungo un filo rettilineo (assimilabile al segmento O_1O_2). Sieno $y=o$, $z=d$ le equazioni della retta O_1O_2; $-l_1, o, d$; l_2, o, d le coordinate di O_1 e di O_2 ($d, l_1, l_2>0$); x, y, z le coordinate del punto potenziato P; x', o, d quelle di un generico punto (potenziante) P′ del segmento O_1O_2; $u(t)$ l'intensità della corrente in un punto determinato del filo, $x'=0$ per es., misurata in unità elettrostatiche (talchè $Au(t)$ ne è la misura in unità elettromagnetiche).

Limitandoci per semplicità al caso di una propagazione senza smorzamento con velocità eguale a quella della luce ([2]), l'analoga intensità in un altro punto qualunque P′ sarà $u(t-Ax')$.

Designiamo ancora con $e(x', t)$ la densità (lineare) della distribuzione elettrica nei punti P′ interni al segmento O_1O_2, con $E_1(t)$, $E_2(t)$ le cariche isolate degli estremi O_1, O_2.

La conservazione dell'elettricità esige che sia, come tosto si riconosce,

$$\frac{de}{dt}+\frac{du}{dx'}=0;$$

$$\frac{dE_1}{dt}=-u(t+Al_1), \quad \frac{dE_2}{dt}=u(t-Al_2).$$

([1]) Per la dimostrazione veggasi la Nota: *Sulla riducibilità* ecc., Nuovo Cimento, agosto 1897, o, in forma semplificata (per mezzi impolarizzabili come quello, di cui qui si tratta), il primo capitolo della citata Memoria degli Annali di Tolosa.

In entrambi questi lavori la dimostrazione è data per distribuzioni continue (a tre dimensioni) di cariche e di correnti, ma, per le ragioni esposte al n. 9 della Memoria stessa, vi è implicita l'estensione a distribuzioni di qualsiasi natura, senza bisogno di verifiche dirette (sul tipo di quella, che — per le distribuzioni a due dimensioni — trovasi inserita nella Nota del Cimento).

([2]) Questa ipotesi è molto opportuna per semplificare i calcoli, ma è chiaro che qualunque legge di propagazione, per cui l'intensità variasse pochissimo con x' condurrebbe sensibilmente agli stessi risultati, finchè si tratta di fenomeni svolgentisi in un campo ristretto (rispetto alla velocità della luce).

Da $\frac{de}{dt} + \frac{du}{dx'} = 0$ segue $e = Au +$ una funzione arbitraria di x', che, senza pregiudizio della generalità, si può supporre eguale a zero. (In caso diverso non c'è che da aggiungere alla forza elettrica la componente dovuta a questa distribuzione *statica*).

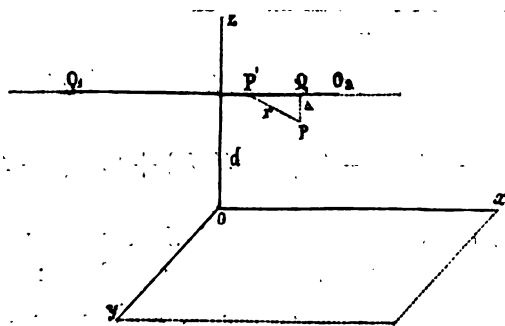



Fig. 2.

Ciò posto, i potenziali ritardati, relativi a un generico punto potenziato P, hanno le espressioni seguenti:

$$U = A \int_{-l_1}^{l_2} \frac{u(t - Ax' - Ar)}{r} dx', \quad V = 0, \quad W = 0;$$

$$F = U + \frac{\overline{E}_1}{r_1} + \frac{\overline{E}_2}{r_2},$$

r, r_1, r_2 designando le distanze $\overline{PP'}, \overline{PO_1}, \overline{PO_2}$; $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ ciò che divengono E_1, E_2 quando si cambia t in $t - Ar_1$, $t - Ar_2$ rispettivamente.

3. *Caso limite di un filo rettilineo indefinito.* — Per passare al limite, conviene aggiungere, circa la funzione u, la condizione suppletoria che abbia un senso l'integrale

$$\int \frac{u(t - Ax - A\lambda) - u(t - Ax)}{\lambda} d\lambda$$

esteso fino all'infinito da un limite inferiore qualunque ($>$, o anche $= 0$, poichè la funzione sotto il segno resta finita anche per $\lambda = o$).

Consideriamo per un momento ancora il caso di un tratto finito.

Sia Δ la distanza di P dal filo, talchè

$$r^2 = (x' - x)^2 + \Delta^2, \quad r_1^2 = (l_1 + x)^2 + \Delta^2, \quad r_2^2 = (l_2 - x)^2 + \Delta^2.$$

Ponendo

$$\lambda = r + x' - x,$$
$$\lambda_1 = r_1 - l_1 - x = \frac{\varDelta^2}{r_1 + l_1 + x}, \quad \lambda'_1 = r_1 + l_1 + x,$$
$$\lambda_2 = r_2 + l_2 - x,$$
$$\varLambda = \frac{u(t - Ax - A\lambda) - u(t - Ax)}{\lambda},$$

e assumendo come variabile di integrazione λ al posto di x', potremo scrivere:

$$U = A\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varLambda d\lambda + Au(t - Ax)\log(\lambda'_1\lambda_2) + 2Au(t - Ax)\log\frac{1}{\varDelta}.$$

A norma delle (I), (II), l'aggiunta ad U di una funzione f del solo argomento $t - Ax$ non reca alcun contributo alla forza magnetica, mentre incrementa di $-A\dfrac{df}{dt}$ la componente X della forza elettrica. Se si aggiunge anche ad F la stessa funzione f, il campo rimane evidentemente inalterato.

È dunque indifferente risguardare come potenziali ritardati del tratto di corrente O_1O_2, U ed F, ovvero per es.

$$U' = U - A\int_0^{\infty} \varLambda d\lambda - Au(t - Ax)\log(l_1 l_2) =$$
$$= A\left\{-\int_0^{\lambda_1} \varLambda d\lambda - \int_{\lambda_2}^{\infty} \varLambda d\lambda + u(t - Ax)\log\frac{\lambda'_1}{l_1}\frac{\lambda_2}{l_2}\right\} + 2Au(t - Ax)\log\frac{1}{\varDelta},$$
$$F' = U' + \frac{\overline{E}_1}{r_1} + \frac{\overline{E}_2}{r_2}.$$

Queste espressioni presentano sulle prime il vantaggio di ammettere limiti finiti, quando sorgente e collettore tendono all'infinito.

Infatti, per l_1, l_2 convergenti comunque all'infinito, λ_1 tende a zero, $\lambda'_1, \lambda_2, r_1, r_2$ all'infinito, $\dfrac{\lambda'_1}{l_1}$, $\dfrac{\lambda_2}{l_2}$ all'unità, mentre (per l'ipotesi fatta circa la funzione u) $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ restano finiti.

È chiaro allora che la quantità in parentesi nell'espressione di U' ha per limite zero, e così $\dfrac{\overline{E}_1}{r_1} + \dfrac{\overline{E}_2}{r_2}$.

I potenziali del campo sono pertanto

$$(1) \qquad \begin{cases} U' = 2Au(t - Ax)\log\dfrac{1}{\varDelta}, \quad V' = 0, \quad W' = 0; \\ F' = U', \end{cases}$$

e le componenti delle forze magnetica ed elettrica, posto per brevità $Au(t - Ax) = I$,

$$(2) \qquad \begin{cases} 0 \ , \ 2I\dfrac{z-d}{\Delta^2} \ , \ -2I\dfrac{y}{\Delta^2}; \\ 0 \ , \ 2I\dfrac{y}{\Delta^2} \ , \ 2I\dfrac{z-d}{\Delta^2}. \end{cases}$$

Allo stesso risultato si arriva, con ovvie modificazioni, se si suppone che sia integrabile (da un limite inferiore > 0) fino all' ∞ la funzione

$$\mathcal{A}' = \frac{u(t - Ax - A\lambda)}{\lambda},$$

anzichè la $\mathcal{A}$.

La condizione (integrabilità della funzione $\mathcal{A}$, ovvero della funzione $\mathcal{A}'$, in un intervallo estendentesi fino all'infinito), sotto cui sono state dimostrate queste formule, è in particolare soddisfatta per correnti costanti $I = I_0$ (si ha allora $\mathcal{A} = 0$), e per correnti sinusoidali $I = I_0 \operatorname{sen} \{2\pi n(t - Ax) + \alpha\}$ (I_0, n, α costanti), essendo allora integrabile fino all' ∞ la funzione $\mathcal{A}'$.

In generale, se si bada che I altro non è che l'intensità (in misura elettromagnetica) della corrente nel punto Q (piede della perpendicolare abbassata dal punto potenziato P sulla corrente), si può concludere:

Le forze elettromagnetiche, dovute a una corrente rettilinea indefinita, comunque variabile, sono, in un generico punto P del campo, quelle stesse, che proverrebbero da una corrente costante di intensità eguale a quella, che è relativa al punto Q e all'istante considerato [1].

4. *Generalità sul modo di valutare l'influenza di uno schermo conduttore.* — Per tener conto degli effetti, prodotti dalla presenza di un conduttore sopra un campo elettromagnetico assegnato, basta evidentemente aggiungere ai potenziali del campo i contributi provenienti dalle distribuzioni (di cariche e di correnti), che si destano per induzione sul conduttore.

Designino F', U', V', W' i potenziali del campo dato [i quali devono naturalmente soddisfare alle equazioni (III) e (IV)], F_1, U_1, V_1, W_1 quelli (a priori incogniti), che provengono dalle distribuzioni indotte.

Per determinare F_1, U_1, V_1, W_1 — oltre a ovvie condizioni, iniziali o qualitative, di continuità, di regolarità, di comportamento all'infinito, ecc., che per brevità lascio di specificare — abbiamo:

a) le equazioni (III) e (IV), relative, possiamo dire, alla quaderna F_1, U_1, V_1, W_1;

b) le equazioni, che esprimono la legge di Ohm per la superficie conduttrice.

[1] Cfr. Poincaré, *Les oscillations électriques*, pag. 144.

Supponiamo addirittura che quest'ultima sia il piano conduttore $z = o$.

Sia R la resistenza dell'unità di superficie, espressa in unità elettromagnetiche (e quindi $A^2 R$ la misura della stessa resistenza in unità elettrostatiche). Sieno u_1 e v_1 le componenti delle correnti indotte (w_1 e quindi W_1 sono evidentemente nulli).

Le equazioni in questione (relative, si intende bene, al piano $z = o$) si scriveranno:

$$X = A^2 R u_1 \ , \ Y = A^2 R v_1 \ .$$

Le espressioni di X, Y sono a ricavarsi dalle (II), tenendo conto che

$$F = F' + F_1 \ , U = U' + U_1 \ , V = V' + V_1 \ , W = W' \ .$$

Dacchè U_1 e V_1 si comportano come ordinarî potenziali di densità Au_1, Av_1, si avrà dalla nota formula, che caratterizza le discontinuità delle derivate normali,

$$Au_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|} \quad , \quad Av_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|} ,$$

designando con $|z|$ il valore assoluto di z e convenendo d'ora innanzi di risguardare F_1, U_1, V_1 come funzioni di $|z|$, anzichè di z, ciò che è evidentemente giustificato dalla necessaria simmetria di queste funzioni rispetto al piano $z = o$.

Le precedenti equazioni divengono così:

$$(V) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(F' + F_1)}{dx} + A \dfrac{d(U' + U_1)}{dt} = \dfrac{AR}{2\pi} \dfrac{dU_1}{d|z|} , \\ \dfrac{d(F' + F_1)}{dy} + A \dfrac{d(V' + V_1)}{dt} = \dfrac{AR}{2\pi} \dfrac{dV_1}{d|z|} . \end{cases}$$

Sarebbe facile dimostrare che, tenendo conto di tutto, F_1, U_1, V_1 rimangono univocamente determinati.

Ma non è ora il momento di occuparsi di teoria generale. Per il problema, che dobbiamo risolvere, l'accennata univoca esistenza risulterà a posteriori dalla effettiva determinazione delle incognite.

Lo vedremo in una prossima Nota.

Elettrochimica. — *Misura della diffusione elettrolitica, dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni.* Nota II di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. COSSA.

In una Nota inserita in uno dei fascicoli precedenti di questi Rendiconti, sviluppai un metodo per la misura diretta del coefficiente di diffusione e dei numeri di trasporto degli elettroliti e per la conseguente deduzione delle mobilità dei ioni nel caso della dissociazione completa dell'elettrolito. Mi propongo in questa Nota di estendere la teoria esposta, e quindi il metodo di misura, al caso più generale in cui l'elettrolito non sia completamente dissociato. Siccome il metodo esposto è specialmente conveniente per lo studio dell'influenza della concentrazione sulla diffusione e sul trasporto dei ioni, questa generalizzazione sarà certamente utile, perchè ci permetterà di eseguire le misure con soluzioni più concentrate di quelle supposte precedentemente.

Teoria per una soluzione concentrata di un solo elettrolito. — Applicando la legge elementare di Fick per l'idrodiffusione e conservando le notazioni impiegate nella Nota precedente, potremo facilmente stabilire l'equazione differenziale del fenomeno della diffusione in una soluzione di un elettrolito non completamente dissociato. Infatti, se noi ammettiamo che la concentrazione in un punto qualsiasi basti a definire lo stato di quella soluzione in quel punto, cioè il numero totale delle monadi ed il rapporto fra il numero delle molecole dissociate e quelle non dissociate, si deduce immediatamente che la quantità di sostanza S che si diffonderà attraverso la sezione q del cilindro, nell'unità di tempo sarà:

$$S = -D_1 q \frac{\partial c}{\partial x} + i\varepsilon(1-n).$$

Il coefficiente D_1 avrà qui un valore dipendente in generale dal grado della dissociazione e sarà quindi differente dai coefficienti D e D′ precedentemente considerati. Il numero di trasporto n relativo al catione conserverà qui il significato attribuitogli da Hittorf, essendo esso indipendente dal grado di dissociazione. Esso sarà cioè il rapporto fra la quantità del catione passata dallo spazio anodico al catodico e la quantità di catione deposto. Procedendo nel modo consueto si dedurrà per il fenomeno della diffusione, l'equazione:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \tag{1}$$

I fenomeni che avvengono agli elettrodi ci forniranno come al solito due delle condizioni necessarie alla determinazione della soluzione dell'equazione (1). Sapendo infatti che il fenomeno della diffusione avviene come se dall'elettrodo $x = 0$ uscisse e dall'elettrodo $x = L$ entrasse nello strato di liquido la quantità $i\varepsilon(1 - n)$ di elettrolito nell'unità di tempo, potremo affermare che la soluzione della (1) dovrà soddisfare alle condizioni:

$$\left(D_1 \frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} = i\varepsilon(1 - n) \quad \text{per ogni tempo;} \tag{2}$$

$$\left(D_1 \frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=L} = i\varepsilon(1 - n) \quad \text{per ogni tempo.} \tag{3}$$

Infine, supponendo come precedentemente uniforme la concentrazione iniziale avremo:

$$c = c_0 \quad \text{per } t = 0. \tag{4}$$

Per potere integrare quest'equazione ci è utile di introdurre una ipotesi semplificativa, però in perfetto accordo colle condizioni esperimentali. Abbiamo precedentemente veduto e si può facilmente dimostrare anche nel caso attuale, che diminuendo la distanza fra i due elettrodi, possiamo rendere arbitrariamente piccole le differenze di concentrazione, che si riscontrano nel nostro elettrolito. Potremo così giungere ad un limite in cui praticamente saranno trascurabili le variazioni del coefficiente D_1 e di n nell'intervallo di concentrazioni considerato e quindi integrare l'equazione (1) supponendo in essa e nelle condizioni espresse dalle equazioni (2), (3) e (4) i valori di D_1 ed n costanti.

Questa semplificazione è completamente lecita, quando però si possano sperimentalmente realizzare, come nel caso nostro, le condizioni supposte dalla teoria. Questo artifizio fu spesso impiegato in tutti i rami della fisica e diede sempre buoni risultati, quando le condizioni sperimentali erano tali da giustificarlo.

Lo stato stazionario della concentrazione per una corrente di intensità i si deduce come per il caso considerato nella Nota precedente; si avrà quindi:

$$c_s = c_0 + \frac{i\varepsilon(1 - n)}{D_1 q}\left(x - \frac{L}{2}\right). \tag{5}$$

Agli elettrodi si avrà:

$$\text{Catodo:} \quad (c_s)_{x=0} = c_0 - \frac{i\varepsilon(1 - n)}{D_1 q}\frac{L}{2}$$

$$\text{Anodo:} \quad (c_s)_{x=L} = c_0 + \frac{i\varepsilon(1 - n)}{D_1 q}\frac{L}{2}.$$

Lo stato variabile delle concentrazioni quando, dopo aver raggiunto lo stato stazionario, si interrompa la corrente e si assuma quell'istante come

lo zero del tempo, si dedurrà in modo identico a quello impiegato nella Nota precedente, e si avrà quindi:

$$(6)\quad c = c_0 - \frac{4}{\pi^2}\frac{i\varepsilon(1-n)}{D_1 q}\,L\left\{e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t}\cos\frac{\pi}{L}x + \frac{1}{9}e^{-9\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t}\cos\frac{3\pi}{L}x + \cdots\right\}$$

Ai due elettrodi le concentrazioni saranno:

$$\text{Catodo:}\quad (c)_{x=0} = c_0 - \frac{4}{\pi^2}\frac{i\varepsilon(1-n)}{D_1 q}\,L\left\{e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t} + \frac{1}{9}e^{-9\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t} + \cdots\right\}$$

$$\text{Anodo:}\quad (c)_{x=L} = c_0 + \frac{4}{\pi^2}\frac{i\varepsilon(1-n)}{D_1 q}\left\{e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t} + \frac{1}{9}e^{-9\frac{\pi^2 D_1 t}{L^2}} + \cdots\right\}.$$

Per avere la forza elettromotrice della pila a concentrazione costituita dal nostro sistema elettrolitico, applichiamo come nel caso precedente la teoria osmotica della pila di Nernst, tenendo però conto della dissociazione incompleta. Indichiamo con α il grado di dissociazione e con k il numero dei ioni in cui una molecola si decompone; $1+(k-1)\alpha$ sarà il fattore i' di Van 't Hoff. La forza elettromotrice allora, nelle ipotesi restrittive fatte relativamente alla variazione di α, sarà data dalla nota formula:

$$E = -0{,}0000866\,\frac{i'}{n'}\,\frac{v}{u+v}\,T\ln\frac{(c)_{x=L}}{(c)_{x=0}}\ \text{Volta}.$$

Sostituendo ad i' e a $\frac{u+v}{v}$ i loro valori si avrà:

$$(7)\qquad E = -0{,}0000866\,\frac{1+(k-1)\alpha}{n'}(1-n)\,T\ln\frac{(c)_{x=L}}{(c)_{x=0}}\ \text{Volta}.$$

Sostituendo in seguito per c i valori dedotti, sia per lo stato stazionario, sia per quello variabile e sviluppando il logaritmo come precedentemente, avremo rispettivamente per lo stato stazionario:

$$(8)\qquad E_s = 0{,}0001732\,\frac{1+(k-1)\alpha}{n'c_0}\,\frac{(1-n)^2}{D_1}\,T\,\frac{i\varepsilon L}{q}\ \text{Volta}$$

e per lo stato variabile, dopo un tempo sufficientemente lungo:

$$(9)\quad E = 0{,}0001732,\frac{1+(k-1)\alpha}{n'c_0}\,\frac{8}{\pi^2}\,\frac{i\varepsilon L}{q}\,T\,\frac{(1-n)^2}{D_1}\,e^{-\frac{\pi^2}{L^2}D_1 t}\ \text{Volta}.$$

Quest'ultima formula vale naturalmente solo quando sia trascorso un tempo sufficientemente lungo dall' interruzione della corrente.

Finalmente determinando i decrementi logaritmici della forza elettromotrice per l'intervallo di tempo Δt avremo:

$$\ln \frac{(E)_t}{(E)_{t+\Delta t}} = \frac{\pi^2}{L^2} D_1 \Delta t . \tag{10}$$

Mediante le formule (8) e (10) potremo in modo identico a quello impiegato precedentemente, dedurre dalle osservazioni fatte i valori di D_1 e di n, valevoli per la concentrazione c_0 e per il grado di dissociazione α dell'elettrolito impiegato. Il valore di α si potrà determinare con uno qualsiasi dei soliti metodi, per esempio molto comodamente col metodo della misura delle conducibilità molecolari.

Le semplificazioni che noi abbiamo finora introdotte nello sviluppo della teoria corrispondono a condizioni sperimentali, che possiamo realizzare con qualsiasi grado di approssimazione.

Il metodo si presta quindi assai bene alla misura dei numeri di trasporto e del coefficiente di diffusione degli elettroliti disciolti. Vedremo in seguito come l'esperienza confermi la teoria.

Se però ci proponiamo di giungere alla determinazione delle mobilità U e V dei ioni, dobbiamo entrare in un campo assai più ipotetico ed incerto.

L'incertezza però non è inerente al metodo di misura, ma all'applicazione della teoria osmotica a soluzioni non estremamente diluite. Siccome però quasi tutte le teorie della chimica moderna sono affette da questa inesattezza, credo non del tutto prive d'interesse le poche considerazioni seguenti, quantunque meno rigorose.

Esprimiamo dapprima la quantità di elettrolito, che si diffonde nell'unità di tempo attraverso la sezione q del nostro cilindro per l'azione delle sole forze della diffusione, prendendo a base la teoria osmotica delle soluzioni, invece della legge di Fick, per quanto riguarda la parte di elettrolito dissociato. Supponendo per semplicità l'elettrolito binario ed indicando con α il grado di dissociazione e con p' la pressione osmotica dovuta alle molecole dissociate, la quantità S' di elettrolito dissociato che si diffonderà, sarà data, per le note considerazioni di Nernst, dall'equazione:

$$S' = -\frac{2UV}{U+V} q \frac{\partial p'}{\partial x} .$$

Se supponiamo la soluzione abbastanza diluita per potere applicare ad essa l'eguaglianza fondamentale della teoria osmotica delle soluzioni:

$$p'v = RT ,$$

allora potremo eliminare la pressione p' introducendo in sua vece la corrispon-

dente concentrazione c'; si avrà:

$$S' = -\frac{2UV}{U+V} R T q \frac{\partial c'}{\partial x}.$$

Applicando poi la legge di Fick alla diffusione delle molecole non dissociate, aventi la concentrazione c'', ed indicando con D'' il coefficiente di diffusione di esse, definito nel modo consueto, si avrà:

$$S'' = -D'' q \frac{\partial c''}{\partial x}.$$

Ma indicando con c la concentrazione totale dell'elettrolito, sarà:

$$c' = \alpha c \quad \text{e} \quad c'' = (1-\alpha) c.$$

La quantità totale di elettrolito che si diffonde attraverso la superficie q nell'unità di tempo sarà così:

$$S = -\left\{\alpha \frac{2UV}{U+V} RT + (1-\alpha) D''\right\} q \frac{\partial c}{\partial x}. \tag{11}$$

La quantità fra parentesi sarà quindi il coefficiente di diffusione dell'elettrolito per il grado α di dissociazione; esso sarà eguale a quello che abbiamo dedotto sperimentalmente ed indicato con D_1 nella teoria precedente.

In un intervallo di concentrazioni in cui si possa ritenere D'', U e V costanti, eseguendo due determinazioni di D_1 per i gradi di dissociazione α' ed α'', si potrà determinare separatamente D'' e $\frac{2UV}{U+V}$.

Si avrà infatti, indicando con D_1' e D_2'' i due valori del coefficiente di diffusione totale dedotti:

$$D_1' = \alpha' \frac{2UV}{U+V} RT + (1-\alpha') D''$$

$$D_1'' = \alpha'' \frac{2UV}{U+V} RT + (1-\alpha'') D''.$$

Quindi:

$$\frac{2UV}{U+V} = \frac{D_1'(1-\alpha'') - D_1''(1-\alpha')}{\alpha' - \alpha''}, \quad D'' = \frac{D_1'\alpha'' - D_1''\alpha'}{\alpha'' - \alpha'}. \tag{12}$$

Servendosi poi del valore di n precedentemente dedotto e che nell'ipotesi della costanza di U e V sarà pure costante fra i gradi di dissociazione α' ed α'', potremo calcolare le quantità U e V. Si osservi, che l'esattezza che si può raggiungere in questa misura, può essere in alcuni casi assai limitata, perchè le quantità volute sono espresse come differenze di altre

quantità che possono essere assai grandi. In alcuni casi perciò converrà limitarsi alla determinazione del numero di trasporto e calcolare poi U e V, determinando separatamente le conducibilità molecolari e servendosi della legge di Kohlrausch.

Esempio esperimentale. — Consideriamo come esempio alcune misure eseguite su soluzioni di solfato di zinco più concentrate di quella impiegata nell' esperienza riportata nella Nota precedente. Il grado di dissociazione ammesso concorda perfettamente con quello misurato da Arrhenius.

Dal decremento logaritmico delle forze elettromotrici si calcolano, mediante la formula (10), i valori di D_1. Allora si può dai valori osservati per le forze elettromotrici stazionarie calcolare i valori di $1 - n$ e quindi di n, servendosi della formula (8).

Nella seguente tabella sono riuniti i risultati di una serie di misure. Nella prima colonna (c) sono riportati i valori delle concentrazioni in gr. mol. per litro; nella seconda l' intensità della corrente in amp.; nella terza colonna (E_s) i valori osservati della forza elettromotrice stazionaria espressi in Volta; nella quarta i valori medi dei decrementi logaritmici (Δ); nella seguente i valori calcolati del coefficiente di diffusione totale (D_1); nella sesta il grado di dissociazione (α) misurato; nella nona il valore di $(1 - n)$ calcolato.

Nella settima (A) ed ottava (B) colonna sono riportati rispettivamente i valori di $\frac{2\,U\,V}{U + V}$ RT e di D″; nelle due ultime poi i valori dedotti di U e V.

Per passare da questi ultimi ai valori relativi delle mobilità u e v, basta ricordare che la relazione fra di essi è:

$$U = u \quad 1,036 \quad 10^{-13} \qquad\qquad V = v \quad 1,036 \quad 10^{-13}.$$

c	i	e_s	Δ	D_1	α	A	B	1-n	U	V
1/2000	$1{,}05.10^{-4}$	0.00968	0,06805	$4{,}60.10^{-6}$	0,90	—	—	0,735	—	—
1/1000	$2{,}21.10^{-5}$	0,01025	0,06070	4,10 »	0,80	$5{,}10.10^{-6}$	$0{,}06{,}10^{-6}$	0,713	$28{,}2.10^{-13}$	$70{,}0.10^{-13}$
1/500	$4{,}54.10^{-4}$	0,01055	0,05775	3,90 »	0,76	5,12 »	0,10 »	0,704	28,8 »	68,4 »
1/200	$1{,}30.10^{-3}$	0,01107	0,05180	3,51 »	0,66	4,88 »	0,083 »	0,686	28,2 »	61,7 »
1/100	$2{,}59.10^{-3}$	0,01160	0,04704	3,18 »	0,58	4,97 »	0,075 »	0,666	29,8 »	59,5 »
1/50	$5{,}22.10^{-3}$	0,01140	0,04580	3,10 »	0,51	3,70 »	0,25 »	0,654	23,0 »	43,5 »
1/20	$1{,}40.10^{-2}$	0,01145	0,04305	2,91 »	0,43	4,13 »	0,18 »	0,636	25,7 »	35,3 »

Come si vede le variazioni dei coefficienti di diffusione e dei numeri di trasporto risultano perfettamente regolari. I valori di essi sono determinati con un grado elevato di precisione. È pure assai preciso il valore che si

ottiene per $2 \frac{UV}{U+V}$ RT (colonna A), mentre invece non si può ritenere che esatto relativamente all'ordine di grandezza il valore di D″ (colonna B).

I valori di U e V non vengono però influenzati da questa incertezza. Essi sono quindi un po' meno esatti dei valori di $(1-n)$, ma sono però di gran lunga più esatti dei valori di D″.

I precedenti risultati sono sufficienti per dimostrare l'attuabilità pratica di questo metodo di misura. Essi non possono però ancora riguardarsi come esempio di tutta l'esattezza cui si può giungere, perchè le misure furono eseguite cogli apparecchi di cui si disponeva e che non erano certamente i più convenienti.

Mi riservo di dare fra breve tempo una serie di misure eseguite con apparecchi speciali, e di dedurne allora alcune importanti conseguenze sperimentali.

Fisica terrestre. — *Propagazione dei terremoti.* Nota di GIULIO GRABLOVITZ, presentata dal Socio BLASERNA.

Il problema della propagazione dei terremoti è da lungo tempo oggetto di ricerche da parte degli studiosi di geodinamica, senza aver raggiunto ancora una favorevole soluzione; il che se da una parte è da ascriversi alle imperfezioni degli strumenti e dei dati, specialmente in quanto concerne la precisione cronometrica, d'altra parte è dovuto all'indole stessa del fenomeno che, nelle odierne condizioni della registrazione, si presenta in modo vago e spesso mal definito.

Senza fare distinzione d'apparecchi, nè discutere le ragioni del loro differente comportamento, è fuor di dubbio che dal complesso delle registrazioni ottenute coi metodi moderni emergono tre fasi principali, le quali riescono ben distinte nei terremoti di lontana provenienza, confuse in quelli meno lontani, sovrapposte nei vicinissimi; fra quelli il tipo per noi più comune e frequente è quello dei terremoti giapponesi, che all'ingrosso si presentano con le seguenti fasi:

1) Impulsi rapidi che giungono in Italia circa un quarto d'ora dopo il principio del terremoto all'epicentro e si protraggono per parecchi minuti.

2) Moti rallentati più ampî dei precedenti, 10 minuti dopo, ossia 25 minuti dopo il principio all'epicentro.

3) Ingresso d'oscillazioni lente (periodo 15 secondi) 30 minuti dopo la prima fase o 45 dopo il principio all'epicentro; queste oscillazioni raggiungono ordinariamente la loro massima ampiezza da 5 a 10 minuti dopo il loro ingresso e vengono precedute da oscillazioni lentissime (periodo 1 minuto) di poca ampiezza rivelate da strumenti di squisitezza speciale.

Questa terza fase si protrae a volte qualche ora, senza che se ne possa precisare l'estinzione, a misura della sensibilità degli apparecchi.

Lungi dal voler entrare nel campo della teoria di tali movimenti, sperimentalmente accertati, non mi pare superfluo accennare che in questi ultimi anni venne accettata con favore l'ipotesi delle oscillazioni longitudinali e trasversali, le prime delle quali rappresenterebbero la prima delle dette fasi, e le seconde la terza, lasciando insoluta la seconda fase, che è tanto evidente, ma che potè in addietro venire trascurata o confusa con la prima.

Comunque siasi, la presenza di tre fasi distinte è in oggi generalmente riconosciuta, anche senza considerare le oscillazioni lentissime precorritrici della terza fase, le quali specialmente nei terremoti provenienti da un quarto di cerchio massimo di distanza si accentuano agli apparecchi migliori.

Gl'intervalli fra l'inizio delle tre fasi e le loro durate crescono a misura della distanza, e conseguentemente apparisce più esteso tutto lo sviluppo del sismogramma; è logico dunque ammettere che un rapporto debba esistere fra gl'intervalli in questione e la distanza dell'epicentro. Chiunque abbia seguìto con attenzione i risultati da me esposti nel Bollettino della Società Sismologica Italiana ed altrove, avrà osservato che di frequente calcolai per approssimazione la probabile distanza dell'epicentro, come fecero anche altri, pur senza la pretesa d'elevare a metodo una formola semplicissima che, in un'epoca in cui male conoscevansi le fasi e peggio gl'istanti dei fenomeni sismici osservati, non poteva essere che grossolanamente approssimata.

Questa formola consisteva nel coefficiente di Ch 300 per ogni minuto d'intervallo fra il principio della prima fase e quello della terza fase, ed era il risultato necessario della supposizione del Cancani, che cioè le oscillazioni longitudinali dell'ipotesi Wertheim avessero la velocità di Ch 5 al secondo e le trasversali quella di $2\,{}^1/_2$; l'Agamennone, avendo in seguito trovato altri valori per le due velocità, revocò in dubbio l'applicabilità di quel coefficiente, ma è un fatto che se al primo impulso si attribuisce una velocità *uniforme* di chilom. 8,3 a 10,6 (in media 9,45) al secondo, in base all'analisi dell'A. (V. *Il terremoto dell'India del 12 giugno 1897 registrato in Europa*, Rendiconti Lincei, 1° maggio 1898) ed al principio della terza fase quella realmente uniforme di chilom. 3,3 assegnatagli dall'Oldham (quella di 2,7 calcolata dall'A. riferendosi alla massima fase e non al principio), questi due valori combinati non darebbero un coefficiente molto differente da quello; infatti, data la distanza K dell'epicentro in chilometri, l'intervallo in minuti M tra gli arrivi delle due specie di moto sarà espresso dall'equazione:

$$M = \frac{K}{198} - \frac{K}{367}$$

da cui:

$$K = \frac{112266\ M,}{567 - 138} = 304{,}25\ M,$$

risultato ottenuto, come vedesi, da dati non miei e su terremoti avvenuti posteriormente all'adozione del suddetto coefficiente.

Nell'adottare ora l'uniformità della velocità del primo impulso, non ho fatto che tenere presente quanto l'A. recentemente insegnava nella nota in calce a pag. 55 del vol. III del Bollettino della Società Sismologica Italiana sull'inutilità dell'impiego di equazioni quadratiche. È certo che volendo considerare uniforme pure la progressione d'una serie di quadrati di

numeri intieri come 4, 9, 16, 25, 36,
si ottiene la progressione rettilinea 2, 10, 18, 26, 34,

che di poco se ne discosta, per cui avendo da fare con dati grossolani, per piccole distanze, non resta nulla di meglio da ricavare; ma su grandi distanze e con dati più attendibili forniti da osservatori competenti la cosa cangia aspetto, ed ora m'accingo a dimostrare a quali modificazioni possa andare realmente soggetto il coefficiente di chilom. 300 dietro il miglioramento dei metodi d'osservazione.

Tra gl'insigni scienziati esteri che più seriamente accolsero come argomento di studio l'intervallo che decorre dal primo impulso alla fase massima, mi piace notare il Milne, di cui sono note le pubblicazioni fatte nei rapporti annuali alla « British Association for the advancement of Science », l'Oldham, che recentemente pubblicò apposita Memoria dal titolo: *On the propagation of eartkquake motion to great distances*, nelle « Philosophical Transactions of the Royal Society of London », ed il Belar, che adottò il coefficente di chilom. 300 per calcolare nei suoi bollettini la probabile distanza dell'epicentro.

I confronti fatti fra gli apprezzamenti del Belar ed i miei mi convinsero non esser cosa tanto facile il valutare l'istante esatto dell'ingresso delle oscillazioni lente, poichè sebbene i sismogrammi fossero dati da due strumenti quasi identici (pendoli orizzontali del mio sistema) e riuscissero molto analoghi, la stima della distanza riusciva spesso alquanto differente nel primo apprezzamento. Del pari nella Memoria dell'Oldham l'elenco dei quattro dati, rappresentanti il principio delle tre fasi ed il massimo della terza, offre talvolta a parità di distanza epicentrale sensibili divergenze che non possono ascriversi ad un differente modo di propagazione dell'onda sismica, ma debbono invece attribuirsi a cause strumentali o ad apprezzamento individuale.

Perciò, stante la difficoltà di apprezzamenti sicuri e le incertezze dell'ora, nonchè dell'ubicazione epicentrale, non mi parve il caso di applicare metodi rigorosi a singoli casi, nè ai risultati d'una sola stazione, pur dotata di molti e svariati apparecchi, come questa d'Ischia, ma estesi invece i calcoli ad un grande numero di dati e di stazioni, confidando nella reciproca eliminazione degli errori anzidetti.

A ciò si prestano benissimo i dati compilati dall'Oldham che riguardano i seguenti terremoti:

1. Giappone 22 marzo 1894.
2. Argentina 27 ottobre 1894.
3. Giappone 15 giugno 1896 e due repliche.
4. Giappone 31 agosto 1896.
5. India 12 giugno 1897.
6. Giappone 5 agosto 1897.
7. Turkestan 17 settembre 1897 ed una replica.

Le stazioni, di cui egli utilizzò i dati, ed il numero di questi per ogni singola stazione e fase, figurano qui appresso;

	I	II	III Pr.	III M.	Totale
Catania . . .	6	7	2	8	23
Ischia . . .	9	14	10	12	45
Padova . . .	5	1	4	1	11
Pavia	1	0	2	1	4
Roma	11	9	16	15	51
Rocca di Papa .	7	12	20	18	57
Siena	2	2	2	2	8
Totale Italia .	41	45	56	57	199

	I	II	III Pr.	III M.	Totale
Charkow . .	3	2	1	0	6
Edimburgo .	1	1	2	0	4
Nicolajew . .	3	5	3	1	12
Potsdam . .	0	2	1	0	3
Shide . . .	2	2	4	3	11
Strasburgo .	2	1	0	0	3
Totale Estero .	11	13	11	4	39
Totale generale	52	58	67	61	238

Questi dati con le distanze epicentrali calcolate dall'Oldham mi servirono ai calcoli che fo seguire; secondo il diagramma dell'Oldham, il ritardo in minuti primi, in cui le varie fasi perequate succedono al primo impulso epicentrale, è dato dalla seguente tabella:

Distanze in gradi:	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Iª fase	(2.7)	5.2	7.3	9.1	10.6	12.0	13.2	14.3	15.2	16.0	16.7	17.2	17.7
IIª »	(4.7)	8.9	12.4	15.5	18.2	20.6	22.6	24.2	25.6	26.6	27.3	27.8	28.1
IIIª » Principio	(5.4)	11.1	16.6	22.3	27.8	33.5	39.0	44.8	50.3	(56.1)	(61.5)	(67.2)	(72.7)
» » Massimo	(6.5)	13.2	19.7	26.2	33.0	39.4	46.1	52.9	59.5	(66.0)	(72.7)	(79.2)	(85.7)

I valori tra parentesi al principio appartengono ai tratti punteggiati per incertezza delle curve dell' Oldham; quelli alla fine sono da me completati, perchè eccedono i limiti del diagramma; i dati su cui si basano sono compresi fra 27° 5 e 120° 9 dall' epicentro, per cui quelli appartenenti a 20° ed a 130° sono extrapolati.

Il Milne a sua volta, a pag. 66 del quinto tra i citati rapporti (1900), dà una tabella rappresentante gl' intervalli fra i tremiti preliminari e la massima fase di 20 terremoti registrati in varie stazioni estere dal 30 agosto 1896 al 20 gennaio 1900, soli 4, dei quali sono comuni con quelli trattati dall'Oldham. Tenuto conto delle sole osservazioni di Shide, Kew e Toronto, che ne costi-

tuiscono il maggior numero, e disponendole a gruppi secondo la distanza, ne ottengo le seguenti medie:

Distanza media in gradi:	22°4	37°8	58°4	80°6	99°8
Intervallo in minuti:	8.8	14.9	24.2	36.9	49.7

le quali s'accordano soddisfacentemente coi valori che dà la suesposta tabella fra la I fase ed il massimo della III, e ciò è importante se si considera che i soli 11 dati di Shide dell'elenco Oldham riguardano i 4 terremoti in comune coll'elenco del Milne, mentre gli altri 227 ne sono indipendenti.

L'Oldham tratta tutti casi in cui riescono distinte le tre fasi, mentre il Milne non considera che la massima fase in relazione al primo impulso, sopra terremoti, il più vicino dei quali ha l'epicentro a 16° di distanza. Restano dunque esclusi terremoti vicinissimi; ciò peraltro non impedisce di rilevare che mentre da distanze di un quarto di cerchio massimo il primo impulso giunge con la velocità di 10 chilometri al secondo, a minori distanze non si trova la stessa velocità, anzi presso all'epicentro si trova compresa fra 2 e 3 chilometri al secondo. Nè è a credersi che questo risultato riguardi forse terremoti di speciali località, poichè gli stessi terremoti giapponesi ed indiani che qui giungono con quella elevatissima velocità, entro l'area di maggiore scuotimento si propagano con velocità moderata, come lo dimostrano le analisi dell'Omori e dell'Oldham; e la convinzione in sì moderata velocità è tanto invalsa (e giustamente), che i più illustri sismologi nel riportare le ore all'epicentro da località circonvicine impiegano il valore di chilom. 3 al secondo, non già quello di chilom 10, benchè a loro non ignoto.

La ragione di quest'apparente anomalia mi sembra risiedere in un fatto semplicissimo; le oscillazioni della terza fase, che a grandi distanze giungono con periodo assai rallentato, rappresentano, qualunque sia la forma che loro vogliasi attribuire, movimenti assai più ampî di quelli microsismici della prima fase; questi a grandi distanze non vengono registrati che da apparecchi di forte amplificazione, quelle dai pendoli a lungo periodo; ma sfuggono entrambi alla percezione dei sensi e ad apparecchi grossolani, gli uni per la loro esiguità, le altre per la loro lentezza. Peraltro, presso all'epicentro la lunghezza dell'onda della terza fase sarà certamente di gran lunga minore, ed è forse questa la fase che si rivela di preferenza, sia ai nostri sensi, sia negli effetti sugli edificî, sia agli strumenti più grossolani. Ma vi è un'altra circostanza: come ho già asserito e come si vedrà dagli ulteriori procedimenti, la velocità della prima fase è realmente crescente; presso l'epicentro pare essere tanto moderata da essere precorsa dalla terza fase, cosicchè anche dai sismogrammi più perfetti e delicati non è il caso di rintracciare per alcuna delle tre fasi nemmeno un accenno alla velocità di 10 chilom. al secondo, che con tanta sicurezza si riscontra alla distanza di un quarto di cerchio massimo.

Mi pareva a primo aspetto che la velocità della prima fase progredisse semplicemente col quadrato della distanza, secondo le leggi della gravità ed i confronti eseguiti sembravano confermare fino ad un certo punto l'ipotesi; ulteriori e più diligenti ricerche m'hanno invece consigliato a sottomettere a calcolo i dati col supporre i tempi proporzionali ad una potenza, ancorchè frazionaria, della distanza.

La prima e la seconda fase, per le quali v'era dubbio se si dovesse ammettere la propagazione lungo la superficie o per la corda, le ho considerate sotto entrambi i punti di vista, la terza fase l'ho calcolata sulla superficie, ossia mediante la distanza numericamente espressa dal suo arco di cerchio massimo, essendo bene manifesta l'uniformità della sua propagazione secondo l'arco e non per la corda.

Date dunque:

D distanza in gradi alla superficie,

δ detta in frazione di diametro terrestre $\left(\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\text{D}\right)$,

x esponente da determinarsi,

y coefficiente della velocità,

m il ritardo in minuti rispetto all'istante epicentrale;

le formole destinate al calcolo si presentano come segue:

Per le due prime fasi in arco: $\text{D}^x\ y = m$,

» » » » » » corda: $\delta^x\ y = m$,

» la terza fase in arco: $\text{D}\ y = m$, tanto pel principio quanto per la massima ampiezza.

Disposti tutti i dati in colonna secondo la distanza, ho raggruppato quelli della I e II fase a serie di 10 od 11, creando per ogni caso cinque equazioni logaritmiche di condizione, cioè:

I e II fase in arco: $(\log \text{D})\ x + \log y = \log m$,

idem » » corda: $(\log \delta)\ x + \log y = \log m$,

e ne ho ottenuti i seguenti risultati:

I fase in arco: $x = 0.5980$, $y = 1.0236$;

» » » corda: $x = 0.6912$, $y = 19.159$;

II » » arco: $x = 0.6682$, $y = 1.2756$;

» » » corda: $x = 0.7426$, $y = 32.806$.

I valori di x si approssimano di molto alle frazioni $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, sostituendo le quali ai medesimi, i valori di y si modificano di poco, cioè:

I in arco = 1.0147, in corda = 18.930;

II » » = 1.2838, » » = 33.326.

Nel seguente quadro figurano:

a) le distanze medie in gradi;
b) i valori medî primitivi;
c) i valori calcolati col primo risultato in arco e corda;
d) i valori modificati, con accanto i rispettivi errori in centesimi di minuto:

	a	*b*	*c*		*d*	
			arco	corda	arco	corda
	°	m	m	m	m	m
Iª fase	56.69	11.68	11.45 + 23	11.42 + 26	11.44 + 24	11.49 + 19
	67.19	12.37	12.67 — 30	12.74 — 37	12.67 — 30	12.77 — 40
	82.34	14.17	14.31 — 14	14.34 — 17	14.31 — 14	14.32 — 15
	86.09	14.55	14.70 — 15	14.71 — 16	14.70 — 15	14.67 — 12
	93.60	15.82	15 45 + 37	15 36 + 46	15.46 + 36	15.29 + 53
	Somma errori		1.19	1.42	1.19	1.39
IIª fase	40.09	14.90	15.03 — 13	14.97 — 7	15.04 — 14	14.92 — 2
	64.55	21.02	20.66 + 36	20 83 + 19	20.65 + 37	20.82 + 20
	79.19	24.22	23.68 + 54	23.72 + 50	23.67 + 55	23.74 + 48
	86.82	24.40	25.18 — 78	25.12 — 72	25.17 — 77	25.15 — 75
	88.80	25.56	25.56 — 0	25.46 + 10	25.55 + 1	25.50 + 6
	Somma errori		1.81	1.58	1.84	1.51

dal quale si scorge che l'arrotondamento delle potenze frazionarie x apporta differenze inconcludenti ed in qualche caso un vantaggio, mentre nel complesso gli errori sono tutti inferiori a $^4/_5$ di minuto. Di gran lunga maggiori risulterebbero gli errori considerando la velocità direttamente proporzionale alla distanza.

Resta a vedersi quale sia la via che più logicamente gli urti sismici percorrono, cioè se l'arco o la corda; le differenze tra gli errori mi paiono troppo esigue per decidere la questione; piuttosto gli esponenti vi si prestano sotto il punto di vista della semplicità, cioè col preferire i due esponenti rappresentati dalla frazione di $^2/_3$ che corrisponde alla radice cuba del quadrato e che sta in relazione con la corda nella prima fase, con l'arco nella seconda, fatto che mi pare logico se non dimostrato.

Il principio della terza fase mi dà per risultato un percorso uniforme di 1° in 0^m 5711; il massimo della stessa 1° in 0^m 6592, cui s'approssimano soddisfacentemente i valori del diagramma Oldham.

Dai valori trovati si ricava il seguente quadro riformato:

Distanze in gradi	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
Iª fase	3.7	5.9	7.7	9.3	10.7	11.9	13.1	14.1	15.0	15.8	16.6	17.2	17.7
IIª »	6.0	9.5	12.4	15.0	17.4	19.7	21.8	23.8	25.8	27.7	29.5	31.2	32.9
IIIª fase (principio)	5.7	11.4	17.1	22.8	28.6	34.3	40.0	45.7	51.4	57.1	62.8	68.5	74.2
» » (massimo)	6.6	13.2	19.8	26.4	33.0	39.6	46.1	52.7	59.3	65.9	72.5	79.1	85.7

e pei primi 10°:

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Iª fase	0.80	1.27	1.67	2.02	2.34	2.65	2.94	3.21	3.47	3.72
IIª »	1.28	2.04	2.67	3.24	3.76	4.24	4.70	5.13	5.56	5.96

Combinando le formole, risulta che la prima fase procede da principio con minor velocità della terza, in guisa che appena a chilom. 302 dall'epicentro le due fasi arrivano contemporaneamente.

Per meglio convincermi dell'inalterabilità dei coefficienti trovati per varie distanze, ho voluto scindere il calcolo, trattando separatamente i sette terremoti, e ne ho ottenuto i seguenti risultati:

	Distanze	I	II	III Pr.	III M.
7. Turkestan	41°.7	20°.06	1°.29	0°.57	0°.74
5. India	65.5	19.14	1.29	0.61	0.67
1. Giappone	80.2	19.35	1.35	0.53	0.65
4. »	83.6	17.45	1.36	0.60	0.67
6. »	85.5	18.75	1.24	0.53	0.67
3. »	88.0	20.32	1.30	0.57	0.62
2. Argentina	107.4	20.70	1.14	0.54	0.67

che non rivelano alcuna legge collegata alla differente distanza media dell'epicentro dalle stazioni europee di cui si utilizzarono i dati, il segno degli errori essendo saltuario.

Con ciò sono ben lungi dal voler fissare che tali coefficienti siano gli stessi per qualsiasi natura di terreno; al contrario, sono convinto ch'essi non s'attagliano che al grosso andamento delle perturbazioni sismiche considerate su grandi distanze, in cui riesce più completa la reciproca compensazione delle anomalie. Queste potranno venir messe in evidenza soltanto da perfezionati metodi d'osservazione e la loro ricerca in oggi sarebbe prematura.

Tenuto dunque conto:

1) che nell'analisi dei terremoti nell'area ove vengono avvertiti dal pubblico, raramente si eccede il migliaio di chilometri;

2) che nei dati orarî del maggior numero di stazioni in luogo del primo impulso viene apprezzata una fase più avanzata, ed anche questa soffre ritardo nel venire rilevata;

3) che i coefficienti della velocità, considerati costanti nell'analisi di terremoti lontani, possono subire invece grandi modificazioni su piccole distanze per prevalenza di terreni più o meno favorevoli alla rapidità della propagazione;

4) che la stessa terza fase, della velocità accertata di chilom. 3 al secondo nell'area epicentrale è più sentita e precorre alle altre;

5) che la profondità dell'epicentro, trascurabile in gran parte su grandi distanze, può influire molto su distanze più brevi; è certo che occor-

rono osservazioni precise, fatte coi migliori strumenti, per dedurne quelle leggi che invano si tenta di trarre da informazioni narrative ed inesatte. Intanto mi spiego benissimo come i terremoti, studiati fino alla distanza di un migliaio di chilometri, possano dare l'illusorio risultato d'una velocità uniforme.

Riguardo poi al coefficiente di chilom. 300, è chiaro che una volta accertata la variabile velocità della prima fase, debba anch'esso divenire variabile secondo le distanze; dal quadro ricavato dalle formole si ottiene il seguente rapporto entro i limiti di distanza, da cui provengono i terremoti con tre fasi ben distinte, cioè:

Distanze	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
Rapporto	329	310	298	289	281	275	269	265	260

talchè si scorge che il grossolano coefficiente di chilom. 300 non era poi tanto distante dalla realtà.

Con ciò sono lontano dal presumere d'aver dato risultati definitivi; ho voluto semplicemente dissipare qualche equivoco e dimostrare la stretta necessità di adottare strumenti che forniscano con la maggiore nitidezza possibile il distacco delle fasi sismiche, e di procedere fino allo scrupolo nel loro campionamento cronometrico che in oggi lascia dovunque, fatte poche eccezioni, moltissimo a desiderare.

Chimica fisica. — *Sugli equilibri eterogenei fra cristalli misti di idrati salini isomorfi.* Nota I. di G. Bruni e W. Meyerhoffer [1], presentata dal Socio G. Ciamician.

Le ricerche sui fenomeni d'equilibrio eterogeneo nelle miscele ternarie in cui possono formarsi cristalli misti, sono finora relativamente scarse. Di ricerche riguardanti casi speciali accenneremo quelle di Bakhuis Roozeboom [2] sulla solubilità dei cristalli misti di sali isomorfi (le prime nelle quali fu applicata in questo campo la teoria delle fasi) e quelle di Fock [3] e Stortenbecker [4] sullo stesso argomento. Inoltre i lavori di Bruni [5] sui feno-

(1) La parte teorica di questo lavoro era già pronta fin dal giugno scorso; il desiderio di presentarla assieme ad una larga serie di risultati sperimentali ci indusse a ritardarne la publicazione. Ora però l'annunzio di una comunicazione sullo stesso soggetto presentata da R. F. Hollmann al Congresso dei naturalisti russi tenutosi a Pietroburgo il 5 gennaio scorso, ci costringono a pubblicarlo subito. Ci riserviamo di esporre in seguito i risultati delle nostre esperienze con tutti i particolari.

(2) Zeitschr. f. physik. Chemie VIII, 504, 531.

(3) Zeitschr. f. Krystallographie XXVIII, 337.

(4) Zeitschr. f. physik. Chemie XVII, 643; XXII, 60; XXXIV, 108.

(5) Gazz. chim. ital., 1897, I, 549; 1898, II, 522.

meni crioidratici nelle soluzioni miste di due corpi isomorfi, e di Bruni e Gorni [1] sulle temperature di congelamento dei miscugli di tre corpi tutti isomorfi fra di loro. Finalmente le esperienze di Hollmann [2] sulla tensione di vapore dei cristalli misti di idrati salini.

Uno di noi diede pure in una pubblicazione teoretica [3] un quadro sommario dei differenti tipi di equilibrî eterogenei che possono presentarsi nei sistemi di questa natura. Questi problemi vennero allora trattati in modo affatto generale e prescindendo dalla natura dei componenti le miscele. Fra i diversi casi possibili ve ne è però uno che merita speciale attenzione per la facilità colla quale può essere realizzato e per la frequenza con cui si presenta nella pratica: intendiamo quello di due sali isomorfi che sciolti in acqua diano ciascuno uno o più idrati, di cui quelli di composizione corrispondente pure isomorfi fra di loro. Noi ci proponiamo di considerare più da vicino questo caso; naturalmente quello che diremo potrà sempre senz'altro estendersi a tutte le miscele in cui due corpi isomorfi diano con un solvente qualsiasi dei composti d'addizione pure isomorfi fra loro.

Ad ogni idrato corrisponde, come è ben noto, una determinata temperatura alla quale esso passa nell'idrato più povero in acqua o nel sale anidro. Poichè ora tanto i sali anidri come i diversi idrati possono formare delle miscele isomorfe, si deve domandarsi come si presenteranno gli equilibrî eterogenei fra questi diversi cristalli misti e con le loro soluzioni sature. Consideriamo ora il problema nel caso più semplice.

Siano due sali A e B che formano ciascuno due diversi idrati: $A + x H_2O$, $A + y H_2O$ e rispettivamente $B + x H_2O$, $B + y H_2O$ (poniamo $x > y$; naturalmente può anche essere $y = 0$). Tanto i due idrati con x come quelli con y molecole d'acqua sono fra loro isomorfi e possono cristallizzare assieme in tutti i rapporti. I due idrati più ricchi in acqua passano in quelli più poveri a due temperature diverse che chiameremo T_A e T_B, e supporremo $T_B > T_A$. Ad ognuno dei cristalli misti con $x H_2O$ corrisponderà ora una determinata temperatura di trasformazione; come varieranno queste temperature colla composizione? Rappresentiamo sull'asse delle ordinate (fig. 1) le temperature, e su quello delle ascisse il numero di molecole di A e di B su 100 molecole della miscela. Noi possiamo anzitutto prevedere in base alla teoria delle fasi, quale sarà la natura della curva luogo delle temperature di trasformazione. Poichè tanto gli idrati con $x H_2O$ come quelli con $y H_2O$ sono miscibili in tutti i rapporti, non potremo mai avere più di quattro fasi: cristalli misti con $x H_2O$, cristalli misti con $y H_2O$, soluzione e vapore; ciò che per un sistema di tre componenti costituisce una serie di

(1) Questi Rendiconti, 1900, II, 326.
(2) Zeitschr. f. physik. Chemie, XXXVII, 193.
(3) Questi Rendiconti, 1900, II, 232.

sistemi invarianti senza alcun punto multiplo; la curva cercata sarà dunque una curva continua. Essa può però naturalmente presentare tre tipi: possono cioè tutti i suoi punti esser compresi fra T_A e T_B (curva I), oppure essa può mostrare un punto di minimo (curva II) od uno di massimo (curva III).

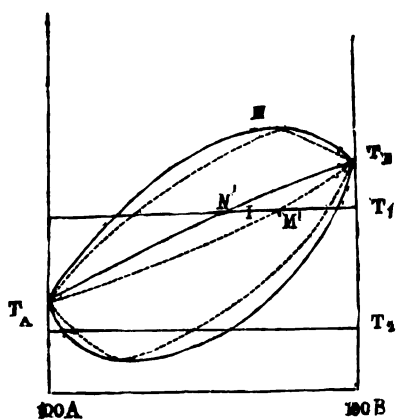
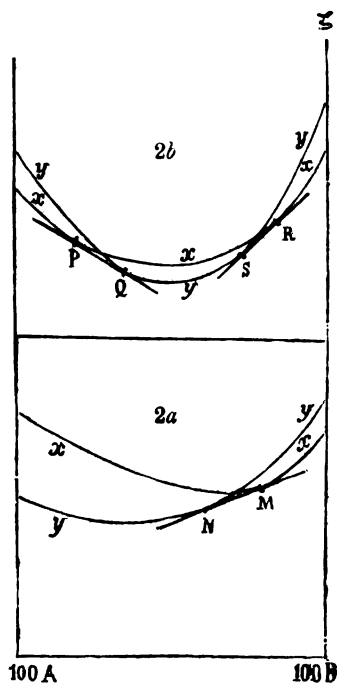



Fig. 1. Fig. 2.

Consideriamo ora un altro lato della questione. I cristalli misti più idratati daranno luogo alla temperatura data, perdendo acqua, alla formazione di una certa quantità di soluzione satura ed a cristalli misti meno idratati: queste due nuove fasi non avranno naturalmente in generale la stessa composizione della prima; studiamo ora in che rapporto staranno fra loro le composizioni delle due sorta di cristalli. Ciò riuscirà facile seguendo lo stesso metodo che Bakhuis Roozeboom [1] applicò ai fenomeni di congelamento e di trasformazione delle miscele binarie, ricorrendo cioè ad un teorema di Gibbs secondo il quale è ad ogni temperatura stabile quel sistema pel quale la funzione ζ è minore. Portiamo perciò (fig. 2) sull'asse delle ascisse ancora la composizione delle due sorte di cristalli e sulle ordinate il valore di ζ. Ad ognuna delle due forme di cristalli corrisponderà ora ad ogni temperatura una curva dei valori di ζ. Consideriamo ciò che avverrà ad una temperatura T_1 posta fra T_A e T_B (cfr. fig. 1); a questa tempera-

[1] Zeitschr. f. physik. Chemie, XXX, 385, 413.

tura saranno per le miscele dove A è in eccesso, stabili i cristalli meno idratati, per quelle dove è in eccesso B, al contrario i cristalli più idratati. Le curve ζ relative alle due forme di cristalli misti si taglieranno perciò in un punto (fig. 2*a*); nella parte sinistra del diagramma la curva ζ degli idrati con $x H_2O$ sarà al disopra, nella parte destra al disotto di quella relativa agli idrati con $y H_2O$. Come è noto, la composizione delle due fasi in equilibrio a quella temperatura è data dai punti di contatto della tangente comune alle due curve, cioè rispettivamente da M e da N. Come si vede già dal semplice esame della figura, i cristalli con $x K_2O$ contengono maggior proporzione di B che non quelli con $y H_2O$. Pel caso in cui le temperature di trasformazione siano tutte comprese fra T_A e T_B, si può quindi enunciare la seguente regola: *I cristalli più idratati contengono in maggior proporzione di quelli meno idratati quel componente la cui temperatura di transizione è più elevata.*

Quando le temperature di trasformazione presentano un minimo, i fenomeni diventano un poco più complicati; consideriamo la temperatura T_2 (cfr. fig. 1) compresa fra T_A ed il punto di minimo: qui nelle miscele contenenti in eccesso l'uno o l'altro dei componenti, sono stabili i cristalli più idratati, alle concentrazioni medie invece quelli meno ricchi in acqua. Le due curve ζ dei due diversi idrati si tagliano perciò in due punti (fig. 2*b*). La composizione delle due fasi coesistenti nei due sistemi in equilibrio possibili a questa temperatura, sono date anche qui dai punti di contatto delle due tangenti comuni possibili alle due curve, cioè da P e Q e rispettivamente da R e S. Dalla figura si vede che in quello dei due sistemi dove A predomina, esso si trova in maggior copia nei cristalli più idratati che in quelli meno idratati; nell'altro invece è l'inverso che succede. Alla temperatura di minimo le due curve ζ si toccano naturalmente in un punto solo, e le due fasi cristalline (come pure la soluzione liquida) hanno l'identica composizione.

In base a queste considerazioni possiamo, nella figura 1 accanto alle curve piene indicanti la composizione dei cristalli più idratati che ad ogni data temperatura si trasformano, tracciare le curve a queste conjugate che esprimono la composizione dei cristalli meno ricchi in acqua che dai primi si formano; queste ultime curve sono indicate con linee tratteggiate. La regola generale di questi equilibrî è dunque la seguente: *I cristalli più idratati contengono in maggior proporzione di quelli più poveri d'acqua, quel componente la cui aggiunta al sistema provoca un innalzamento della temperatura di trasformazione* [1].

[1] Questa è del resto un caso speciale di una legge più generale che si può enunciare così: In un sistema qualunque fra due fasi in equilibrio, quella di esse che tende a sparire innalzando la temperatura contiene in maggior copia dell'altra quel componente che, aggiunto al sistema, provoca un innalzamento nella temperatura di equilibrio.

Un' altra previsione si può agevolmente fare per ciò che riguarda l' andamento delle curve di trasformazione. È noto che se in un idrato fuso si scioglie una sostanza qualunque che non possa con esso cristallizzare, se ne abbassa il punto di trasformazione, e che questi abbassamenti sono proporzionali al numero delle molecole disciolte. Si può così in modo affatto simile come per gli abbassamenti dei punti di congelamento dei corpi unici, calcolare una costante di abbassamento molecolare, che è anche qui $= 0{,}02 \frac{T^2}{w}$. Ciò fu fatto ad es. da Loewenherz [1] pel sale di Glauber, e da van't Hoff e Dawson [2] pel cloruro di magnesio esaidrato.

Se invece mescoliamo alla massa fusa un sale che possa entrare in tutte due le fasi cristalline con essa in equilibrio, accadrà quello che accade nel congelamento delle soluzioni binarie da cui si separano soluzioni solide; gli abbassamenti del punto di trasformazione sono più piccoli di quelli normali avuti con sostanze non isomorfe o calcolati colla formola di van't Hoff; questi abbassamenti potranno anzi diventare addirittura negativi. Che questo ultimo caso possa accadere, che cioè il punto di equilibrio possa innalzarsi per l' aggiunta di un sale isomorfo, risulta dalle figure e dalle considerazioni già esposte. Del fatto che anche quando quest' aggiunta provoca un abbassamento questo è anormalmente piccolo, si hanno nei lavori già citati due esempi. Van't Hoff e Dawson trovarono che aggiungendo bromuro di magnesio al corrispondente cloruro con cui è isomorfo, si producono abbassamenti tre volte e mezzo più piccoli dei normali. Così pure dai dati di Loewenherz apparisce che fra le dieci sostanze (corpi organici e sali) sciolte nel sale di Glauber, gli abbassamenti più piccoli furono ottenuti col cromato di sodio, il quale forma un decaidrato ed un' anidride entrambi isomorfi coi corrispondenti del solfato. Casi di innalzamento non erano stati, per quanto noi sappiamo, finora osservati, almeno quantitativamente.

Noi abbiamo eseguito varie serie di esperienze con miscele di solfato e seleniato di sodio che formano entrambi un decaidrato ed un' anidride al tutto isomorfi. Da queste esperienze, che publicheremo dettagliatamente fra breve, risulta che l' aggiunta di solfato sodico al seleniato il cui punto di transizione è leggermente più basso (esso non era ancora stato esattamente determinato; trovasi a 30°,15 mentre quello del solfato è a 32°,4) innalza questa temperatura di trasformazione. L' aggiunta di seleniato al solfato provoca abbassamenti notevolmente minori dei normali.

Accanto a questo caso più semplice, altri più complicati possono immaginarsi: p. es. che i cristalli misti di uno o di entrambi gli idrati possano formarsi solo entro certi limiti di composizione, che uno dei sali formi accanto ai due idrati considerati altri idrati di composizione diversa, ecc. A questi

[1] Zeitschr. f. physik. Chemie, XVIII, 70.
[2] Zeitschr. f. physik. Chemie, XXVII, 598.

casi possono applicarsi considerazioni analoghe a quelle qui svolte; in tutti però si avrà che potendosi avere almeno tre fasi cristalline, le curve di trasformazione non saranno più continue, ma presenteranno dei punti multipli. Un caso assai interessante sul quale abbiamo già raccolto varie esperienze, ci è dato dalle miscele di solfato e cromato sodico. Entrambi questi sali formano un decaidrato ed un' anidride fra loro isomorfi; il cromato, inoltre, forma anche un esaidrato ed un tetraidrato. Su questo argomento speriamo di poter tornare fra non molto.

Possiamo anche porci un altro problema. Supponiamo di avere una soluzione satura accanto ai cristalli misti dei due idrati e con essi in equilibrio. Cosa accadrà se tenendo la temperatura costante noi lasciamo svaporare l'acqua? Potranno restare l'una accanto all'altro entrambe le sorta dei cristalli misti, o dovrà una di queste sparire ed in tal caso quale delle due? La cosa dipenderà dalla composizione della soluzione liquida in rapporto a quella delle due fasi solide. Per fissare le idee e limitarci al caso più semplice, supponiamo di essere nel caso di miscele presentanti la curva del tipo I (fig. 1) e che la temperatura fissata e mantenuta costante sia T_1. Le due forme di cristalli misti hanno la composizione rappresentata dai punti M′ ed N′. I cristalli x sono più ricchi in B dei cristalli y. Possiamo ora immaginarci in questo stesso diagramma, indicato il rapporto in cui nella soluzione liquida si trovano A e B. Esso ci sarà dato da un punto sulla stessa orizzontale di M′ ed N′, e possiamo prevedere tre casi, che esso si trovi cioè a destra di entrambi, od a sinistra, o fra i due. In quest' ultimo caso la soluzione è più ricca in B dei cristalli y, e meno di quelli x; essa, perdendo acqua, continuerà perciò ad accrescere entrambe le fasi cristalline e queste resteranno in equilibrio anche allorchè tutta la fase liquida sarà sparita. Se invece il punto che ci dà la composizione della soluzione è a sinistra di M′ ed N′, se cioè la soluzione è più povera in B di entrambe le sorta di cristalli, ciò non potrà più accadere; sarà necessario che man mano che l'acqua evapora, una parte dei cristalli più ricchi di B (x) si distrugga per potere compensare la mancanza in B della soluzione ed accrescere i cristalli y. Se dunque la quantità della soluzione liquida presente da principio è grande, il processo condurrà alla sparizione dei cristalli più idratati. Spariti questi, continueranno a formarsi dei cristalli meno idratati, la cui composizione rimasta finora costante andrà però variando, diventando essi progressivamente più poveri di B. Se invece la soluzione sia più ricca di B di entrambe le forme di cristalli, il processo di evaporazione isotermica potrà condurre alla sparizione dei cristalli meno idratati.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti presenta un piego suggellato inviato dal sig. Antonio Sauve, perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 marzo 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota II [1] di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio VOLTERRA.

5. *Caso del campo dovuto ad una corrente sinusoidale parallela allo schermo.* — Prendiamo nelle (1) della Nota precedente

$$u(t - Ax) = I_0\, e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)},$$

dove

$$i = \sqrt{-1}\ ,\quad \omega = 2\pi n(t - Ax) + \alpha\,,$$

I_0, n ed α designano costanti reali. Con questa espressione di u le parti reali dei secondi membri delle (1) forniscono i potenziali dovuti a un'ordinaria corrente sinusoidale di intensità massima I_0 e di frequenza n.

Proponiamoci di determinare (i potenziali indotti sul piano $z = 0$) F_1, U_1, V_1 nel caso che i potenziali inducenti corrispondano al valore complesso $I_0\, e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}$, sieno cioè

$$(1')\qquad \begin{cases} U' = 2 I_0\, e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \log \dfrac{1}{\Delta}\,, \quad V' = 0\,, \quad W' = 0\,; \\ \qquad\qquad F' = U' \end{cases}$$

[1] Vedi pag. 163.

Trovati F_1, U_1, V_1, basterà prenderne la parte reale per avere i potenziali indotti sul piano $z=0$ dalla suddetta corrente sinusoidale, parallela al piano e distante d da esso.

È chiaro anzi tutto che, stabilito una volta il regime, le espressioni di F_1, U_1, V_1 dovranno essere della forma

$$(3) \qquad F_1 = 2I_0 e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)} F_2, \quad U_1 = 2I_0 e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)} U_2, \quad V_1 = 2I_0 e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)} V_2,$$

con F_2, U_2, V_2 funzioni soltanto di $y, |z|$.

Ciò posto, le (III) e (IV) danno

$$(4) \qquad \frac{d^2F_2}{dy^2}+\frac{d^2F_2}{d|z|^2}=0, \quad \frac{d^2U_2}{dy^2}+\frac{d^2U_2}{d|z|^2}=0, \quad \frac{d^2V_2}{dy^2}+\frac{d^2V_2}{d|z|^2}=0,$$

$$(5) \qquad 2\pi n A i (F_2-U_2)+\frac{dV_2}{dy}=0,$$

mentre le equazioni ai limiti (V) divengono

$$2\pi n A i (F_2-U_2)+\frac{AR}{2\pi}\frac{dU_2}{d|z|}=0,$$

$$\frac{dF_2}{dy}+2\pi n A i V_2-\frac{AR}{2\pi}\frac{dV_2}{d|z|}=-\frac{d\log\frac{1}{\varDelta}}{dy}.$$

Le tre funzioni [armoniche, in causa delle (4)] F_2, U_2, V_2 dovranno inoltre comportarsi regolarmente per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, e annullarsi (assieme alle loro derivate) al crescere indefinito di $|z|$. Queste stesse proprietà competono di conseguenza alle due combinazioni

$$2\pi n A i (F_2-U_2)+\frac{AR}{2\pi}\frac{dU_2}{d|z|},$$

$$\frac{dF_2}{dy}+2\pi n A i V_2-\frac{AR}{2\pi}\frac{dV_2}{d|z|},$$

di cui le equazioni ai limiti, scritte or ora, forniscono inoltre i valori per $z=0$:

$$0 \text{ e } -\frac{d\log\frac{1}{\varDelta}}{dy}.$$

Poniamo

$$(6) \qquad \varGamma^2 = y^2+(|z|+d)^2 \quad (\varGamma=\varDelta \text{ per } z\leq 0),$$

e osserviamo che le due funzioni 0 e $-\dfrac{d\log\frac{1}{\varGamma}}{dy}$, sono manifestamente ar-

moniche, regolari per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, e nulle per $|z|=\infty$. Siccome non vi possono essere due funzioni armoniche, che prendono gli stessi valori per $z=0$, si mantengono regolari in ogni altro punto, e si annullano per $|z|=\infty$, così dobbiamo concludere che si ha identicamente (e non soltanto per $z=0$)

$$
(7)\qquad \begin{cases} 2\pi n \mathrm{A} i(\mathrm{F}_2-\mathrm{U}_2)+\dfrac{\mathrm{AR}}{2\pi}\dfrac{d\mathrm{U}_2}{d|z|}=0\,, \\ \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{F}_2+\log\dfrac{1}{r}\right)+2\pi n\mathrm{A}i\,\mathrm{V}_2-\dfrac{\mathrm{AR}}{2\pi}\dfrac{d\mathrm{V}_2}{d|z|}=0\,. \end{cases}
$$

Il nostro còmpito consiste dunque nell'integrare il sistema (completo, come tosto si riconosce) (4), (5), (7) *mediante funzioni* $\mathrm{F}_2, \mathrm{U}_2, \mathrm{V}_2$ *di* $y, |z|$, *regolari per tutti i valori reali di* y, *positivi di* $|z|$, *e nulle per* $|z|=\infty$.

6. *Calcolo di* F_2. — Moltiplichiamo la prima delle (7) per $2\pi n\mathrm{A}i$, deriviamo la seconda rispetto ad y e sommiamo. Verrà, tenendo conto della (5),

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\mathrm{F}_2+\log\frac{1}{r}\right)+\mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|}=0\,,$$

od anche, siccome $\mathrm{F}_2+\log\dfrac{1}{r}$ è funzione armonica,

$$\frac{d^2}{d|z|^2}\left(\mathrm{F}_2+\log\frac{1}{r}\right)-\mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|}=0\,.$$

Integrando rispetto a $|z|$ fra un valore generico e ∞, risulta

$$\frac{d}{d|z|}\left(\mathrm{F}_2+\log\frac{1}{r}\right)-\mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\mathrm{F}_2=0\,.$$

Facciamo, per brevità di scrittura, le posizioni

$$(8)\qquad p=2\pi n\mathrm{A}\;,\; q=\frac{4\pi^2 n}{\mathrm{R}}\;,\; \mathrm{B}=\mathrm{A}^2 n\mathrm{R}=\frac{p^2}{q}\,.$$

Le equazioni (5), (7) e quelle, cui siamo testè pervenuti, potranno essere scritte:

$$(5')\qquad \frac{d\mathrm{V}_2}{dy}=pi(\mathrm{U}_2-\mathrm{F}_2),$$

$$
(7')\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d|z|}(\mathrm{U}_2-\mathrm{F}_2)-q\,i(\mathrm{U}_2-\mathrm{F}_2)=-\dfrac{d\mathrm{F}_2}{d|z|}\,, \\ \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{F}_2+\log\dfrac{1}{r}\right)-\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{d\mathrm{V}_2}{d|z|}-q\,i\,\mathrm{V}_2\right)=0\,, \end{cases}
$$

$$(9)\qquad \frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|}-\mathrm{B}i\,\mathrm{F}_2=-\frac{d\log\dfrac{1}{r}}{d|z|}.$$

Un integrale particolare della (9) è, come si verifica subito,

(10) $$F_2 = -i\int_0^\infty e^{-B\lambda}\frac{d\log\frac{1}{r}}{d|z|}\,d\lambda,$$

in cui

(11) $$r^2 = y^2 + (|z| + d - i\lambda)^2$$

e si suppone $B > 0$.

La funzione sotto il segno nel secondo membro della (10) è allora effettivamente integrabile fra 0 e ∞ (qualunque sieno i valori reali di y e di z).

L'integrale F_2 risulta poi funzione armonica di y, $|z|$, nulla per $|z| = \infty$, regolare per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, poichè

$$\frac{d\log\frac{1}{r}}{d|z|} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{|z| + d + i(y-\lambda)} + \frac{1}{|z| + d - i(y+\lambda)}\right\}$$

gode di tali proprietà in tutto l'intervallo di integrazione.

La funzione cercata F_2 *rimane definita dalla* (10).

Infatti, in causa della (9), essa potrebbe differirne soltanto per un integrale armonico della equazione

$$\frac{dF_2}{d|z|} - Bi\,F_2 = 0,$$

nullo per $|z| = \infty$. Ma un tale integrale è identicamente nullo.

Giova ancora osservare che, mediante una integrazione per parti, si può attribuire all'espressione di F_2 la forma

(10′) $$F_2 + \log\frac{1}{\rho} = B\int_0^\infty e^{-B\lambda}\log\frac{1}{r}\,d\lambda.$$

7. *Caratteri analitici della funzione* F_2. — Per riconoscere la natura della funzione definita dall'integrale (10), prendiamo le mosse dalla formula

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi}\,d\lambda = e^{\xi}\int_{\xi}^\infty e^{-\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda} = -e^{\xi}\,\mathrm{Li}\,e^{-\xi},$$

che è, si può dire, la definizione della funzione Li (logaritmo integrale) per valori reali e positivi dell'argomento ξ.

Dalla formula di Eulero [1]

(11) $$\mathrm{Li}\,e^{-\xi} = C + \log\xi + \sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{\xi^m}{m\,.\,m!}$$

(dove C è la nota costante 0,577... e pel logaritmo si intende fissata la

[1] Cfr. per es. Kronecker, *Vorlesungen über Mathematik*, B. I, pag. 218.

determinazione reale) la funzione $\mathrm{Li}\, e^{-\xi}$ rimane definita in tutto il piano complesso. Supponendolo tagliato lungo il semiasse reale negativo, la $\mathrm{Li}\, e^{-\xi}$ risulta funzione uniforme colla sola singolarità logaritmica $\xi = 0$.

Nello stesso campo (cioè in tutto il piano ad esclusione del semiasse reale negativo) è pure

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi}\, d\lambda$$

funzione analitica regolare di ξ.

Le due funzioni $\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda+\xi}\, d\lambda$, $-e^{\xi}\, \mathrm{Li}\, e^{-\xi}$ coincidono per ξ reale e positivo. Si ha dunque, per qualsiasi valore di ξ,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda + \xi} = -e^{\xi}\, \mathrm{Li}\, e^{-\xi},$$

dovendosi nel secondo membro intendere, come s'è detto, quella particolare determinazione della funzione multiforme Li, che, senza attraversare il taglio, risulta reale, per ξ reale e positivo.

Ciò posto, la espressione (10) di F_2, scambiando λ in $\frac{\lambda}{B}$ e moltiplicando sopra e sotto per i, può essere scritta

$$F_2 = -\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda - B\{y - i(|z| + d)\}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda + B\{y + i(|z| + d)\}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{-B\{y-i(|z|+d)\}}\, \mathrm{Li}\, e^{B\{y-i(|z|+d)\}} + e^{B\{y+i(|z|+d)\}}\, \mathrm{Li}\, e^{-B\{y+i(|z|+d)\}}\right].$$

Valendosi dello sviluppo (11), si caratterizza immediatamente il comportamento della funzione F_2 nell'intorno del valore 0 del parametro B. Si ha infatti

$$(10'') \qquad F_2 = C + \log B - i\frac{\pi}{2} + \log r + B\{Y_1 \log B + Y_2\},$$

Y_1 e Y_2 designando funzioni regolari nell'intorno di $B = 0$.

Ne viene che, per $B = 0$, le derivate, rapporto a y, $|z|$, di F_2 coincidono colle derivate di $\log r$.

8. *Calcolo di* U_2 *e di* V_2. — Ritenuto $q > 0$, si verifica, come sopra, che

$$(12) \qquad U_2 - F_2 = -i \int_0^\infty e^{-q\mu} \frac{dF_2(y, |z| - i\mu)}{d|z|}\, d\mu$$

soddisfa alla prima delle (7′) e a tutte le altre condizioni richieste, ed è l'unica funzione, che si trova in questo caso.

Collo stesso criterio si costruisce l'integrale particolare

$$(13)\quad V_2 = -pi\int_0^\infty \{U_2(y+\nu,|z|) - F_2(y+\nu,|z|)\}\,d\nu = -pi\int_y^\infty (U_2 - F_2)\,dy$$

della (5′), che è funzione armonica ecc., e fornisce in somma il cercato valore di V_2.

Di tutte le condizioni, imposte alle nostre incognite, rimane soltanto da controllare la seconda delle (7′). Si riconosce senza difficoltà che coi valori (10′), (12) e (13) essa rimane identicamente soddisfatta.

9. *Semplificazione delle espressioni trovate.* La frequenza n, finchè si tratta di correnti alternate industriali, è compresa fra 20 e 200; per scariche oscillanti, correnti di Tesla, ecc., può giungere sino a valori dell'ordine di 10^6, ma in ogni caso $B = A^2 n R$ è una quantità molto piccola ([1]).

Si possono quindi trascurare senza scrupolo i termini dell'ordine di B, ed anche di $B \log B$. La (10″) dà allora (prescindendo, come è lecito, dalla costante $C + \log B - i\frac{\pi}{2}$)

$$(14)\qquad F_2 + \log\frac{1}{r} = 0\,.$$

Ciò si sarebbe potuto ricavare dalla (9) facendovi $B = 0$, ma non si avrebbe avuto in tal modo esatta nozione dell'approssimazione risultante.

La formula (10″) mostra che l'errore, da cui possono essere affette F_2 e le sue derivate rispetto ad y, $|z|$, è dell'ordine di $B \log B$.

Nemmeno questo sarebbe sufficiente, volendo procedere con assoluto rigore. Bisognerebbe ancora assegnare un limite superiore dell'errore possibile nelle componenti delle forze elettromagnetiche.

Non è del resto difficile il farlo, partendo dalla considerazione delle derivate della (10′).

Si arriva alla conclusione prevista che gli errori sono effettivamente trascurabili.

Ritenuto ormai $F_2 = -\log\frac{1}{r}$, la (12), ricordando la espressione (11)

([1]) Prendiamo pure $n = 10^7$ e per R il valore, che corrisponde a una lastra di argentana dello spessore di un decimillimetro, cioè a un dipresso

$$R = 20000 \times 100 = 2\,.\,10^6.$$

Sarà pur sempre

$$B = \frac{2\,.\,10^{13}}{9\,.\,10^{20}} = \frac{2}{9}\,10^{-7}.$$

di τ, si riduce a

$$\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2 = i \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{1}{\tau}}{d|z|} d\lambda . \tag{15}$$

Scindiamo il reale dall'immaginario. Si ha

$$\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{d|z|} d\lambda - i \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda ,$$

dove

$$\tau_1^2 = (y-\lambda)^2 + (|z|+d)^2 \ , \ \tau_2^2 = (y+\lambda)^2 + (|z|+d)^2 .$$

Si osservi che

$$-\int_y^\infty \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} dy = \log \frac{\tau_1}{\tau_2}, -\int_y^\infty \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} dy = \mathrm{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \mathrm{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi .$$

La (13) porge quindi

$$\mathrm{V}_2 = \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \mathrm{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \mathrm{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi \right\} d\lambda - i \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda .$$

Le espressioni definitive dei potenziali indotti, con approssimazione valida in ogni caso, sono dunque, a tenore delle (3) (avvertendo che dobbiamo conservare nei secondi membri soltanto la parte reale):

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}_1 &= -2 \, \mathrm{I}_0 \operatorname{sen} \omega \log \frac{1}{r} , \\ \mathrm{U}_1 - \mathrm{F}_1 &= -2 \, \mathrm{I}_0 \operatorname{sen} \omega \, \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} d\lambda \\ &\qquad - 2 \, \mathrm{I}_0 \cos \omega \, \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda , \\ \mathrm{V}_1 &= 2 \, \mathrm{I}_0 \operatorname{sen} \omega \, \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \mathrm{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \mathrm{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi \right\} d\lambda \\ &\qquad - 2 \, \mathrm{I}_0 \cos \omega \, \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda , \end{aligned} \right. \tag{16}$$

dove, ricordiamolo,

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi n (t - \mathrm{A}x) + \alpha , \\ r^2 &= y^2 + (|z|+d)^2 , \\ \tau_1^2 &= (y-\lambda)^2 + (|z|+d)^2 , \\ \tau_2^2 &= (y+\lambda)^2 + (|z|+d)^2 , \end{aligned}$$

mentre le costanti p e q sono definite dalla (8).

Il campo elettromagnetico, che, in assenza di schermo conduttore, è caratterizzato dai potenziali — parte reale delle (1′) —

$$(17)\quad F' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\varDelta}\,;\; U' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\varDelta}\,,\; V' = 0\,,\; W' = 0\,,$$

lo è invece, tenendo conto dello schermo, da

$$(18)\quad F = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \left\{\log\frac{1}{\varDelta} - \log\frac{1}{\varDelta'}\right\};\; U = F + (U_1 - F_1)\,,\; V = V_1\,,\; W = 0\,,$$

dove bisogna sostituire per $U_1 - F_1$ e V_1 i loro valori (16).

Le componenti delle forze elettromagnetiche si hanno introducendo nelle (I), (II) i potenziali (18). Ma le espressioni, che ne risultano, non sono ancora abbastanza comode per il calcolo numerico, nè sopratutto per acquistare un idea dell'andamento del fenomeno e fornire indicazioni ad eventuali sperimentatori.

Mostrerò in una terza Nota come a ciò si pervenga mediante uno sviluppo asintotico degli integrali, che compariscono nelle espressioni trovate.

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota di UGO AMALDI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Seguendo il Darboux e il Lie, chiamo *cerchi geodetici* di una superficie le curve di essa, che hanno curvatura geodetica costante. È noto che se una congruenza isoterma di curve su di una superficie è composta di cerchi geodetici, lo stesso accade per la congruenza ortogonale, e che due congruenze ortogonali di cerchi geodetici sono sempre isoterme [1]. Non ogni superficie contiene sistemi doppi diffatti, e si riconosce immediatamente che, se una superficie ne contiene uno, il suo elemento lineare, riferito a codesto sistema doppio come a sistema coordinato, assume la forma

$$[A]\qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{[U + V]^2}\,,$$

dove U e V sono funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Ora il Darboux nella III Parte delle sue « *Leçons sur la théorie générale des*

(1) Darboux, l. c. III Partie, n. 654; Bianchi, *Geometria Differenziale*, pag. 170.

surfaces » (pag. 155) propone il problema di *cercare tutte le superficie il cui elemento lineare è riducibile in diversi modi alla forma* [A], *vale a dire le superficie che ammettono più coppie di congruenze ortogonali isoterme di cerchi geodetici*. Questa questione è analoga all'altra, proposta pur essa dal Darboux e risoluta completamente dal Koenigs [1], relativa alle superficie contenenti sistemi doppi ortogonali isotermi di ellissi ed iperbole geodetiche, cioè alle superficie, il cui elemento lineare è riducibile alla forma del Liouville

$$[B] \qquad ds^2 = [U + V]\,[du^2 + dv^2]\,.$$

Il Ricci ha risoluto un problema intimamente legato a questo [2], il problema della esistenza e della determinazione dei sistemi doppi isotermi del Liouville su di una superficie di *dato* elemento lineare. Io, in questa e in altra Nota che spero mi sarà concesso l'onore di presentare a questa illustre Accademia, mi propongo di risolvere l'analogo problema pel caso dei cerchi geodetici; mi propongo cioè il problema seguente: *Data una forma differenziale quadratica positiva in due variabili*

$$\varphi = \sum_{r,s}^{1,2} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

riconoscere se sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ *esistano congruenze isoterme di cerchi geodetici; e nel caso affermativo assegnare il sistema di equazioni, da cui dipende la determinazione di tutte codeste congruenze.*

Io ritrovo il risultato già noto [3] che sulle superficie a curvatura totale costante esistono ∞^4 sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici e assegno il sistema completo, dalla cui integrazione dipende la determinazione di tutti codesti sistemi doppi di curve. Escluso codesto caso, dimostro che una superficie non può ammettere più di ∞^1 sistemi doppi della specie considerata, e caratterizzo le superficie, che ne contengono un numero finito, in quanto assegno il modo per riconoscere con un numero finito d'operazioni in termini finiti se una superficie *data* goda di codesta proprietà, e per determinare, in caso affermativo, i sistemi in parola. Formo poi esplicitamente le condizioni sotto cui una data superficie contiene una semplice infinità di quei sistemi e assegno il sistema completo, la cui integrazione, quando siano soddisfatte siffatte condizioni, conduce alla determinazione di codesti sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

(1) *Mémoire sur les lignes géodésiques*, Mém. des Savants Étrangers, t. XXXI, 1894.

(2) *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville*, Atti dell'Ist. Veneto, t. LII, 1894. « *Lezioni sulla teoria della superficie* », Cap. VI, VII.

(3) Darboux, l. c. ibidem.

I metodi che io applico sono quelli del Calcolo differenziale assoluto del Ricci [1], e anzi debbo notare esplicitamente che nei calcoli richiesti dal presente problema io non ho avuto che da ripetere, leggermente modificati, i procedimenti e gli artifici escogitati ed applicati dal Ricci pel suo caso. L'identità di notazioni che, fino che mi è stato possibile, ho cercato di osservare, renderà facile il riscontro.

Noto, infine, che se immaginiamo riferito il dato elemento lineare alle sue coordinate simmetriche

$$ds^2 = \lambda\, dx\, dy\,,$$

il problema, che io qui risolvo, equivale al seguente: *Data un'equazione lineare alle derivate parziali del second'ordine e ad invarianti uguali*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda\, z\,,$$

riconoscere se sia riducibile mediante una trasformazione $x' = \mathrm{X}(x)$, $y' = \mathrm{Y}(y)$ *alla forma*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'\, \partial y'} = \frac{z}{[\varphi(x'+y') + \psi(x'-y')]^2}$$

e nel caso affermativo assegnare il sistema di equazioni, che definisce le funzioni X *e* Y, *a ciò necessarie.*

1. Si consideri su di una superficie di elemento lineare dato $ds = \sqrt{\varphi}$ una qualsiasi coppia di congruenze ortogonali di curve. Se K è la curvatura totale della superficie (cioè della forma quadratica φ) e se indichiamo con ds_1, ds_2 gli elementi d'arco delle curve generiche delle due congruenze e con γ, (γ) le corrispondenti curvature geodetiche, abbiamo per una notissima formola del Liouville [2],

$$\frac{d(\gamma)}{ds_1} - \frac{d\gamma}{ds_2} + \gamma^2 + (\gamma)^2 + \mathrm{K} = 0, \tag{1}$$

dove $\frac{d}{ds_1}, \frac{d}{ds_2}$ indicano le derivate (di direzione sulla varietà) secondo gli archi s_1 ed s_2 delle curve delle due congruenze.

Se poi le due congruenze considerate appartengono ad un fascio isotermo, è nullo quell'invariante del fascio, che il Ricci chiama *anisotermia* di esso, abbiamo cioè

$$\frac{d\gamma}{ds_1} + \frac{d(\gamma)}{ds_2} = 0\,. \tag{2}$$

[1] Per una esposizione riassuntiva completa di codesti metodi, cfr. Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. Bd. LIV.

[2] Darboux, l. c., III Partie, n. 643; Bianchi, l. c. pag. 148, form. (6*).

Risulta di qui che le coppie ortogonali di congruenze isoterme sulla data varietà sono caratterizzate dal sistema (1) (2), al quale, ove ricorrendo allo spediente ingegnoso del Ricci, si introducano due indeterminate α e β, si può sostituire il sistema equivalente

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\gamma}{ds_1} = -\beta & \frac{d\gamma}{ds_2} = \frac{1}{2}(\alpha + \mathrm{K}) + \gamma^2 \\ \frac{d(\gamma)}{ds_1} = \frac{1}{2}(\alpha - \mathrm{K}) - (\gamma)^2 & \frac{d(\gamma)}{ds_2} = \beta . \end{cases}$$

Se con λ_r $(r = 1, 2)$ indichiamo il sistema coordinato covariante a invariante algebrico uguale ad 1 delle curve di elemento lineare ds_1, il problema di determinare i sistemi doppi ortogonali isotermi della data varietà, coincide analiticamente con quello di ricercare le condizioni di integrabilità del sistema (3), ove si considerino come incognite le λ_r, γ, (γ), α e β (1), e poi, verificate siffatte condizioni, di eseguirne effettivamente l'integrazione. A raccogliere qualche contributo indiretto e modesto alla risoluzione di codesto problema veramente arduo, si può prefissare *a priori* una determinazione particolare per una delle indeterminate β o α, e poi studiare l'esistenza ed, eventualmente, la determinazione effettiva dei sistemi doppi ortogonali isotermi corrispondenti; cercare, cioè, le condizioni di integrabilità e la integrazione del sistema (3), in cui si considerino incognite le λ_r, γ, (γ) e, rispettivamente, α o β.

Sotto questa unica categoria di problemi si possono raccogliere tanto quello risoluto dal Ricci corrispondente a $\beta = 3\gamma(\gamma)$, quanto quello, di cui io qui mi occupo, il quale corrisponde a $\beta = 0$, in quanto la condizione

$$(4) \quad \frac{d\gamma}{ds_1} = 0$$

esprime che le linee di elemento lineare ds_1 (e quindi anche le traiettorie ortogonali) sono a curvatura geodetica costante.

A risolvere uno qualsiasi di codesti problemi bisognerà cominciare col rendere *completo* il sistema (3), aggiungendovi le equazioni che si ottengono successivamente come condizioni di integrabilità di esso. Ora le due deriva-

(1) Naturalmente si devono considerare in sistema colle (3) le due equazioni che definiscono le curvature geodetiche γ e (γ) per mezzo delle λ_r

$$\gamma = \sum_{r,s}^{1,2} \lambda_2^{(r)} \lambda_1^{(s)} \lambda_{1/rs} , \; (\gamma) = - \sum_{r,s}^{1,2} \lambda_1^{(r)} \lambda_2^{(s)} \lambda_{2/rs} :$$

cfr. Ricci et Levi-Civita, l. c. Chap. II, § 1, form. (7).

zioni intrinseche $\frac{d}{ds_1}$, $\frac{d}{ds_2}$ non sono commutabili fra loro, ma sono tali che è identicamente ([1])

$$\frac{d}{ds_2}\frac{d}{ds_1}-\frac{d}{ds_1}\frac{d}{ds_2}=\gamma\frac{d}{ds_1}+(\gamma)\frac{d}{ds_2},$$

onde risultano pel sistema (3) le due condizioni di integrabilità

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds_1}+2\dfrac{d\beta}{ds_2}=-\dfrac{d\mathrm{K}}{ds_1}+6\beta\gamma-2(\gamma)[\tfrac{1}{2}(\alpha+\mathrm{K})+\gamma^2] \\[2ex] \dfrac{d\alpha}{ds_2}-2\dfrac{d\beta}{ds_2}=\quad\dfrac{d\mathrm{K}}{ds_2}+6\beta(\gamma)+2\gamma[\tfrac{1}{2}(\alpha-\mathrm{K})-(\gamma)^2]. \end{cases}$$

Se ora si supponesse prefissata una determinazione particolare per α, si dedurrebbe di qui, come condizione di integrabilità rispetto a β, la

$$(6)\ \frac{d^2\alpha}{ds_1^2}+\frac{d^2\alpha}{ds_2^2}+\frac{d^2\mathrm{K}}{ds_1^2}-\frac{d^2\mathrm{K}}{ds_2^2}+5\left[(\gamma)\frac{d\alpha}{ds_1}-\gamma\frac{d\alpha}{ds_2}\right]+5\left[(\gamma)\frac{d\mathrm{K}}{ds_1}+\gamma\frac{d\mathrm{K}}{ds_2}\right]+$$
$$+4\alpha[\gamma^2+(\gamma)^2]+4\mathrm{K}[(\gamma)^2-\gamma^2]=0,$$

la quale, noteremo incidentalmente, assume una forma particolarmente semplice per la determinazione $\alpha=\mathrm{K}$ (o $\alpha=-\mathrm{K}$). Si verifica dalla (6), che di sistemi doppi ortogonali isotermi soddisfacenti al sistema (3) in cui sia $\alpha=\mathrm{K}$, esiste sulle superficie sviluppabili una quadrupla infinità; come pure si trova che, se su di una varietà esiste un tale sistema doppio, il suo elemento lineare, riferito ad esso, assume la forma

$$ds^2=e^{v\varphi+\psi}[du^2+dv^2],$$

dove φ e ψ sono funzioni arbitrarie della sola u; codesta forma di elemento lineare comprende quello delle superficie spirali di Lie e Lévy ([2]).

Ma lasciando da parte codesto caso, che qui non ci interessa, supponiamo invece che sia prefissato β: allora la condizione di integrabilità delle (5) rispetto ad α è data dalla

$$(7)\qquad 2\left[\frac{d^2\beta}{ds_1^2}+\frac{d^2\beta}{ds_2^2}\right]+\frac{d^2\mathrm{K}}{ds_2\,ds_1}+\frac{d^2\mathrm{K}}{ds_1\,ds_2}+10\left[(\gamma)\frac{d\beta}{ds_1}-\gamma\frac{d\beta}{ds_2}\right]+$$
$$+3\left[(\gamma)\frac{d\mathrm{K}}{ds_2}-\gamma\frac{d\mathrm{K}}{ds_1}\right]-4\beta\mathrm{K}+8\beta[\gamma^2+(\gamma)^2]=0,$$

la quale andrà aggiunta al sistema (3) (5).

([1]) Ricci et Levi-Civita, l. c. Chap. II, § 2.

([2]) Darboux, l. c. IV Partie, Note VI, pag. 442.

2. Prima di procedere alla ricerca particolare che io mi sono proposto, mi sia permesso di osservare che le due determinazioni $\beta = 3\gamma(\gamma)$ e $\beta = 0$, corrispondenti rispettivamente al caso dei sistemi isotermi del Liouville e dei cerchi geodetici, sono casi particolari della determinazione $\beta = c\gamma(\gamma)$, dove c indica una costante arbitraria.

Supponendo che su di una superficie esista un sistema doppio ortogonale isotermo soddisfacente al sistema (3), sia

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2)$$

l'elemento lineare di essa, riferita a codesto sistema doppio come a sistema coordinato. Si ha allora notoriamente

$$\gamma = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \quad (\gamma) = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}$$

$$\frac{d}{ds_1} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{d}{ds_2} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{dv};$$

onde risulta dalla

$$\frac{d\gamma}{ds_1} = -c\gamma(\gamma) \tag{8}$$

che λ deve soddisfare all'equazione

$$\lambda\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} + (c-2)\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0.$$

Ma l'integrale generale di questa è, ove pongasi $c = 1 + \frac{1}{a}$,

$$\lambda = [\mathrm{U} + \mathrm{V}]^a$$

dove U e V sono funzioni arbitrarie rispettivamente della sola u e della sola v. Concludiamo che l'elemento lineare di una superficie su cui esista una congruenza isoterma di curve, la cui curvatura geodetica rende soddisfatta la (8), è caratterizzato dalla riducibilità alla forma

$$ds^2 = [\mathrm{U} + \mathrm{V}]^{2a}[du^2 + dv^2], \quad c = 1 + \frac{1}{a} \tag{C}$$

che dà, naturalmente, per $c = 3$ l'elemento lineare del Liouville e per $c = 0$ quello delle superficie con un sistema doppio ortogonale isotermo di cerchi geodetici.

Per $\beta = c\gamma(\gamma)$ la condizione di integrabilità (7) diventa

$$\frac{d^2\mathrm{K}}{ds_2\,ds_1} + \frac{d^2\mathrm{K}}{ds_1\,ds_2} + (3+2c)\left[(\gamma)\frac{d\mathrm{K}}{ds_2} - \gamma\frac{d\mathrm{K}}{ds_1}\right] + 4c(c-3)\gamma(\gamma)\,\mathrm{K} = 0. \tag{9}$$

Poichè essa è identicamente soddisfatta per $\mathrm{K} = 0$, si ha che l'elemento

lineare di una superficie sviluppabile è riducibile in ∞^4 modi alla forma [C]; e si può anche notare che per K = cost la (8) è identicamente soddisfatta solo nel caso dei sistemi isotermi di ellissi ed iperbole geodetiche o di cerchi geodetici.

Porremo qui termine a queste digressioni, per procedere oramai speditamente ai calcoli richiesti dalla risoluzione del problema proposto. Saranno essi l'oggetto di una Nota successiva.

Mineralogia. — *Sul glaucofane di Chateyroux (valle di Gressoney).* Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio Strüver.

Sono molto rari, a tutt'oggi, i giacimenti di glaucofane che hanno fornito cristalli terminati alle estremità dell'asse verticale. Bodewig (1) per il primo, nei cristalli di Zermatt, ha riconosciuto le forme terminali $c = \}001\{$ OP e $r = \}\bar{1}11\{$ P. Le stesse forme furono determinate dal v. Lasaulx (2) nei cristalli dell'isola Groix.

Più recentemente Colomba (3) ha descritto il glaucofane della Beaume, nell'alta valle della Dora Riparia. Ma a giudicare da quanto dice, egli non ha avuto a sua disposizione dei bei cristallli, tanto che non ha potuto misurare esattamente nemmeno l'angolo del prisma. In alcuni cristalli egli ha notato delle faccette curve, ad un'estremità di z, che potrebbero essere quelle di $\}\bar{1}11\{$ e $\}001\{$, ma egli stesso non si pronuncia sulla attendibilità di queste facce, che non hanno permesso nemmeno misure approssimative (4).

L'ing. S. Franchi, al quale sono lieto di esprimere anche qui la mia viva riconoscenza e gratitudine per la benevolenza, con la quale mi concede di studiare i minerali che egli possiede, ha scoperto, la scorsa estate, nei dintorni di Chateyroux dei bei cristalli di glaucofane, che egli cortesemente mi ha affidato per lo studio.

I cristalli di glaucofane tappezzano una piccola cavità in un masso di eclogite che fu trovato, come gentilmente mi ha comunicato l'ing. Franchi, presso la mulattiera che dai casali di Chateyroux, ad occidente di Fontainemore, scende al valloncello di Theilly, piccolo affluente di destra del Lys.

(1) *Ueber den Glaukophan von Zermatt.* Pogg. Ann. 1876, CLVIII, 224.

(2) *Ueber das Vorkommen und die mineralogische Zusammensetzung eines neuen glaukophangesteins von der Insel Groix.* Sitzber. niederrhein. Gesellsch. in Bonn. 1883, XII, 3.

(3) *Sulla glaucofane della Beaume.* Atti Acc. Scienze di Torino 1894, XXIX.

(4) L'ing. E. Mattirolo, del R. Ufficio Geologico, ha avuto la cortesia di mettere a mia disposizione un'abbondante raccolta di cristalli isolati dal calcare della Beaume. Essi sono bellissimi: misurano fino 8 mm. secondo l'asse z, ma non ne ho trovato nemmeno uno con faccette terminali.

La testata di Chateyroux, completamente levigata dall' antico ghiacciaio della valle del Lys, è pure parzialmente coperta da morenico, sicchè non si può escludere in modo assoluto che il blocco eclogitico in questione provenga da parti più alte della valle di Gressoney. Però la frequenza di lenti eclogitiche nei micascisti dei dintorni immediati di Chateyroux, i quali fanno parte di quella estesissima zona di micascisti eclogitici che vanno dalla valle dell' Orco alla valle Sesia, attraverso alla valle d'Aosta ed alle valli biellesi, rende più probabile, secondo l' ing. Franchi, che il blocco provenga dai pressi immediati di Chateyroux. E in questa stessa zona che furono trovate dal Franchi, quali forme estreme dell' eclogite, numerose masse di rocce giadeitiche o cloromelanitiche, e la eclogite del cui pirosseno sodico ho lo scorso anno pubblicata l' analisi.

La roccia nella quale si trova il glaucofane in cristalli, è un' eclogite a glaucofane povera in granato, che costituisce dei piccoli elementi subordinati. Abbondante è il pirosseno verde-chiaro, parzialmente uralitizzato e cloritizzato, che sovente è però anche inalterato.

L' anfibolo, che con piccole listerelle intramezza il pirosseno, è di colore verde un po' più scuro di quest' ultimo. Il glaucofane è anche abbondante e talora parzialmente cloritizzato, e presenta numerose inclusioni di granato, di rutilo, in bei cristalletti ed in granuli, e di sfeno. Sono interessanti delle plaghe che mostrano del glaucofane incluso in un grande individuo di pirosseno, colle traccie dei clivaggi perfettamente parallele in tutti e due i minerali. Nelle sezioni sottili della roccia si osservano talvolta, sulle liste di glaucofane, dei cristallini di glaucofane bellissimi, che lasciano riconoscere le forme }110{ }010{ }$\bar{1}$11{ : ve ne sono poi anche altri non terminati, con le forme }110{ e }010{. Agli elementi finora notati è da aggiungere la mica bianca, discretamente frequente.

I cristalli di glaucofane, il cui studio forma l' oggetto di questa Nota, sono accompagnati da muscovite in laminette, da qualche grosso granulo di quarzo e da alcuni rari cristallini di sfeno, di colore giallo chiarissimo. In uno di essi ho potuto riconoscere al goniometro le forme $c =$ }001{ OP, $m =$ }110{ ∞ P, Y = }101{ — $P\frac{1}{\infty}$, $n =$ }111{ — P, $l =$ }$\bar{1}$12{ $^1/_2$ P e $a =$ }100{ $\infty P\frac{1}{\infty}$. Le forme più sviluppate sono c e n; Y è abbastanza grande, come pure a: sottilissime sono l e m. Nello sfeno di altri giacimenti }101{ è molto rara.

I cristalli di glaucofane sono neri, splendenti, talvolta molto allungati secondo l'asse z, frequentemente sono però piuttosto tozzi. Il più lungo misurava 12 mm. secondo z.

Le facce della zona [001] sono striate, con striatura sottile e rada, parallelamente all' asse verticale; sono spesso ondulate, come se i cristalli durante la loro formazione avessero subito delle pressioni, agenti dalle pareti della drusa verso l' esterno.

Le forme determinate sono le seguenti;

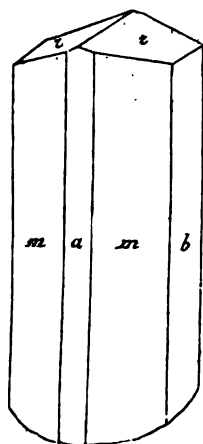
}100}	∞ P̄ ∞	h^1	*a*
}010{	∞ P̸ ∞	g^1	*b*
}110{	∞ P	*m*	*m*
}1̄11{	P	$b^{1/2}$	*r*

Esse si riuniscono nelle seguenti combinazioni:

1) *mr*

2) *mbr*

3) *mabr*.

L'ortopinacoide è raro: quando è presente, ha però faccette abbastanza grandi. Più frequente è il clinopinacoide, talora con faccie strette, più spesso, però, discretamente grandi. L'emipiramide }1̄11{ ha faccette perfettamente piane, sono però, quasi sempre, del tutto prive di splendore. Le misure eseguite dell'angolo *mr* tolgono ogni dubbio sul simbolo di queste facce terminali.

Sovente le facce del prisma {110} hanno disuguale sviluppo: talvolta due facce parallele dominano sulle altre, cosicchè i cristalli diventano tabulari. Tre misure dell'angolo *mm* hanno dato:

55° 2′, 54° 56′, 54° 55′.

Questi valori sono abbastanza diversi da quelli fin qui trovati nel glaucofane. Infatti Strüver [1] per la gastaldite della Val d'Aosta dà 55° 35′ 30″, Bodewig 55° 16′ (Zermatt), v. Lasaulx 55° 15′ (Isola Groix), Luedecke [2] 55° 10′ (Isola di Syra). I valori da me ottenuti sono esattissimi, e rappresentano il prisma più ottuso finora trovato.

Ho potuto misurare con grande esattezza l'angolo che la seconda bisettrice c forma con la verticale su (010), impiegando l'oculare di Bertrand: come media di parecchie letture concordantissime ho trovato 4° 30′.

Il pleocroismo, bellissimo, è:

𝔞 = giallo verdastro chiarissimo, quasi incoloro;

𝔟 = violetto;

𝔠 = azzurro-celeste.

Al cannello si comporta come il glaucofane ordinario e la gastaldite.

Io ho eseguito due analisi, attaccando il minerale col carbonato sodico-potassico: la soda fu determinata col metodo di L. Smith. Col nitrito so-

(1) *Sulla gastaldite, nuovo minerale del gruppo dei bisilicati anidri*. Atti R. Acc. Lincei, 1875, II (2ª), 333.

(2) *Der Glaukophan und die Glaukophan führenden Gesteine der Insel Syra*. Zeitsch. d. deutsch. geol. Gesellsch. 1876, XXVIII, 249.

dico-cobaltico si potè constatare la presenza di potassa in quantità troppo piccola per essere determinata con esattezza. L'ossido ferroso è stato determinato col metodo di Mitscherlich: questo saggio ha dimostrato che tutto il ferro si trova allo stato di sale ferroso, precisamente come nella gastaldite.

Ho anche eseguito una determinazione diretta di acqua, arroventando il minerale in un tubo da combustione previamente calcinato, e raccogliendo l'acqua che si svolgeva in un tubo a cloruro di calcio.

I cristalli analizzati erano perfettamente puri e non alterati. L'esame microscopico portato su parecchie sezioni non ha permesso di scorgere la minima traccia di alterazione o di sostanza estranea nei cristalli tappezzanti la drusa.

Frequenti alterazioni in clorite ed ossido di ferro idrato, nonchè interposizioni di scarsi granati e di laminette di mica presentano, invece, le masserelle granulari di glaucofane, che si trovano in alcuni punti della roccia.

La media dei risultati ottenuti è la seguente:

$Si\,O_2$	55,43
$Al_2\,O_3$	12,26
$Fe\,O$	8,07
$Ca\,O$	2,91
$Mg\,O$	8,67
$Na_2\,O$	9,02
$H_2\,O$	2,87
	99,23

I risultati di questa analisi differiscono notevolmente da quelli che Cossa ha ottenuto nella gastaldite di St. Marcel. La mia analisi è invece, almeno nelle linee generali, molto vicina a quelle che Lüdecke e Schnedermann hanno pubblicato del glaucofane tipico dell'isola di Syra:

	Lüdecke
$Si\,O_2$	55,64
$Al_2\,O_3$	15,11
$Fe_2\,O_3$	3,08
$Fe\,O$	6,85
$Mg\,O$	7,80
$Mn\,O$	0,56
$Ca\,O$	2,40
$Na_2\,O$	9,34
	100,78 (1)

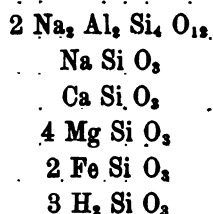
(1) Anche il glaucofane di Chateyroux contiene piccolissime quantità di manganese. Schnedermann trovò 12 % di $Al_2\,O_3$.

È poi quasi uguale a quella che Colomba ha fatto conoscere dei cristalli del *calcare* della Beaume.

È interessante, nei cristalli da me analizzati, la notevole percentuale di acqua. Per parecchio tempo l'acqua data da molte analisi di anfiboli fu considerata secondaria: le determinazioni del resto non avevano grande valore, essendo delle semplici perdite di peso per calcinazione. Berwerth (1) e Haefcke (2), l'hanno considerata invece come costituente originario: il primo ha ammesso che si trovi come $Si\,H_2\,O_3$, il secondo invece, nei termini alluminiferi, come $Si\,H_4\,O_4$. Nei miei cristalli, che sono purissimi, mi sembra difficilmente negabile che l'acqua che essi contengono sia acqua di costituzione, tanto più che il glaucofano sovente contiene acqua: Berwerth dà per i cristalli di Zermatt un tenore di acqua (2,54 %) quasi uguale a quello da me trovato nel campione di Chateyroux.

L'ipotesi di Haefcke, che, cioè, gli anfiboli alluminiferi sieno da considerarsi come miscele di ortosilicati, non è applicabile alle analisi di glaucofane finora conosciute.

La mia analisi dà la formula:

$$
\begin{array}{c}
2\,Na_2\,Al_2\,Si_4\,O_{12} \\
Na\,Si\,O_3 \\
Ca\,Si\,O_3 \\
4\,Mg\,Si\,O_3 \\
2\,Fe\,Si\,O_3 \\
3\,H_2\,Si\,O_3
\end{array}
$$

Petrografia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei. III. Inclusi nel tufo e nelle scorie* (3). Nota di E. MANASSE, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Dal prof. De Stefani furono raccolti entro le scorie ed entro il tufo del Fondo Riccio, dei quali fu già detto in due precedenti Note (4), alcuni inclusi, che, secondo lo studio fattone, sono da riferirsi alla *trachite sanidino-augitica*, alla *trachite biotitica* e alla *trachite andesitica*. Sono tutte rocce a struttura ipocristallina con pochissima base vetrosa; e tutte rientrano, seguendo il concetto del Lacroix (5), fra le rocce incluse omogenee, fra quelle

(1) *Ueber die chemische Zusammensetzung der Amphibole* Sitzungsber. d. k. Akad. der Wissensch. Wien 1882, LXXXV (1) 153.

(2) *Ueber die chemische Constitution der Hornblende.* Inaug. Diss. Göttingen, Berlin 1890.

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

(4) Rend. Acc. Linc. Vol. XI, 1° sem., fasc. 2 e 3, pag. 85 e 125.

(5) *Les enclaves des roches volcaniques*, Macon 1893.

rocce, cioè, che devono la loro origine allo stesso magma che formò la roccia includente.

Trachite sanidino-augitica.

Un primo incluso, raccolto nel tufo giallo sotto le scorie del Fondo Riccio all'estremità del vallone S. Angelo, ha massa fondamentale poco porosa, grigio-nera e ad occhio nudo vi si scorgono solo dei cristalli porfirici tabulari e vetrosi di sanidino.

Al microscopio questa massa fondamentale apparisce minutissima e molto povera di elementi colorati e presenta struttura ipocristallina, assai evidentemente fluidale. In sezioni molto sottili e con fortissimo ingrandimento risulta formata principalmente di una parte vetrosa incolora e di microliti feldispatici allungati pure incolori. I microliti feldispatici sono esilissimi e lunghi appena qualche centesimo di millimetro; hanno colori d'interferenza bassi e si estinguono parallelamente alla loro lunghezza; sono quindi riferibili al sanidino. Molto più scarsamente entrano a far parte della massa fondamentale dei microliti verdognoli di augite, delle laminette bruno-rossastre di biotite e dei granuli di magnetite più o meno limonitizzati. La massa fondamentale si mostra al microscopio, come già potevasi notare macroscopicamente, assai povera in pori e i pori sono sempre piccoli.

Fra i minerali porfirici il più abbondante è il sanidino. Si presenta in cristalli tabulari secondo (010), nettamente terminati, incolori e freschissimi; vi si riconoscono talora le linee di sfaldatura basale e più frequentemente delle linee di frattura irregolarmente distribuite. Tali cristalli sorpassano talora i tre millimetri in lunghezza e il mezzo millimetro in larghezza. Semplici alcuni, la maggior parte sono però geminati; comunissima è la geminazione con la legge di Carlsbad, rarissima invece con quella di Baveno. I colori d'interferenza sono bassi nel grigio-biancastro e l'estinzione, rispetto allo spigolo d'allungamento (010):(001), avviene a 0° su (001) e varia da 4° a 8° su (010). Molto raramente si riscontrano nei cristalli di sanidino delle inclusioni di vetro e di apatite e delle inclusioni gassose localizzate in certe parti dei cristalli.

Assai scarso invece è il plagioclasio: se ne incontrano nelle sezioni solo pochissimi cristalli tabulari essi pure, o colonnari, e geminati con la legge dell'albite, alla quale si associa rarissimamente quella del periclino. L'estinzione simmetrica di 19°-22° che presentano, fanno riportarli ad un'andesina basica. Un solo cristallo zonato vidi e con pochissima differenza di acidità fra le diverse zone.

Più diffusa del plagioclasio, ma sempre in cristalli di minori dimensioni, è l'augite, verde, non pleocroica e con angolo di estinzione dalla sfaldatura prismatica di 41° circa.

La biotite è rappresentata da lamine bruno-giallognole, allungate e assai alterate, onde sono frequentemente inquinate da prodotti ferruginosi.

Nè mancano in questa roccia dei grossi grani di magnetite e delle macchie, assai rare però, di limonite ed ematite. Mancano invece completamente la sodalite e l'hauina; e la polvere della roccia, trattata con acido nitrico, non dà reazione affatto nè di cloro, nè di anidride solforica.

Disgregata la roccia con carbonato sodico-potassico diede una percentuale in silice di 62,60.

Trachite biotitica.

La roccia, che ha colore rosso-cupo, fu raccolta entro le scorie del Fondo Riccio. È assai porosa e ad occhio nudo nella pasta apparentemente uniforme, con evidente struttura fluidale, si riconoscono solo fra i minerali porfirici delle lamine allungate brune di biotite.

Al microscopio la massa fondamentale, che costituisce la roccia quasi totalmente, apparisce ricca in pori di forma irregolare e generalmente ellittica. I minerali porfiricamente disseminati sono pochi e in generale di piccole dimensioni e spettano alla biotite, al sanidino, al plagioclasio, all'augite e ad un pirosseno trimetrico. Ma si hanno però delle lamine di biotite che raggiungono la lunghezza di qualche millimetro.

La massa fondamentale risulta formata a fortissimo ingrandimento da un impasto estremamente minuto di minerali che, data la piccolezza loro, non si prestano ad esatta determinazione. Probabilmente però essa è costituita per la massima parte da microliti feldispatici così piccoli da ridursi a semplici punteggiature, da squamette di biotite e da innumerevoli granuli di ematite e limonite prodotti dall'alterazione della biotite. Mi pare che sianvi pure pochi microliti di augite e di apatite. La presenza di quest'ultima specie sarebbe confermata da un saggio chimico che diede per questa roccia trachitica un tenore in anidride fosforica di 0,38 °/₀. Male si può dire se esista una parte vetrosa, per l'addossarsi dei microliti l'uno sull'altro; in ogni modo, se esiste, è scarsissima.

Passando ai minerali porfirici, il più diffuso è la biotite in lamine frequentemente alterate e sostituite da prodotti ferruginosi, spesso rotte con spostamento di parti; in altre invece la sfaldatura è nettissima. Il sanidino è limpido, incoloro ed ha colori d'interferenza bassi. Generalmente è in cristalli piccoli, ma ne misurai uno lungo tre millimetri. Rari ne sono i geminati con legge di Carlsbad e rare le inclusioni liquide e vetrose piccolissime. Il plagioclasio è di acidità diversa, e si presenta in cristalli allungati, spesso tabulari, secondo (010). Non vidi cristalli zonati. Il più frequente è un plagioclasio basico da riportarsi alla bitownite o addirittura all'anortite. Raramente nel plagioclasio è inclusa della biotite. Il pirosseno monoclino ha colore debolmente verde, fin quasi nullo, ed angolo di estinzione di 26°-29°

dall'asse verticale; sembra doversi riferire ad un termine della serie diopside-augite; contiene inoltre inclusioni vetrose piccolissime. Riferisco infine al pirosseno trimetrico un unico cristallo a contorno non netto e di color verde, pel suo pleocroismo debole molto, per la netta sfaldatura prismatica e per l'estinzione che è rigorosamente parallela all'allungamento.

Ho indicato la roccia col nome di trachite biotitica sia perchè la biotite è fra i minerali porfirici quello che predomina, sia perchè essa entra a far parte pure essenzialmente della massa fondamentale. L'acidità della roccia è assai inferiore a quella dell'incluso precedentemente descritto. Disgregata infatti con carbonato sodico-potassico diede per la silice la percentuale di 52.74.

Trachite andesitica.

Pure questa roccia fu raccolta entro le scorie del Fondo Riccio. Il suo colore è grigio, ha cavità assai grosse, che in parte sono pori a gas, in parte sono dovute alla scomparsa di minerali porfirici preesistenti. Ad occhio nudo si scorgono porfiricamente disseminate nella massa grigia solo delle lamine di biotite e dei cristalli bianchi feldispatici fortemente caolinizzati.

Al microscopio la massa fondamentale risulta formata da un feltro di listarelle feldispatiche allungate secondo lo spigolo (001):(010), cui si associano delle piccole squamette di biotite, tanto alterate che talora si riducono soltanto a residui di ematite e magnetite limonitizzata.

Mal si giudica pel sovrapporsi delle liste feldispatiche, se esista o no una parte vetrosa nella massa fondamentale; in ogni modo se, come è probabile, è presente, è anche scarsissima. Le listarelle feldispatiche sono alterate, ed hanno dimensioni aggirantisi intorno ai $^{2}/_{10}$ o $^{3}/_{10}$ di millimetro, e accennano per la disposizione loro a struttura fluidale. Alcune risultano semplici; altre invece semplicemente geminate, ma non mancano dei cristalletti polisintetici, formati però solo da tre o quattro individui. La massima parte delle listarelle feldispatiche spettano al sanidino, le altre ad un plagioclasio acido di composizione intermedia fra l'oligoclasio e l'andesina.

Fra i cristalli porfirici oltre i feldispati e la mica nera visibili anche ad occhio nudo, si riconoscono delle grosse sezioni, talora quadrate, di magnetite.

Il feldispato è in gran parte riferibile al plagioclasio; pochi, pochissimi, sono i cristalli di sanidino. Questi cristalli feldispatici, nettamente terminati, sono profondamente torbidi e ricoperti per alterazione da una materia opaca, grigia, che ora ricuopre completamente i cristalli, ora invece lascia libera una porzione interna e un sottile orlo esterno. Non è facile appunto per la sua forte alterazione potersi pronunziare circa la natura del plagioclasio. Esso sembra però in prevalenza essere un'andesina basica; ma non mancano termini assai più basici riferibili alla bitownite o all'anortite. In alcuni cri-

stalli zonati si possono assai bene notare tutti i passaggi da un termine all'altro, con crescente acidità dal centro alla periferia.

La biotite è generalmente assai meno alterata dei feldispati, ma riassorbita spesso dalla massa fondamentale. Include sovente dell'apatite.

Altri minerali non mi riuscì scorgere nelle sezioni sottili e la roccia, trattata con acido nitrico, non diede reazione affatto nè di cloro, nè di anidride solforica, ma diede tracce evidenti di anidride fosforica. La percentuale in silice posseduta da questa trachite andesitica è di 58,60.

Chimica. — *Sulla tautomeria dell'acido pirometonico*. Nota di A. Peratoner, presentata dal Socio E. Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'esistenza di corpi racemici in soluzione*. Nota preliminare di G. Bruni e M. Padoa [1], presentata dal Socio G. Ciamician.

L'esistenza di composti racemici venne fin qui provata solamente per lo stato solido. Per ciò che si riferisce allo stato liquido, di soluzione e di vapore, le esperienze fatte finora furono del tutto negative o quasi. Molti autori ritengono perciò che l'esistenza di molecole racemiche sia legata allo stato cristallino; non mancarono però anche quelli che sostennero la possibilità di tale esistenza anche negli altri stati d'aggregazione. Pure gli argomenti addotti, ad esempio, da Küster [2] e da Ladenburg [3] per sostenere tale tesi, vennero fortemente oppugnati da altri ricercatori [4] e non portano ad ogni modo una prova sicura.

Per istudiare la questione della possibilità che molecole racemiche non dissociate esistano in soluzione, si presentava naturalmente come il più indicato, il metodo crioscopico. E difatti, appena questo fu scoperto, non mancarono ricerche dirette a tale scopo. Citeremo quelle di Raoult [5] per l'acido racemico e pel suo sale sodico-ammonico, sciolti in acqua; di Frankland e Pickard [6] per l'etere metilico dell'acido dibenzoilglicerico inattivo in diversi

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) Berichte d. deutschen Chem Ges. XXXI, 1847.
(3) Ibidem. XXVIII, 164, 1991.
(4) Marckwald, Berichte XXXII, 1089; E. Fischer, ibidem, XXVIII, 1153.
(5) Zeitschr. f. physik. Ch. I, 186 (1887).
(6) I. Ch. Soc. *69*, 128 (1896).

solventi; di Anschütz e Pulfrich (¹) per l'etere dimetilico dell'acido diacetilracemico in acido acetico; di Wallach e Pulfrich (²) per l'isonitrosodipentene, e finalmente di Adriani (³) per la canforossima inattiva, nello stesso solvente. Il risultato di tutte queste esperienze fu però che i corpi inattivi mostrano, entro i limiti degli errori d'osservazione, pesi molecolari semplici ed uguali, cioè, a quelli dei corrispondenti composti attivi. Doveva presentarsi naturale l'idea che la scomposizione delle molecole racemiche dovesse, come in tutti i casi analoghi, essere limitata dalla presenza di un eccesso di uno dei prodotti della dissociazione stessa. In base a questo giustissimo concetto, Paternò e Manuelli (⁴) pensarono di usare come solvente l'etere dietilico dell'acido diacetildestrotartrico, sciogliendovi il corrispondente composto racemico, ed eseguirono in tal guisa varie misure; però, come questi autori ben fanno osservare, i risultati di tali esperienze non potevano essere in nessun caso decisivi, poichè o il composto racemico resta inalterato, ed allora è una sola molecola che determina l'abbassamento; oppure la dissociazione avviene, ed in tal caso gli abbassamenti sono dati ancora da una sola molecola, e cioè da quella dell'etere levogiro, poichè il destrogiro va semplicemente ad accrescere il solvente.

Noi abbiamo però pensato che alla soluzione del problema si poteva forse arrivare determinando le grandezze molecolari di sostanze racemiche, sciogliendole in un solvente in presenza di un forte eccesso di uno dei loro componenti. All'applicazione di questo metodo molte e varie difficoltà si oppongono, e prima di tutto la non grandissima precisione che si può raggiungere coi comuni apparecchi crioscopici. Appariva poi opportuno scegliere solventi privi di potere dissociante, come gli idrocarburi ed i loro derivati alogenati. Però la scelta di questi corpi come solventi escludeva la possibilità di sperimentare su corpi racemici che contenessero carbossili od ossidrili, poichè, come è noto, tali sostanze danno già di per sè luogo a fenomeni di associazione; onde la distinzione fra le due cause di anomalie, si rendeva al tutto o pressochè impossibile. Noi scegliemmo come sostanze che tali inconvenienti non presentassero, gli eteri dimetilici degli acidi diacetiltartrico e diacetilracemico. L'esistenza di quest'ultimo come vero composto racemico, non ostante il suo punto di fusione più basso di quello dei componenti, venne dimostrata da I. H. Adriani (l. c.) in base al metodo di Roozeboom. Noi usammo come solventi il benzolo, il p.-xilolo, il bromuro d'etilene e il bromoformio. Dapprima sperimentammo su soluzioni benzoliche contenenti il composto racemico solo, di confronto con altre contenenti il solo composto tartrico. Ottenemmo i seguenti risultati:

(¹) Liebigs Ann. *247*, 121 (1888).
(²) Liebigs Ann. *246*, 231 (1888).
(³) Zeitschr. f. physik. Ch. XXXIII, 459.
(⁴) Questi Rendiconti 1897, 1° sem., 401.

Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari (K = 51)
Composto tartrico		
0,861	0°,17	259
1,887	0,37	261
2,879	0,55	259
Composto racemico		
0,814	0,165	252
1,554	0,32	254
2,352	0,48	250

$C_{10}\ H_{14}\ O_8 = 262$

Come si vede, il composto racemico è, nelle sue soluzioni pure, completamente scisso. Passammo allora a studiare il comportamento delle soluzioni contenenti un eccesso di composto attivo. Ci era però necessario di stabilire se l'aggiunta di notevoli quantità di questa sostanza al solvente, non alterasse in modo sensibile il valore di K. A questo scopo sciogliemmo in una soluzione benzolica contenente circa il 10 °/₀ di etere tartrico, piccole quantità di difenile. Gli abbassamenti ottenuti corrisposero a valori di K oscillanti fra 52,5 e 49,4, e quindi ad una media di 51. Qui però si trattava di un corpo nuovo aggiunto alla soluzione, e quindi valeva approssimatamente la legge degli abbassamenti indipendenti. Ma si deve riflettere che sciogliendo l'etere racemico in una soluzione di un eccesso di tartrico, quelle molecole del primo che si dissociano, vanno ad accrescere la quantità del secondo; ed è noto che, per cause non del tutto definite, tutti i corpi, a concentrazioni forti, tendono a dare pesi molecolari più elevati del normale. Noi istituimmo perciò alcune esperienze nel modo seguente. Si scioglieva in benzolo una certa quantità di etere tartrico e, determinato il punto di congelamento, si assumeva questo come punto di partenza, ed aggiungendo successivamente piccole quantità dello stesso composto, si calcolavano dagli ulteriori abbassamenti avuti, i pesi molecolari corrispondenti. Ecco i risultati di queste misure.

1. Etere tartrico in benzolo (K = 51)

	Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari ($C_{10}\ H_{14}\ O_8 = 262$)
Conc. iniziale = 6,03			
	1,254	0°,235	272
	1,952	0,355	280

2. Etere tartrico in bromuro d'etilene (K = 118)

	Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari
Conc. iniziale = 3,306			
	0,637	0,28	269
	1,311	0,52	297
	1,990	0,78	301
	0,675	0,285	279
	1,371	0,575	281
	2,060	0,835	291

3. Etere tartrico in paraxilolo ($K = 43$)

Conc. iniziale = 2,88			
	0,718	0,125	247
Conc. iniziale = 1,527			
	0,502	0,08	270
	1,007	0,165	262
	1,584	0,25	272

4. Etere tartrico in bromoformio ($K = 144$)

Conc. iniziale = 3,23			
	0,736	0,41	259
	1,322	0,71	268
	1,971	1,00	283

Come era da prevedersi, si hanno pesi molecolari alquanto più elevati del normale e che vanno in generale crescendo colla concentrazione.

Dopo ciò, passammo alle ricerche col composto racemico, operando in modo identico a quello ora descritto pel composto attivo.

1. In benzolo ($K = 51$)

Concentrazioni iniziali del composto tartrico	Concentrazioni del composto racemico	Abbassamenti	Pesi molecolari ($C_{10}H_{14}O_8 = 262$)
6,60	1,009	0°,17	303
	1,840	0,31	303
	3,100	0,54	293
6,21	0,889	0,145	312
	1,804	0,31	297
	2,545	0,46	282

2. In p. xilolo ($K = 43$)

2,86	0,714	0,10	307
	1,428	0,205	299
	2,224	0,31	308
	0,445	0,07	280
	0,945	0,16	260
	1,459	0,24	261

3. In bromuro d'etilene ($K = 118$)

3,82	0,702	0,275	301
	1,354	0,545	293
	2,144	0,82	309
3,67	0,677	0,265	302
	1,298	0,52	294
	1,983	0,77	304

Concentrazioni iniziali del composto tartrico	Concentrazioni del composto racemico	Abbassamenti	Pesi molecolari ($C_{10}H_{14}O_{8} = 262$)
	3. In bromuro d'etilene (K = 118)		
3,32	0,655	0°,24	322
	1,291	0,50	304
	1,912	0,755	299
3,38	0,719	0,255	333
	1,353	0,49	325
	1,991	0,74	317
	4. In bromoformio (K = 144)		
	0,553	0,31	257
	1,056	0,595	255
	1,652	0,915	260

Come si vede, nel bromoformio non può notarsi alcuna differenza fra il comportamento del composto tartrico e quello del racemico. Negli altri solventi i pesi molecolari sono notevolmente più elevati che non nel caso precedente. Il ripetersi di questo fatto in varie serie di esperienze, ci sembra possa escludere trattarsi di errori fortuiti d'osservazione. Si dovrebbe pertanto concludere che molecole racemiche non dissociate possono, in queste condizioni, esistere in soluzione. A questa conclusione ci pare che debba pure condurre l'andamento dei pesi molecolari ottenuti, i quali, anzichè andar crescendo colla concentrazione, tendono in generale a diminuire. Ciò può spiegarsi se si rifletta che, aumentando la concentrazione del composto racemico, il componente attivo va trovandosi proporzionalmente man mano in minore eccesso rispetto al primo, talchè la sua influenza nel far retrocedere la dissociazione, va anch'essa facendosi sempre più piccola.

Ad una causa di questo genere si debbono probabilmente attribuire i valori non troppo elevati ottenuti con la prima serie in soluzione di p.-xilolo, poichè la concentrazione iniziale di etere tartrico era assai più piccola che negli altri casi. Onde apportare una prova ulteriore, abbiamo voluto fare una esperienza sciogliendo dapprima in bromuro d'etilene un eccesso di composto inattivo, aggiungendovi poi successive quantità dello stesso:

	Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari ($C_{10}H_{14}O_{8} = 262$)
Conc. iniziale = 3,43			
	0,764	0°,32	281
	1,505	0,60	296
	2,176	0,87	295

Come si vede, i risultati ottenuti sono perfettamente concordanti con quelli avuti aggiungendo composto tartrico ad una soluzione già concentrata

dello stesso. È dunque necessaria la presenza di un eccesso di composto attivo perchè si ottengano col corrispondente corpo racemico, valori anormalmente elevati.

Noi siamo ben lungi dal ritenere, colle esperienze qui riferite, esaurito l'argomento e completamente provata l'esistenza di molecole racemiche in soluzione. Ci proponiamo perciò di proseguire le esperienze in questo campo nella scala più larga che ci sarà possibile, sia impiegando nuovi solventi, sia studiando altre sostanze racemiche. Ci riserviamo pure di eseguire determinazioni di densità di vapore di composti racemici puri ed in presenza di un eccesso di uno dei loro componenti, per vedere se possa verificarsi o no la presenza di molecole non scisse allo stato gassoso.

Parassitologia. — *Sul modo di trasmissione dell'Anchilostoma duodenale.* Nota di Gino Pieri, presentata dal Socio Grassi.

Nel Centralblatt für Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten, a p. 483 del vol. XXIV il dott. A. Loos esprimeva l'ipotesi che le larve dell'*Anchilostoma*, accanto a uno sviluppo diretto in seguito a penetrazione nell'intestino dell'uomo, posseggano anche la facoltà di introdursi attraverso la sua pelle, e giungere di qui all'intestino, per crescere ivi fino alla maturità sessuale. Questa ipotesi si aveva fatto strada nella sua mente in base specialmente alla circostanza che, dopo aver eseguito esperienze sull'*Anchilostoma* colle più grandi precauzioni per non assumere involontariamente l'infezione per via orale, egli si trovò invece abbondantemente infettato; si ricordò egli allora che un giorno, manipolando le sue culture di larve, gli era caduta una goccia di acqua contenente larve sulla pelle della mano, ed ivi si erano manifestati in breve notevoli fenomeni irritatori.

Nel n. 18 del XXIX volume dello stesso Centralblatt, il Loos torna sull'argomento, e riporta il risultato di un suo esperimento compiuto in proposito, dal quale risulterebbe che le larve di *Anchilostoma*, venute a contatto della pelle, penetrano « specialmente nei follicoli dei peli, raramente nei canali ghiandolari, e da questi nel derma ». Egli ricollegando questa esperienza col fatto surriferito, dal quale fu indotto a formulare la sua ipotesi, ritiene di aver dimostrato come realmente si verifichi in natura, e si possa provocare artificialmente, una seconda maniera di infezione per *Anchilostoma*, quella per l'immigrazione attiva delle larve attraverso la pelle.

Certamente le conclusioni del Loos, qualora fossero state confermate dai fatti, avrebbero avuto una importanza e una portata molto maggiore di quella di una semplice osservazione scientifica: esse avrebbero fatto risorgere straordinariamente complicato il problema della protezione contro la fatale

Anchilostomiasi. L'argomento del controllo dell'esperienze del Loos si presentava perciò molto interessante, ed il prof. Battista Grassi richiamò sopra di esso la mia attenzione.

In verità il fatto di aver seguito le larve di *Anchilostoma* fino alla penetrazione nel derma non mi sembrò potesse essere sufficiente ad autorizzare il Loos a dare come fatto dimostrato la sua ipotesi. L'aver il Loos riscontrato che le larve giungono fino al derma, non prova affatto che esse debbano procedere oltre e giungere fino all'intestino. Neppure l'essersi egli trovato infetto di *Anchilostoma* può avere un serio valore dimostrativo: si pensi infatti alla grande difficoltà di mantenersi immune dall'infezione allorchè si usa simile materiale di cultura. Nulla di più naturale poi, che allorchè accadde al Loos il fatto della caduta della goccia di acqua contenente larve sulla pelle, coi conseguenti fenomeni irritatori, egli che a tutta prima non comprese la possibile importanza del fatto, abbia potuto prima o poi portare istintivamente la mano nel luogo dove massimo era il prudore, e quindi, tenendo anche presente la possibilità nelle larve di resistere al disseccamento per un tempo relativamente lungo ([1]), si sia casualmente infettato; tanto più che egli confessa implicitamente di non aver usato in quei tempi la precauzione di lavarsi le mani con alcool a 90° dopo ogni contatto con i recipienti contenenti il materiale di cultura, precauzione che dice di aver adottato negli esperimenti più recenti. A questa possibilità di infezione involontaria per via orale durante le esperienze, aggiungasi nel caso del Loos anche il coefficiente importantissimo della grande facilità di assumere l'infezione con altri mezzi in un paese, come il Cairo, in cui l'anchilostomiasi è endemica.

Ad ogni modo adunque, sembrandomi molto improbabile che si potesse verificare un fenomeno talmente strano nel campo elmintologico, e ritenendo d'altra parte, come ho detto, che l'esperienza del Loos per la sua insufficienza dimostrativa fosse ben lontana dal portare delle prove positive in favore di detta ipotesi, con l'aiuto del prof. Grassi, mi accinsi a uno studio scrupoloso della questione.

Grazie alla cortesia del prof. F. Schupfer, che nelle feci di un malato della clinica medica di S. Spirito aveva riscontrato, col metodo suggerito nel 1878 dal Grassi e oggi da tutti adottato, l'infezione per *Anchilostoma*, mi fu possibile procurarmi il materiale per le esperienze.

Nel giorno 17 novembre 1901 cominciai la coltivazione delle uova nel

([1]) In alcune mie esperienze in proposito io ho riscontrato finora in larve di *Anchilostoma* poste in condizioni di siccità quasi assoluta, una resistenza massima di 6 o 7 giorni. Ma su questi esperimenti, che mi propongo di rinnovare, tornerò più diffusamente nella relazione estesa e particolareggiata che intendo pubblicare in breve delle esperienze alle quali accenno più innanzi.

termostato alla temperatura di 28° — 20° C., alla quale si ottiene la massima celerità nello sviluppo, e in breve ebbi a mia disposizione molte larve.

Il giorno 4 dicembre presi da una cultura con una pipetta dell'acqua contenente numerosissime larve viventi e vivacissime, incapsulate e mature per passare nell'ospitatore definitivo. Ne sgocciolai sei goccie sulla pelle del dorso della mia mano; posso calcolare che in queste si contenessero parecchie migliaia di larve; dopo circa un'ora, allorchè furono asciugate, feci cadere altre due goccie. Quindi eseguii la stessa operazione sul professore Grassi e sul dott. Giovanni Noè, che molto gentilmente si prestarono alla mia esperienza. Sulla pelle del dorso della mano del Noè feci cadere tre goccie dell'acqua contenente larve, il cui numero sarà stato di qualche migliaio; altrettanto feci sulla pelle dell'avambraccio del prof. Grassi, il quale invece di lasciare asciugare l'acqua sul posto, la spalmò largamente sulla superficie dell'avambraccio.

L'eseguire l'esperienza su di altri, oltrechè su di me, mi sembrava indispensabile per esser sicuro del valore dei risultati; infatti se l'infezione si fosse sviluppata eventualmente in me, che ho occasione di maneggiare continuamente il materiale di studio, sarebbe stato ben difficile determinare se essa fosse dovuta alle larve penetrate per la pelle o a quelle ingerite per mera casualità (cosa che, come ognuno immagina, può verificarsi colla massima facilità); se poi l'infezione si fosse sviluppata anche nei compagni di esperienza, l'ipotesi del Loos avrebbe avuto una conferma molto importante, se non assoluta.

Le larve collocate sulla nostra pelle penetrarono indubbiamente in essa; una ispezione accurata col microscopio semplice ci persuase che dopo il disseccamento delle goccie, non esistevano più larve alla superficie della nostra epidermide. Inoltre in Noè e in me si svilupparono in breve fenomeni irritatori locali (che in me si manifestarono più acuti, verosimilmente in rapporto all'enorme numero delle larve adoperate): gonfiore, indolenzimento della parte, bruciore ecc., fenomeni analoghi a quelli riscontrati anche da Loos e da lui descritti; essi durarono, decrescendo progressivamente di intensità, fino verso la fine di dicembre.

Debbo notare che il diligente esame delle nostre feci prima dell'esperienza, ci confermò l'essere noi completamente liberi di *Anchilostoma*. Dal giorno dell'esperienza eseguimmo sovente l'esame delle feci, e questo fu proseguito, sempre con risultato negativo rispetto alla presenza di uova di *Anchilostoma*, fino alla metà del gennaio 1902, e cioè al di là del termine di 4-5 settimane dal tentativo di infezione, nel quale avrebbe dovuto presumibilmente cominciare l'emissione delle uova qualora l'infezione avesse avuto luogo.

Pertanto il giorno 13 febbraio esaminando le mie feci, riscontrai in esse la presenza di qualche uovo di *Anchilostoma*; mi affrettai allora a verificare

se esse si riscontrassero anche nelle feci dei miei compagni di esperienza, ma in questi l'esame fu assolutamente negativo.

Attribuisco tale leggiera infezione all'ingoiamento casuale di qualche larva avvenuta durante le mie manipolazioni giornaliere del materiale di esperienza, alle quali sono costretto dalla necessità di rinnovare quotidianamente l'acqua alle mie culture di larve per mantenerle viventi. Che essa non abbia origine dal tentativo di infezione attraverso la pelle lo desumo da tre importantissime prove: 1° la non intervenuta infezione degli altri due compagni di esperienza; 2° la sua entità minima relativamente al numero sterminato di larve penetrate nella mia pelle nell'esperienza (¹); 3° l'epoca dell'infezione, posteriore di molto a quella in cui avrebbero dovuto secondo ogni probabilità svilupparsi le larve penetrate nell'organismo.

Credo che queste mie prime osservazioni mi autorizzino a concludere che l'ipotesi del Loos della possibile infezione di *Anchilostoma* per immigrazione attiva delle larve attraverso la pelle, è priva di un serio fondamento scientifico. Rimarrebbe perciò stabilito che l'unica via di infezione seguita dalle larve dell'*Anchilostoma* è la via orale, come per il primo constatò il Grassi insieme coi Parona.

Resta ancora un punto da chiarirsi per dare alla mia affermazione una dimostrazione completa: il destino delle larve penetrate attraverso la pelle. A rischiarare questa importante circostanza io dirigerò le mie ulteriori ricerche.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci: Foà, Taramelli, Gaudry, Helmert, Pflueger, Weingarten, Wild.

Il Corrispondente Millosevich fa omaggio, a nome del Socio Tacchini, del vol. III, serie 3ª, delle *Memorie del R. Osservatorio del Collegio Romano*, e dà notizia dei lavori in esso contenuti.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Lucca; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona;

(¹) Con un antelmintico mi sono liberato degli Anchilostomi, che ospitavo, ed ho riscontrato che erano in numero di sette.

l'Accademia di scienze naturali di Filadelfia; le Società zoologiche di Amsterdam e di Tokyo; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la Società di scienze naturali di Emden; il Museo Teyler di Harlem; gli Osservatorii di Vienna e di Praga.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di studi superiori di Firenze; l'Accademia delle scienze di Cracovia; la Società geologica di Ottawa; l'Università di Tübingen.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 marzo 1902.

Arata P. N. — Apuntes de Quìmica. T. I-III. Buenos Aires, 1901. 8°.

Borgnino G. C. — Tyrosine & Tyrosinase. Paris, 1902. 8°.

Brédikhine T. — Sur la Comète 1901, I. St. Pétersbourg, 1901. 4°.

Clerici E. — Sulle polveri sciroccali cadute in Italia nel marzo 1901. Roma, 1901. 8°.

Delitala G. — La risoluzione del pentagono completo e sue applicazioni nella geodesia elementare. Torino, 1902. 8°.

Id. — Nuova risoluzione di problemi. Torino, 1901. 8°.

De Lorenzo G. — Considerazioni sull'origine superficiale dei vulcani. Napoli, 1902. 4°.

Id. — Un paragone tra il Vesuvio e il Vulture. Napoli, 1901. 8°.

De Toni G. B. — Della vita e delle opere di Antonio Piccone. Roma, 1902. 4°.

Foà P. — Lavori dell'Istituto di anatomia patologica. Torino, 1902. 8°.

Gaudry A. — Sur la similitude des dents de l'homme et de quelques animaux. Paris, 1901. 8°.

Helmert F. R. — Dr. Hecker's Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ocean. Berlin, 1902. 8°.

Id. — Ueber die Reduction von Lotabweichungen auf ein höher gelegenes Niveau. Stuttgart, 1902. 8°.

Jensen Chr. — Kurzer Ueberblick ueber die Thatsachen und Theorien auf dem Gebiete der atmosphärischen Polarisation. Hamburg, 1901. 8°.

Memorie dell'Osservatorio del Collegio Romano, pubblicate dal Direttore P. Tacchini. Ser. 3ª, vol. III. Roma, 1902. 4°.

Oddone E. — Del moto relativo nelle onde meccaniche terrestri. Pavia, 1902. 8°.

Orlando L. — Note di matematica. Messina, 1902. 8°.

Pflüger E. — Ueber Kalkseifen als Beweise gegen die in wässriger Lösung sich vollziehende Resorption der Fette. Bonn, 1902. 8°.

Pierantoni L. F. — Dimostrazione del Postulato di Euclide. Chieti, 1901. 8°.

Relazione sullo stato e sulla attività del Laboratorio di Entomologia agraria presso la R. Scuola Superiore di agricoltura in Portici, dalla sua fondazione a tutto l'anno 1900-1901. Roma, 1902. 8°.

Sars G. O. — An account of the Crustacea of Norway. Vol. IV. Copepoda. P. 3-4. Bergen, 1902. 8°.

Taramelli T. — Alcune osservazioni stratigrafiche nei dintorni di Varzo. Milano, 1902. 8°.

Weingarten J. — Ueber den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit. Leipzig, 1902. 8°.

Wild H. — Ueber den Föhn und Vorschlag zur Beschränkung seines Begriffs. Zürich, 1901. 4°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 marzo 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Stabilità delle configurazioni di equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale.* Nota del Corrispondente G. Morera.

Laplace nel *Supplément à la théorie de l'action capillaire* (Oeuvres, tomo IV, pag. 455), dopo aver concluso che l'altezza a cui si eleva un liquido in un tubo e la forma della superficie libera dipendono unicamente dalla figura del tubo nella parte ove tal superficie si trova, osserva che in uno stesso tubo vi possono essere parecchi stati di equilibrio se la sua larghezza non è uniforme. A proposito di tali stati di equilibrio Laplace afferma che: « *lorsque la figure d'un tube capillaire diminue par nuances insensibles les diverses états d'équilibre sont alternativement stables et non stables* », affermazione che l'illustre autore tenta rendere intuitiva con talune semplici considerazioni meccaniche, che non si possono però accettare come una dimostrazione della proposizione.

L'unico autore che, per quanto a me consta, sia ritornato sulla rammentata affermazione di Laplace, è E. Mathieu nel secondo capitolo della sua pregiata *Théorie de la capillarité*, ove studia la elevazione o la depressione di un liquido in un tubo capillare di rotazione, non cilindrico, ad asse verticale, ed esamina i differenti equilibrî della colonna capillare in un tale tubo, facendone poi applicazione ad un tubo conico immerso nel liquido per la base. (Cfr. op. cit., pagg. 52-58).

Mathieu riferisce testualmente le accennate considerazioni di Laplace e soggiunge: « le raisonnement de Laplace est vague et il indispensable de le remplacer par un autre qui ait plus de précision »; ma per quanto Mathieu opportunamente invochi la funzione delle forze, non mi sembra che il suo ragionamento presenti una precisione maggiore di quello di Laplace.

Ritenendo che il tubo sia capillare, almeno nelle porzioni di esso ove cadono le superficie libere delle possibili configurazioni di equilibrio, calcolerò, trascurando termini che sono dell'ordine del quadrato del raggio, le variazioni che subisce il potenziale delle forze nel passaggio da una configurazione di equilibrio alla consecutiva, il che offrirà il mezzo di decidere facilmente della stabilità o dell'instabilità delle anzidette configurazioni.

Per fissare le idee supponiamo che il liquido sia sollevato nel tubo capillare, ossia che l'angolo di raccordo φ fra la superficie libera in una configurazione di equilibrio e la superficie interna del tubo sia ottuso.

Prendiamo come asse delle z l'asse del tubo percorso in verso ascendente e diciamo r la distanza dall'asse stesso di un punto qualunque della superficie libera, che ora è di rotazione. Diciamo ψ l'angolo che la normale interna alla superficie libera fa col raggio che dall'asse va al suo piede; ritenuto che il piano di quota zero sia il piano di livello, si ha ovviamente:

$$\text{(I)} \qquad \frac{a^2}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cos \psi) = z \text{ (}^1\text{)};$$

questa è l'equazione differenziale della superficie libera. Moltiplicata questa equazione per $2rdr$ ed integrata a partire da $r = 0$ si ottiene:

$$\text{(II)} \qquad a^2 r \cos \psi = r^2 z - \int_{z_0}^{z} r^2 \, dz ,$$

ove z_0 indica la quota del punto sull'asse di rotazione.

Denotiamo: con ϱ il raggio del parallelo secondo cui la superficie libera del liquido incontra la superficie interna del tubo, ossia il raggio della circonferenza di raccordo; e con i l'inclinazione sulla verticale della superficie interna lungo la linea di raccordo, convenendo di assumere i positivo o negativo secondochè il tubo è verso l'alto convergente oppure divergente.

Calcolando il volume U compreso fra il cilindro verticale che ha per una base l'anzidetto parallelo, la superficie libera e il piano di livello, per mezzo della (I) si trova subito:

$$U = \int_0^{\varrho} 2\pi r z dr = - \pi a^2 \varrho \cos (\varphi + i) ,$$

[1] Si noti che secondo la notazione usata da Mathieu in questa equazione, invece della costante di capillarità a^2 si dovrebbe scrivere $2a^2$.

sicchè la quota media lungo la superficie libera risulta com'è ben noto:

$$z_m = \frac{U}{\pi \varrho^2} = -\frac{a^2 \cos(\varphi + i)}{\varrho}.$$

Applichiamo la (II) alla linea di raccordo della quale diremo z la quota, si ottiene:

$$-a^2 \varrho \cos(\varphi + i) = \varrho^2 z - \int_{z_0}^{z} r^2 dz$$

e quindi:

$$\int_{z_0}^{z} r^2 dz = \varrho^2 (z - z_m).$$

Dalla (II), ponendo in luogo di z *la quota della linea di raccordo*, lungo la superficie libera risulta:

$$\cos \psi \leq \frac{rz}{a^2},$$

d'onde segue

$$\left|\frac{dz}{dr}\right| \leq \frac{rz}{\sqrt{a^4 - z^2 r^2}};$$

dunque:

$$z - z_0 < z \int_0^{\varrho} \frac{r dr}{\sqrt{a^4 - z^2 r^2}} \leq \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - z^2 \varrho^2}}{z}$$

$$< \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - z^2_m \varrho^2}}{z_m} < \varrho \frac{1 + |\operatorname{sen}(\varphi + i)|}{|\cos(\varphi + i)|},$$

e per conseguenza

$$\int_{z_0}^{z} r^2 dz < \varrho^2 (z - z_0) < \varrho^3 \frac{1 + |\operatorname{sen}(\varphi + i)|}{|\cos(\varphi + i)|}.$$

Trascurando adunque un termine dell'ordine di ϱ^2 la (II) dà alla linea di raccordo:

(III) $$\varrho z = -a^2 \cos(\varphi + i).$$

Le linee di raccordo delle superficie libere in tutte le possibili configurazioni di equilibrio si otterranno trovando i valori di ϱ e z che soddisfanno alla equazione precedente ed a quella della superficie interna del tubo. In altri termini, se in un piano meridiano qualunque si immagina tracciato il profilo della superficie interna del tubo e la curva di equazione (III), che diremo curva (c), le intersezioni di queste due linee danno i punti per cui passano le linee di raccordo.

Si osservi che se, come avviene nei tubi che si possono adoperare per verificare sperimentalmente i risultati della teoria, l'angolo i subisce delle piccole variazioni lungo il profilo meridiano, almeno nelle regioni ove esso vien tagliato dalla linea (III), quest'ultima curva (c) è con grande approssimazione una iperbola equilatera [1].

Diciamo σ'' e σ' le aree della superficie libera del liquido e della sua superficie che è in contatto delle pareti solide, il potenziale P delle forze capillari e dei pesi delle particelle liquide è, ritenendo uguale ad 1 la densità del liquido:

$$P = g\int z\,dS + \frac{\vartheta_1}{2}\sigma'' - \left(\eta_1 - \frac{\vartheta_1}{2}\right)\sigma',$$

ove ϑ_1 ed η_1 rappresentano le note costanti di capillarità ed il primo integrale va esteso a tutto il volume S occupato dal liquido.

Si ha poi:

$$\cos\varphi = -\frac{\eta_1 - \frac{\vartheta_1}{2}}{\frac{\vartheta_1}{2}} \quad ; \quad \frac{\vartheta_1}{g} = a^2,$$

quindi:

$$\text{(IV)} \qquad P = g\left[\int z\,dS + \frac{a^2}{2}(\sigma'' + \cos\varphi \,.\, \sigma')\right].$$

Calcoliamo la variazione finita ΔP che il potenziale subisce quando il liquido nel tubo capillare sale da una qualunque configurazione di equilibrio alla successiva.

Ritenendo il liquido contenuto in un vaso molto ampio, non varieranno la superficie libera del liquido all'esterno del tubo e le aree bagnate sulle pareti del vaso e sulla parete esterna del tubo, così pure non varierà $\int z\,dS$ esteso alla massa fluida situata fuori del tubo. È quindi lecito nella (IV) ritenere che il primo integrale sia esteso alla colonna liquida che sta nel tubo al di sopra del piano di livello e che σ'' e σ' rappresentino rispettivamente le aree della superficie libera del liquido nel tubo capillare e della

[1] Nelle esperienze conviene far uso di un tubo capillare di vetro foggiato a successivi coni che alternativamente si uniscono per le basi e per i vertici; un tubo cosiffatto si ottiene agevolmente da uno cilindrico scaldandolo successivamente alla fiamma in diversi punti e stirandolo.

Allora i ha piccoli valori, che oscillano attorno allo zero, e, se il tubo si immerge nell'acqua, si ha inoltre:

$$\varphi = \pi \;;\; a^2 = 15.13\ mm^2$$

La curva (c) ha in tal caso per equazione $\varrho z = a^2 \cos i$.

superficie interna del tubo da esso bagnata. Allora σ'' è dell'ordine di ϱ^2 e quindi trascurabile, e per la stessa ragione è trascurabile il contributo recato al primo integrale dalla massa liquida del menisco. Dette: Q l'espressione che moltiplica g nell'espressione del potenziale; e $z, z + \Delta z$ le quote delle linee di raccordo delle due successive superficie libere di equilibrio, abbiamo:

$$\Delta Q = \pi \int_z^{z+\Delta z} r^2 z dz + \pi a^2 \cos \varphi \int_z^{z+\Delta z} r \frac{dz}{\cos i} .$$

Intendendo che ϱ rappresenti la distanza dall'asse del punto della curva (c) che ha la quota z per la (IV), avremo:

$$\Delta Q = \pi \int_z^{z+\Delta z} z (r - \varrho) r dz + \pi \int_z^{z+\Delta z} \left(\varrho z + a^2 \frac{\cos \varphi}{\cos i} \right) r dz .$$

Ma per la (III) l'ultimo integrale diviene

$$a^2 \int_z^{z+\Delta z} \left[\frac{\cos \varphi}{\cos i} - \cos (\varphi + i) \right] r dz = a^2 \int_z^{z+\Delta z} \operatorname{sen} (\varphi + i) \operatorname{tg} i \, . \, r dz$$

$$= - a^2 \int_z^{z+\Delta z} \operatorname{sen} (\varphi + i) \, r dr ;$$

per conseguenza anche quest'ultimo integrale è dell'ordine di ϱ^2 e però trascurabile nell'ordine di approssimazione prefissoci. Dunque a meno di quantità dell'ordine di ϱ^2:

$$\Delta P = g \, . \, \Delta Q = g \pi \int_z^{z+\Delta z} r (r - \varrho) z dz .$$

Se tra le due successive superficie libere di equilibrio considerate la curva (c) è interna al profilo meridiano del tubo sarà $\varrho < r$, e quindi $\Delta P > 0$, se invece è esterna sarà $\Delta P < 0$; nel primo caso il potenziale va crescendo dalla prima configurazione alla seconda e quindi quest'ultima non può essere stabile, nel secondo caso invece il potenziale va decrescendo e quindi la prima configurazione non può essere stabile.

Le configurazioni stabili sono adunque quelle nelle quali la curva (c) percorsa nel verso ascendente attraversa il profilo meridiano del tubo pas-

sando dall'esterno all'interno; sono instabili invece quelle nelle quali la (c) attraversa detto profilo dall'interno all'esterno.

In generale alla prima intersezione della (c) col profilo meridiano, questa curva passa dall'esterno all'interno e però la corrispondente configurazione di equilibrio è, generalmente parlando, stabile; allora la seconda configurazione di equilibrio è instabile, la terza è in generale di nuovo stabile e così via.

Se però la curva (c) è tangente al profilo meridiano, sia che essa in prossimità del punto di contatto rimanga all'esterno, sia che rimanga all'interno del profilo stesso, la corrispondente configurazione di equilibrio non è stabile.

Le configurazioni non stabili non sono praticamente realizzabili, e però le previsioni della teoria si possono facilmente verificare coll'esperienza.

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota III [1] di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio VOLTERRA.

10. *Sviluppi asintotici.* — Riprendiamo l'espressione (15) di $U_2 - F_2$.

Il secondo membro, considerato come funzione del parametro q, ha, per $q = \infty$, un punto singolare essenziale. Infatti esso differisce dall'espressione rigorosa (10) di F_2 soltanto per lo scambio di B in q; ed F_2, quale funzione di B, ha effettivamente una singolarità essenziale in $B = \infty$, come risulta dalla (10″) [2].

Non sarà dunque possibile sviluppare $U_2 - F_2$ in serie di potenze di $\frac{1}{q}$, convergente nell'intorno di $\frac{1}{q} = 0$.

Però, limitandosi ai valori reali e positivi di $\frac{1}{q}$, si può stabilire la validità dello sviluppo di Taylor fino a un ordine qualsiasi e fissare il limite superiore di ciascun resto.

Ecco in qual modo.

[1] V. pag. 191.

[2] In quanto, se $B = \infty$ non fosse una singolarità essenziale di F_2, ciò accadrebbe in particolare per i valori 0, 0, 1 di y, z, d, ossia per la funzione

$$e^{iB}\,\mathrm{Li}\,e^{-iB} = e^{iB}\log B + e^{iB}\left\{C - i\frac{\pi}{2} + \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-i)^m B^m}{m\,.\,m!}\right\},$$

il che evidentemente non è, poichè tanto il coefficiente di log B, quanto il secondo addendo, sviluppati per potenze di B, contengono un numero infinito di termini.

Cambiando λ in $\frac{\lambda}{q}$, la (15) si può scrivere:

$$q(U_2 - F_2) =$$

$$-\frac{i}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q}\right)}+\frac{1}{|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q}\right)}\right\}d\lambda .$$

Sotto questa forma apparisce chiaramente che il secondo membro rimane finito e determinato, anche quando $\frac{1}{q}$ converge a zero (si intende, per valori reali).

Infatti il modulo della funzione sotto il segno è, per qualsiasi valore di λ, $\leq 2\frac{|z|+d}{(|z|+d)^2+y^2}e^{-\lambda}$, funzione evidentemente integrabile nell'intervallo $0, \infty$.

Si può anzi asserire che la funzione $U_2 - F_2$ ammette derivate di qualunque ordine, rispetto all'argomento $\frac{1}{q}$, anche nel punto $\frac{1}{q}=0$.

Infatti:

(19)
$$\frac{d^m q(U_2-F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m}=$$

$$-\frac{i^{m+1}}{2}m!\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^m\left\{\frac{1}{\left[|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}}+\frac{1}{\left[|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}}\right\}d\lambda$$

$$(m=0,1,2,\ldots),$$

e il modulo della funzione sotto il segno non supera mai

$$\frac{2}{(|z|+d)^{m+1}}e^{-\lambda}\lambda^m .$$

L'integrale è dunque una funzione di $\frac{1}{q}$, finita e continua per ogni valore reale di $\frac{1}{q}$ $\left(\frac{1}{q}=0\text{, incluso}\right)$.

Per $\frac{1}{q}=0$, risulta in particolare

$$\frac{d^m q(U_2-F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m}=-\frac{i^{m+1}}{2}(m!)^2\left\{\frac{1}{(|z|+d+iy)^{m+1}}+\frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}}\right\},$$

od anche, avendo riguardo alle identità

$$\frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{|z|+d+iy} + \frac{1}{|z|+d-iy}\right\},$$

$$\frac{d^{m+1} \log \frac{1}{F}}{d|z|^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} m!\left\{\frac{1}{(|z|+d+iy)^{m+1}} + \frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}}\right\},$$

$$\frac{d^m q(U_2-F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -(-i)^{m+1}\, m!\, \frac{d^{m+1} \log \frac{1}{F}}{d|z|^{m+1}}.$$

In questa condizione di cose è chiaro che si può applicare alla funzione $q(U_2 - F_2)$ la formula di Taylor per l'intervallo $0, \frac{1}{q}$, fino a un ordine qualunque m, e scrivere di conformità

$$(20) \qquad U_2 - F_2 = -\sum_{1}^{m}{}_s \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^s \log \frac{1}{F}}{d|z|^s} + R_m,$$

dove, usando pel resto la forma di Lagrange, si può ritenere per la (19),

$$R_m = -\frac{i^{m+1}}{2q^{m+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^m \left\{\frac{1}{\left[|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}} + \frac{1}{\left[|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}}\right\} d\lambda$$

con $\frac{1}{q_1} > 0$.

La (20) e questa espressione di R_m valgono anche per $m=0$, dovendosi soltanto nella (20) porre zero al posto della sommatoria.

Per qualsiasi valore di y (reale, si intende) il modulo della quantità in parentesi nell'espressione di R_m è sempre inferiore a $\frac{2}{(|z|+d)^{m+1}}$, talchè

$$(21) \qquad R_m < \frac{m!}{q^{m+1}(|z|+d)^{m+1}}\ [1].$$

[1] Si può osservare che, ammettendo a priori la possibilità di uno sviluppo di $U_2 - F_2$ per potenze di $\frac{1}{q}$, la forma dello sviluppo risulta subito dalla prima equazione (7') $\left(\text{nel secondo membro della quale si intende posto } -\frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|} \text{ in luogo di } \frac{dF_2}{d|z|}\right)$. Però questo modo di procedere, oltre a non essere rigoroso, non permette di apprezzare l'entità del resto.

In modo perfettamente analogo, considerando le derivate di $q(U_2 - F_2)$ rapporto a y e rapporto a $|z|$, si ha

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(U_2 - F_2)}{dy} = -\sum_1^m {}_s \dfrac{(-i)^s}{q^s} \dfrac{d^{s+1} \log \dfrac{1}{r}}{d|z|^s\, dy} + R'_m, \\[2ex] \dfrac{d(U_2 - F_2)}{d|z|} = -\sum_1^m {}_s \dfrac{(-i)^s}{q^s} \dfrac{d^{s+1} \log \dfrac{1}{r}}{d|z|^{s+1}} + R''_m \end{cases}$$

con

$$(23)\qquad R'_m \;,\; R''_m < \frac{(m+1)!}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+2}}.$$

L'equazione differenziale (5'):

$$\frac{d\,V_2}{dy} = pi\,(U_2 - F_2),$$

notando che $|U_2 - F_2|$ è in ogni caso $< \dfrac{1}{qd}$ e ricordando dalle (8) che $\dfrac{p}{q} = B$, ci dà

$$\left|\frac{dV_2}{dy}\right| < \frac{B}{d}.$$

Immaginiamo di sviluppare colla formula di Taylor, arrestata dopo il primo termine, le funzioni qV_2 e $q\dfrac{dV_2}{d|z|}$, definite dalla (13) e sua derivata rapporto a $|z|$.

Troveremo dopo ovvie riduzioni

$$V_2 = B\left\{\text{arctg}\,\frac{y}{|z| + d} - \frac{\pi}{2} + R'''\right\},$$

$$\frac{dV_2}{d|z|} = B\left\{\frac{d \log \dfrac{1}{r}}{dy} + R^{IV}\right\}$$

con

$$R''' < \frac{1}{qd}\;,\; R^{IV} < \frac{1}{qd^2}.$$

Osservando che, per nessun valore reale di y, z, $\left|\dfrac{d \log \dfrac{1}{r}}{dy}\right|$ può supe-

rare $\frac{1}{2}d$, risulta ancora

$$\left|V_2\right| < B\left(\pi + \frac{1}{qd}\right),$$

$$\left|\frac{dV_2}{d|z|}\right| < B\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{qd^2}\right).$$

Noi dobbiamo naturalmente risguardare $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{qd}$ come quantità finite (nei casi pratici anzi molto minori dell'unità; cfr. il § seguente).

Per quanto s'è detto al principio del § 9, siamo ormai autorizzati a porre

$$V_2 = 0. \tag{24}$$

11. *Limite superiore degli errori, da cui possono essere affette le forze elettromagnetiche del campo, quando si usano gli sviluppi asintotici.* — A meno di termini contenenti B a fattore e senza riserve trascurabili, si ha, come abbiam visto,

$$F_2 + \log\frac{1}{\rho} = 0, \tag{14}$$

$$V_2 = 0. \tag{24}$$

Quale errore può insinuarsi nelle componenti delle forze elettromagnetiche, se, per $U_2 - F_2$ e sue derivate, si introducono gli sviluppi asintotici fino a un ordine determinato, omettendo i resti?

Per riconoscerlo, osserviamo in primo luogo che, essendo, per le (3), $U_1 - F_1$ eguale alla parte reale di

$$2 I_0 e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}(U_2 - F_2),$$

si ha

$$A\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dt}\right| \leq 2 I_0 . 2\pi n A . |U_2 - F_2|,$$

$$\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dy}\right| \leq 2 I_0 \left|\frac{d(U_2 - F_2)}{dy}\right|,$$

$$\left|\frac{d(U_1 - F_1)}{dz}\right| \leq 2 I_0 \left|\frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|}\right|.$$

Ora, a tenore delle (I), (II) e

$$F = 2 I_0 \operatorname{sen}\omega\left(\log\frac{1}{\Delta} - \log\frac{1}{\rho}\right);\ U = F + (U_1 - F_1),\ V = 0,\ W = 0 \tag{18'}$$

(sono le (18), in cui s'è tenuto conto che $V_1 = 0$), le componenti della

forza elettrica dipendono da $U_1 - F_1$ solo per la presenza del termine $A \frac{d(U_1 - F_1)}{dt}$; le componenti della forza magnetica solo pei termini

$$\frac{d(U_1 - F_1)}{dy}, \frac{d(U_1 - F_1)}{dz}.$$

Dopo ciò, le (21) e (23) mostrano che, quando si introducono per $U_2 - F_2$ e sue derivate, gli sviluppi (20) e (22), fino al termine m^{esimo}, il resto non può superare

$$2 I_0 . 2\pi n A . \frac{m!}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+1}}$$

nella componente X (l'unica delle componenti della forza elettrica, che dipende da $U_1 - F_1$), nè

$$2 I_0 \frac{(m+1)!}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+2}}$$

in una componente magnetica.

Per avere un'idea dell'errore relativo, in una componente e in un punto generico, conviene considerare il rapporto fra l'errore assoluto e l'intensità (massima), che compete nello stesso punto alla corrispondente forza, quando manca lo schermo conduttore.

Le (2), in cui dobbiamo intendere, per I, $I_0 \operatorname{sen} \omega$, ci dicono subito che, tanto per la forza magnetica, quanto per la elettrica, tale massima intensità vale

$$\frac{2 I_0}{\Delta}.$$

L'errore relativo non supera dunque

$$2\pi n A \frac{m! \Delta}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+1}}$$

per la forza elettrica, nè

$$\frac{(m+1)! \Delta}{q^{m+1} (|z| + d)^{m+2}}$$

per la magnetica.

Limitandosi, come è per noi sufficiente, a considerare punti in prossimità del piano mediano (piano normale allo schermo passante per la corrente), possiamo per es. supporre

$$y^2 < 3 (|z| + d)^2.$$

Si ha allora a fortiori:

Arrestando lo sviluppo asintotico al termine m^{esimo}, *la frazione trascurata di forza elettrica non può superare*

$$2\pi n A \frac{2 . m!}{q^{m+1} d^m}; \tag{25}$$

e la frazione trascurata di forza magnetica

$$\frac{2\,(m+1)!}{q^{m+1}\,d^{m+1}}\,. \tag{26}$$

Facendo nella (25) $m=0$ e ricordando dalla (8) che $q=\frac{4\pi^2 n}{R}$, risulta come errore relativo

$$\frac{AR}{\pi}\,,$$

frazione insignificante anche nel caso di resistenze considerevoli. (Prendendo, come a § 9, una lastra di argentana di un decimillimetro, si ha all'incirca $\frac{AR}{\pi}=0{,}00002$).

Concludiamo dunque che, *per quanto concerne la forza elettrica, è lecito ritenere senza errore sensibile*

$$U_2-F_2=0\,.$$

Affinchè l'uso degli sviluppi asintotici di $\frac{d(U_2-F_2)}{dy}$, $\frac{d(U_2-F_2)}{d|z|}$ nelle componenti della forza magnetica risponda allo scopo, è necessario che, per qualche valore di m, la (26) sia una piccola frazione dell'unità; per es. dell'ordine di $\frac{1}{10}$, se si tratta di ricerche puramente qualitative; più piccola (a norma dell'esattezza richiesta), se si tratta di ricerche quantitative.

Se esiste un valore di m che conviene, ad esso — e non oltre — vanno arrestati gli sviluppi.

Affinchè in particolare si possa prendere $m=1$ con errore non superiore all'un per cento, basterà, per la (26), che sia

$$\frac{4}{q^2 d^2}\leq\frac{1}{100}\,,$$

cioè

$$\frac{2}{qd}\leq\frac{1}{10}\,, \tag{27}$$

o finalmente, in via approssimativa,

$$\frac{R}{nd}\leq 2\,. \tag{27'}$$

Questa condizione è soddisfatta da lastre di rame dello spessore di un millimetro ($R=16000$), distanti un metro dalla corrente ($d=100$), purchè la frequenza sia almeno 80.

Fissati R e d, l'errore possibile $\frac{4}{q^2 d^2}$ varia con n in ragione inversa dei

quadrati. Così ad es., per $n=200$, esso è inferiore a $\left(\frac{80}{200}\right)^2 \frac{1}{100}$, cioè al 0,16 per cento; mentre, per $n=60$, si può contare soltanto sopra una esattezza del $\left(\frac{80}{60}\right)^2 \frac{1}{100}$, cioè all'incirca del 2 per cento.

12. *Espressioni approssimate* — *Interpretazione fisica.* — Bene intesi sui limiti dell'approssimazione corrispondente ad $m=1$, adottiamo come valore di $U_2 - F_2$, da introdursi nelle componenti della forza magnetica, il primo termine $\frac{i}{q} \frac{d \log \frac{1}{\mathcal{V}}}{d|z|}$ dello sviluppo asintotico (20) [1].

Per essere $U_1 - F_1$ la parte reale di

$$2\, I_0\, e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} (U_2 - F_2),$$

avremo

$$U_1 - F_1 = \frac{2\, I_0}{q} \cos\omega \frac{d \log \frac{1}{\mathcal{V}}}{d|z|}.$$

mentre, come s'è visto, è lecito ritenere $U_2 - F_2$, e di conseguenza, $U_1 - F_1 = 0$, nel valutare le componenti della forza elettrica.

Ciò posto, le (18′), introdotte nelle (I), (II), danno, per le componenti delle forze magnetica ed elettrica,

$$(28) \qquad \begin{cases} L = 0, \\ M = -2\, I_0 \frac{d}{dz} \left\{ \operatorname{sen}\omega \left(\log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\mathcal{V}} \right) + \frac{\cos\omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{\mathcal{V}}}{d|z|} \right\}, \\ N = \quad 2\, I_0 \frac{d}{dy} \left\{ \operatorname{sen}\omega \left(\log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\mathcal{V}} \right) + \frac{\cos\omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{\mathcal{V}}}{d|z|} \right\}; \end{cases}$$

$$(29) \qquad \begin{cases} X = 0, \\ Y = -2\, I_0 \operatorname{sen}\omega \frac{d}{dy} \left\{ \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\mathcal{V}} \right\}, \\ Z = -2\, I_0 \operatorname{sen}\omega \frac{d}{dz} \left\{ \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\mathcal{V}} \right\} \end{cases}$$

$$(\omega = 2\pi n (t - Ax) + \alpha).$$

[1] Che è derivabile termine a termine, come mostrano direttamente le (22).

Considerando in particolare i punti al di là dello schermo rispetto alla corrente $(z < 0)$, si ha

$$r = \Delta ,$$

e

$$-\frac{d}{dz} = \frac{d}{d|z|} .$$

Le (28), (29), eseguendo le derivazioni, divengono

$$(28') \qquad \begin{cases} L = 0 , \\ M = \dfrac{2\,I_0}{q} \cos\omega \dfrac{(|z| + d)^2 - y^2}{\Delta^4} , \\ N = \dfrac{2\,I_0}{q} \cos\omega \dfrac{2\,(|z| + d)\,y}{\Delta^4} ; \end{cases}$$

$$(29') \qquad X = Y = Z = 0.$$

La forza elettrica è dunque sensibilmente intercettata dallo schermo, come (rigorosamente) ha luogo in elettrostatica.

Quanto alla forza magnetica, per acquistare un' idea adeguata della modificazione prodotta dal conduttore, giova confrontarla colla

$$(30) \qquad \begin{cases} L' = \quad 0 , \\ M' = -\,2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \dfrac{|z| + d}{\Delta} , \\ N' = -\,2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \dfrac{y}{\Delta} , \end{cases}$$

che, a norma delle (2), agisce negli stessi punti $(z < 0)$, quando manca lo schermo.

Sieno

$$H_0 = \frac{2\,I_0}{q}\frac{1}{\Delta^4}\sqrt{\{(|z| + d)^2 - y^2\}^2 + 4\,(|z| + d)^2\,y^2} = \frac{2\,I_0}{q}\frac{1}{\Delta^2} ,$$

$$H_0' = 2\,I_0\,\frac{1}{\Delta}$$

le rispettive intensità massime.

Si ha

$$(31) \qquad \frac{H_0}{H_0'} = \frac{1}{q\Delta} .$$

Lo schermo riduce dunque la intensità massima della forza magnetica (nei punti al di là) alla frazione $\frac{1}{q\Delta}$ *di quella che si avrebbe in sua assenza.*

Dacchè $\varDelta$ non può discendere in questi punti al di sotto di d, siamo dalle osservazioni numeriche del precedente § autorizzati a concludere che, nel caso di correnti alternative industriali (entro i limiti di validità dell'approssimazione qui adottata), la presenza dello schermo riduce la forza magnetica a pochi centesimi del suo valore, per dir così, naturale; la intercetta sensibilmente per più alte frequenze (1).

Indichiamo con ϑ l'angolo che la linea d'azione della forza magnetica naturale fa coll'asse y. Le (30) e (28') mostrano subito che, nel campo magnetico modificato dalla presenza del conduttore, l'analogo angolo (contato, a partire dall'asse y, nello stesso senso) vale 2ϑ.

Nei punti del piano mediano ($y=0$, $\vartheta=0$) N, e così N', si annullano. La forza è dunque in questi punti (esista o no lo schermo) normale al piano mediano stesso.

La forza magnetica naturale (30) ha in un generico istante t, l'intensità $|\text{sen}\,\omega|\,H'_0$; quella modificata dal piano conduttore $|\cos\omega|\,H_0$. Ai massimi dell'una corrispondono dunque i minimi dell'altra, e reciprocamente; ossia *le due fasi sono a una distanza di un quarto di periodo.*

Si osservi da ultimo che, finchè si tratta di correnti alternative industriali, si può identificare la fase ω con $2\pi nt+\alpha$, poichè allora $2\pi n A x$ non ha certo valore apprezzabile nel campo di osservazione (entro cui si suppongono naturalmente gli assi di riferimento).

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota II (2) di Ugo Amaldi, presentata dal Socio S. Pincherle.

In questa Nota, facendo seguito ad altra, che, sotto analogo titolo, ha avuto di recente l'onore di essere presentata a questa illustre Accademia, completo la ricerca di cui là ho posto l'enunciato e le basi. Conservo, naturalmente, le medesime notazioni e seguito, per le formole, la numerazione.

3. Il sistema di equazioni, che caratterizza i sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici di una data superficie e del quale quindi noi dobbiamo discutere le condizioni di integrabilità, si ottiene dal sistema (3) ponendovi $\beta=0$. Esso è dunque:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{ds_1}=0 \,, & \dfrac{d\gamma}{ds_2}=\frac{1}{2}(\alpha+K)+\gamma^2 \\[2ex] \dfrac{d(\gamma)}{ds_1}=\frac{1}{2}(\alpha-K)-(\gamma)^2 \,, & \dfrac{d(\gamma)}{ds_2}=0 \end{cases}$$

(1) Carattere questo ben noto. Cfr. Poincaré, *Les oscillations électriques*, pag. 58.

(2) V. pag. 198.

e ad esso vanno aggiunte le equazioni (5) (8) che in questo caso diventano:

$$(11) \quad \frac{d\alpha}{ds_1} = -\frac{dK}{ds_1} - 2(\gamma)\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+K)+\gamma^2\right], \quad \frac{d\alpha}{ds_2} = \frac{dK}{ds_2} + 2\gamma\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-K)-(\gamma)^2\right]$$

$$(12) \qquad \frac{d^2K}{ds_2\,ds_1} + \frac{d^2K}{ds_1\,ds_2} + 3\left[(\gamma)\frac{dK}{ds_2} - \gamma\frac{dK}{ds_1}\right] = 0 .$$

Poichè quest' ultima per $K = \text{cost.}$ è identicamente soddisfatta, il sistema (10) (11) è in tal caso completo: poichè tale sistema appartiene manifestamente alla nota classe di sistemi differenziali studiati dal Lie (1) ritroviamo il risultato già ben conosciuto (2), che sulle superficie a curvatura totale costante esistono ∞^4 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici; essi si determinano integrando il sistema completo (10) (11) [per $K = \text{cost.}$].

Escluso il caso della superficie a curvatura totale costante, indichiamo con (g) e g rispettivamente le curvature geodetiche delle linee $K = \text{cost.}$ e delle loro traiettorie ortogonali, e con ψ l' angolo delle linee di curvatura geodetica γ con quelle di curvatura geodetica g. Se allora poniamo:

$$h = \frac{\Delta_1 K}{\Delta_2 K} - (g) ,$$

dove Δ_1 e Δ_2 rappresentano i ben noti parametri differenziali del primo e del secondo ordine rispettivamente, la (12) si può ridurre alla forma:

$$2\gamma\cos\psi - 2(\gamma)\,\text{sen}\,\psi = \frac{h-(g)}{2}\,\text{sen}\,2\psi + 2g\cos 2\psi ;$$

se poniamo $h - (g) = 2\nu$ e introduciamo una nuova indeterminata μ, quest' ultima equazione è equivalente al sistema:

$$(13) \quad 2\gamma = (\mu+\nu)\,\text{sen}\,\psi + g\cos\psi \;,\; 2(\gamma) = (\mu-\nu)\cos\psi + g\,\text{sen}\,\psi .$$

Ora ci rimane da stabilire sotto quali condizioni per la μ e la ψ le espressioni precedenti di γ e (γ) rendano soddisfatte le (10), fra cui sia eliminata la α, che nelle (13) non compare più, vale a dire le (1), (2) e la (4). Ma, se introduciamo il sistema coordinato covariante φ_r $(r = 1, 2)$ del fascio cui appartengono le congruenze γ e (γ) e il rispettivo sistema ortogonale canonico $\bar{\varphi}_r$, le (1), (2) sono rispettivamente equivalenti alle (3):

$$\sum_{r,s} a^{(rs)}\,\bar{\varphi}_{rs} = K \;,\; \sum_{r,s} a^{(rs)}\,\varphi_{rs} = 0 .$$

(1) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt. Kap. 10.
(2) Darboux, l. c. III Partie, n. 655.
(3) Ricci et Levi-Civita, l. c., chap. VI, § 1.

Se indichiamo con $\frac{d}{d\sigma_2}, \frac{d}{d\sigma_1}$ le derivate intrinseche secondo le curve $K = \text{cost.}$ e le loro traiettorie ortogonali, e designiamo con q l'anisotermia del fascio definito dalle $K = \text{cost.}$, le due ultime equazioni, ove tengasi conto delle (12), dànno luogo a due equazioni indipendenti, lineari, rispetto a $\frac{d\mu}{d\sigma_1}$ e $\frac{d\mu}{d\sigma_2}$, che, risolute rispetto a codeste due derivate; dànno:

$$[I] \quad \begin{cases} \dfrac{d\mu}{d\sigma_1} = \left(\dfrac{p}{2} - \mu^2\right) \cos 2\psi - \frac{1}{2} q \operatorname{sen} 2\psi + \frac{1}{2}\mu(h + (g)) \\ \dfrac{d\mu}{d\sigma^2} = -\left(\dfrac{p}{2} - \mu_2\right) \operatorname{sen} 2\psi - \frac{1}{2} q \cos 2\psi \\ p = \dfrac{dh}{d\sigma_1} + \dfrac{d(g)}{d\sigma_1} + (h + (g))(g) - 2K \end{cases}$$

A queste equazioni aggiungiamo la rispettiva condizione di integrabilità:

$$[II] \quad \begin{cases} 2\mu q = A \operatorname{sen} 2\psi + B \cos 2\psi \\ A = \frac{1}{2}\dfrac{dq}{d\sigma_2} + \frac{1}{2}(h + (g))p - \frac{1}{2}\dfrac{dp}{d\sigma_2}, \quad B = -\frac{1}{2}\dfrac{dq}{d\sigma_1} + \frac{1}{2}(h + (g))q - \frac{1}{2}\dfrac{dp}{d\sigma_2}. \end{cases}$$

L'equazione (4), ove si tenga conto della prima delle (13), diventa:

$$[III] \quad \begin{cases} -3\mu^2 \operatorname{sen} 2\psi + 2\mu g = A' \operatorname{sen} 2\psi + B' \cos 2\psi \\ A' = 2\dfrac{dg}{d\sigma_2} - 2\dfrac{dv}{d\sigma_1} + \frac{1}{4}[h + 3(g)][h - (g)] + g^2 - p, \quad B' = -4\dfrac{dg}{d\sigma_1} - 2gv. \end{cases}$$

Infine dobbiamo tener conto del fatto che ψ è l'angolo di due congruenze, l'una del fascio φ_r, l'altra del fascio della conguenza $K = \text{cost.}$; applicando una relazione nota fra ψ e i sistemi coordinati covarianti dei due fasci [2] e tenendo conto delle [I] troviamo il sistema:

$$[IV] \quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{d\sigma_1} = -\frac{1}{2}\mu \operatorname{sen} 2\psi + \frac{1}{2} g \\ \dfrac{d\psi}{d\sigma_2} = -\frac{1}{2}\mu \cos 2\psi + \frac{1}{2}(g) + \frac{1}{4}(h + (g)), \end{cases}$$

la cui condizione di integrabilità è, come è ben naturale, conseguenza delle [I].

4. Da quanto precede risulta che affinchè la varietà data contenga sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici, è necessario e sufficiente

(1) Ricci, *Lezioni* ecc., pag. 163, form. (5).

che esistano due funzioni μ e ψ, le quali soddisfacciano al sistema [I, II, III, IV]. Se questo sistema ammette soluzioni, a ciascuna di esse corrisponde sulla varietà data un sistema doppio ortogonale isotermo di cerchi geodetici, i cui sistemi coordinati covarianti si esprimono immediatamente per mezzo dell'angolo ψ e degli analoghi sistemi covarianti della congruenza $K = \text{cost.}$ e della congruenza ortogonale.

Ci resta adunque soltanto da discutere quando l'indicato sistema ammetta soluzioni.

È manifesto che le equazioni II e III non possono essere soddisfatte identicamente, vale a dire senza portare alcun legame fra μ e ψ. Esse quindi o sono distinte, o si riducono ad una sola. Nel primo caso esse definiscono μ e ψ, assegnando per codesta coppia di funzioni un numero finito di determinazioni. Se qualcuna fra queste rende soddisfatte anche le equazioni differenziali I e IV, esiste corrispondentemente a ciascuna di esse, sulla varietà data, una coppia di congruenze ortogonali isoterme di cerchi geodetici. Tralasciando di sviluppare i complicatissimi calcoli che si richiederebbero a formare esplicitamente le condizioni, sotto cui le funzioni μ e ψ definite dalle II e III rendono soddisfatte le I e IV, ci limiteremo ad osservare che il caso è teoricamente caratterizzato, in quanto, riconosciuta l'indipendenza delle II e III, si constata, mediante operazioni in numero ed in termini finiti, se sulla data varietà esistano o no sistemi doppî di cerchi geodetici (in numero finito), e in caso affermativo si determinano completamente.

Se le II e III si riducono ad una sola equazione, si riconosce subito, ponendo uguale a zero il determinante funzionale dei loro primi membri rispetto a μ e ψ, od anche mediante una semplice discussione diretta, che deve verificarsi l'uno o l'altro dei seguenti sistemi di condizioni:

$$a) \qquad A = B = q = 0$$

oppure:

$$b) \qquad A = B = A' = B' = 0.$$

Nel caso a) la $q = 0$ ci dice che sulla data varietà la congruenza di curve $K = \text{cost.}$ deve essere isoterma: le altre due equazioni dànno, come risulta dalle espressioni di A e B,

$$\frac{dp}{d\sigma_2} = 0 \quad , \quad \frac{dp}{d\sigma_1} = (h + (g))\,p\,.$$

Ma sopratutto ci importa di notare che in tal caso, la II essendo una identità, rimane a considerare la sola III.

Derivando questa secondo σ_1 e σ_2 e tenendo conto delle I e IV otteniamo le due equazioni:

$$[\mathrm{III}'] \begin{cases} \frac{1}{2}\mu(9\mu^2-3p+\mathrm{A}')\,\mathrm{sen}\,4\psi+(\mathrm{C}-3\mu^2(h+(g)))\,\mathrm{sen}\,2\psi+ \\ \quad +(\mathrm{D}-5\mu^2 g)\cos 2\psi-\mathrm{B}'\mu\,\mathrm{sen}^2 2\psi+g(h+(g))\mu+2\mu\frac{dg}{d\sigma_1}=0 \\ 3\mu^3(1-3\,\mathrm{sen}^2 2\psi)-\frac{\mu}{2}\mathrm{B}'\,\mathrm{sen}\,4\psi+(\mathrm{C}'+2\mu^2 g)\,\mathrm{sen}\,2\psi+ \\ \qquad +(\mathrm{D}'-\frac{3}{2}\mu^2 h-\frac{9}{2}\mu^2(g))\cos 2\psi+\mathrm{A}'\mu\cos^2 2\psi=0 \\ \mathrm{C}=g\,\mathrm{B}'-\frac{d\mathrm{A}'}{d\sigma_1}\,,\ \mathrm{D}=g(p-\mathrm{A}')-\frac{d\mathrm{B}'}{d\sigma_1}\,, \\ \mathrm{C}'=-gp+\frac{1}{2}(h+3(g))\mathrm{B}'-\frac{d\mathrm{A}'}{d\sigma_2}\,,\ \mathrm{D}'=-\frac{1}{2}(h+3(g))\mathrm{A}'-\frac{d\mathrm{B}'}{d\sigma_2} \end{cases}$$

Ora se le tre equazioni III, III′ sono incompatibili, sulla data varietà non vi sono sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici. Se sono compatibili e si riducono a due soltanto, esse definiscono un numero finito di determinazioni per la coppia di funzioni μ e ψ e possiamo constatare mediante un numero finito di operazioni in termini finiti se ad esse corrispondano effettivamente sulla varietà data sistemi doppî della specie cercata e in caso affermativo li possiamo effettivamente determinare. Se, infine, le III, III′ si riducono ad una sola equazione (la III), si riconosce, mediante una discussione che richiede calcoli alquanto laboriosi ma di nessuna intrinseca difficoltà, che si ricade nel caso b).

In questo caso le II, III si riducono alla $\mu=0$ e perciò il sistema I diventa:

$$p\cos 2\psi-q\,\mathrm{sen}\,2\psi=0\ ,\ p\,\mathrm{sen}\,2\psi+q\cos 2\psi=0\,,$$

onde risulta, insieme con le b), $p=q=0$. Anche in questo caso, dunque, si tratta di superficie, su cui le curve $\mathrm{K}=\mathrm{cost.}$ formano una congruenza isoterma. L'angolo ψ è in tal caso definito dal sistema, necessariamente completo:

$$\frac{d\psi}{d\sigma_1}=\frac{1}{2}g\ ,\quad \frac{d\psi}{d\sigma_2}=\frac{3}{4}(g)+\frac{1}{4}h\,, \tag{14}$$

la cui soluzione generale dipende da una costante arbitraria. Si hanno dunque sulla varietà data ∞^1 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

5. Concludendo la nostra ricerca, abbiamo che, *se si prescinde dalle superficie a curvatura totale costante, sulle quali esistono ∞^4 sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici, su di una superficie non possono esistere più di ∞^1 sistemi doppi siffatti. Le superficie che contengono effettivamente una semplice infinità di codesti sistemi sono caratterizzate dal sistema di equazioni intrinseche*:

$$(15)\begin{cases} \frac{dg}{d\sigma_1}+\frac{d(g)}{d\sigma_2}=0 \quad , \quad \frac{d(g)}{d\sigma_1}+\frac{dh}{d\sigma_1}+(h+(g))\,(g)-2\,\mathrm{K}=0 \\ 4\frac{dg}{d\sigma_1}+(h-(g))g=0\,,\ \frac{d(g)}{d\sigma_1}+\frac{dg}{d\sigma_2}=\mathrm{K}-\frac{h}{8}[h+6(g)]-\frac{1}{2}g^2-\frac{1}{8}(g)^2 \end{cases}$$

Verificate queste condizioni, gli ∞^1 *sistemi doppi in parola si determinano integrando il sistema completo* (14).

Finiremo osservando che se, anzichè supporre dato l'elemento lineare, si volessero determinare tutti i ds^2 a curvatura totale non costante, su cui esistono ∞^1 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici (problema del Darboux) bisognerebbe integrare il sistema differenziale, che si ottiene aggiungendo alle (15) la formola del Liouville relativa al fascio cui appartengono le curve $\mathrm{K}=\text{cost.}$, e la nota relazione che lega l'invariante h alle curvature geodetiche g e (g) (¹), cioè le due equazioni:

$$\frac{d(g)}{d\sigma_1}-\frac{dg}{d\sigma_2}+g^2+(g)^2+\mathrm{K}=0\,,\quad \frac{dh}{d\sigma_2}=\frac{dg}{d\sigma_1}+g\,(h+(g))\,.$$

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota IIª di A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

1. In una Nota preliminare presentata a codesta Accademia nella seduta del 19 gennaio 1902, annunziavo che si può rendere radioattivo un corpo metallico, quando si affacciano ad essa delle punte e si pongono punte e corpo in comunicazione coi poli di una macchina elettrostatica. La mia prima disposizione consisteva nell'attivare una spirale di filo metallico, coassialmente alla quale era posto un cilindro fornito di aghi radiali. Le ricerche ulteriori furono condotte nel seguente modo.

Si prende una lastra metallica (cm. 10 × 14) e normalmente ad essa si pongono 3 aghi colle punte verso la lastra (ai vertici di un triangolo di 2 cm. di lato). Aghi e lastra sono posti in comunicazione coi poli di una macchina elettrostatica con un condensatore in derivazione, e si lascia funzionare questa per un certo tempo (di solito mezz'ora); la distanza fra le punte e la lastra varia a seconda della potenza della macchina; essa veniva in fatti regolata in modo da avere effluvio, senza che scoccassero scintille, e riesce quindi molta diversa a seconda del segno elettrico delle punte.

Per misurare l'attività acquistata dalla lastra, la si poneva poi in comunicazione con il polo di una batteria di elementi (il cui altro polo era a terra), mentre affacciata alla lastra era una rete metallica parallela, in comunicazione

(¹) Ricci, *Lezioni* ecc., n. 43, form. (15_1).

con una coppia di quadranti di un elettrometro, di cui l' ago era mantenuto ad un potenziale costante e l' altra coppia a terra. Si misurava poi il tempo necessario perchè la rete, inizialmente al suolo, si caricasse ad un determinato potenziale.

2. Il fatto più notevole annunziato nella prima Nota si era che si poteva rendere radioattivo il corpo, anche quando questo era elettrizzato positivamente, contrariamente ai risultati di altri sperimentatori.

Le ricerche istituite colla nuova disposizione confermarono pienamente i primi risultati. Restava ora di stabilire se la radioattività così generata dipende da uno stato speciale prodotto nell' aria dall' effluvio elettrico, ovvero da uno stato preesistente nell' aria stessa, allo stesso modo della radioattività ottenuta dagli altri fisici con corpo negativo.

Potei presto stabilire che l' intensità della radioattività assunta dalla lamina positiva dipende in grande misura dallo stato dell' aria; così essa è quasi nulla operando all' aria od in una stanza colle finestre aperte; cresce assai operando in una stanza, le cui finestre sono state chiuse da parecchie ore e diventa molto grande in un locale chiuso da lungo tempo, come in una cantina.

Di più questa radioattività indotta è piccolissima, se si opera con lamina ed aghi rinchiusi in una cassa della capacità di 30 litri, come se questa proprietà dell' aria non si possa produrre in ambienti piccoli; così non si ottiene attivazione riempiendo la cassa di ossigeno o di gas illuminante. Infine l' attivazione della lamina è indipendente dalla natura del metallo.

Questi risultati provano che la radioattività prodotta con lastra positiva e punte negative affacciate, si forma in presenza di aria, la quale si trova nelle medesime condizioni, in cui si attiva un corpo negativo, e che furono studiate con così interessanti risultati da Elster e Geitel e da Rutherford. E non si può pensare ad attività prodotta, per esempio, dall' ozono o da un' altra modificazione diretta generata dall' effluvio.

3. Lasciando all' aria libera una lastra metallica, p. es. di zinco spulito, collegata ad una macchina elettrostatica, con punte affacciate ed al suolo, si osserva dopo qualche tempo un' alterazione della superficie (probabilmente un' ossidazione) che si dispone in figure a contorni molto netti e che corrispondono in tutto alle così dette figure del Kundt. Si presentava quindi spontanea l' idea di vedere se la porzione attiva della lamina fosse appunto quella, ove la superficie era alterata. Ed apposite misure all' elettrometro, ricoprendo diverse porzioni della lastra con piombo in lamina, confermavano questa supposizione. Ma ponendo la lamina metallica sopra una lastra fotografica, dopo interposto un foglio di carta nera, non ottenni indizî sicuri della cosa per la ragione che la radioattività acquistata dalla lamina, già debole per azioni fotografiche, va rapidamente descrescendo, riducendosi dopo un' ora alla metà e dopo 3 ore al quarto del valore iniziale.

4. Per ottenere degli effetti più cospicui e potere quindi studiare più sicuramente le modalità del fenomeno pensai di operare nell'aria, ma in un ambiente, in cui fosse presente l'emanazione dell'ossido di torio scoperto dal Rutherford. L'analogia fra l'aria atmosferica in luoghi chiusi e l'aria contenente questa emanazione era sufficientemente stabilita dalle ricerche di Elster e Geitel e del Rutherford.

Posi allora sul fondo della cassa di 30 litri prima ricordata, una capsula contenente mezzo chilogramma di ossido di torio ottenuto per precipitazione coll'ammoniaca da soluzioni di nitrato di torio (provenienti da residui di reticelle Auer). La lastra e gli aghi erano disposti nell'interno della cassa ed uniti a fili adduttori ben isolati.

Richiudendo con cura la cassa, lasciando le cose a sè per circa 16 ore e poi elettrizzando per mezz'ora la lastra e gli aghi ottenni i medesimi fenomeni che nell'aria libera, ma un'attivazione molto più intensa, circa 10 volte maggiore come nelle migliori condizioni (cioè in una cantina). Si attivava la lastra sia caricandola positivamente, sia negativamente e pressochè in eguale misura.

Se invece si elettrizza la lastra appena richiusa la cassa, oppure dopo di avere rinnovata l'aria, si ottiene un'attivazione molto maggiore con lastra negativa, che non con lastra positiva.

È a notarsi però che questa attivazione in aria fresca, con lastra negativa, che più brevemente diremo attivazione negativa, è molto più debole (p. es., nel rapporto di 1 a 15) che non quella positiva o negativa, che si ottiene nelle condizioni precedenti, cioè con aria vecchia.

Esaminando ora le due faccie della lastra, si nota che, operando con aria fresca, nell'attivazione negativa si attiva anche la parte non rivolta agli aghi anzi talora più intensamente, che non quella che ha raccolto l'effluvio, mentre nel caso dell'attivazione positiva, essa è debolissima nella faccia posteriore.

Operando in aria vecchia, la faccia non rivolta agli aghi non presenta un'attivazione maggiore della naturale, cioè di quella che si ottiene senza alcun fenomeno elettrico, in un ambiente contenente le emanazioni dell'ossido di torio.

L'attivazione negativa in aria fresca ha poi questo di caratteristico, che, dopo tolta la lastra dalla cassa e di averla lasciata all'aria libera, essa seguita a crescere per alcune ore, sino a più del doppio, mentre una lastra attivata in aria vecchia, subito dopo estratta o resta stazionaria per poi cominciare a decrescere lentamente, ovvero presenta un aumento leggerissimo.

5. Dopo di avere così ottenuto una radioattività molto intensa in aria vecchia esposta alle emanazioni dell'ossido di torio, e di avere trovato che essa è molto persistente, riducendosi dopo 6 ore da 100 a 75 ed a 25 dopo 24 ore, ripresi l'esperienza fotografica tentata prima invano e di cui

al 3. Il risultato fu splendido. Si ebbero sulla lastra fotografica le figure del Kundt; la radioattività viene conferita alla lamina in quelle porzioni della superficie, in cui si ha lo scambio di elettricità fra superficie metallica ed aria ed in cui hanno luogo tutti quei fenomeni ritrovati dal Kundt e da altri sperimentatori dopo di lui. Mentre, giova ricordarlo, la lamina non impressionò la lastra fotografica, quando non era attiva elettricamente, mentre le figure di ossidazione potevano essere sopra di essa nettissime (questo mostra che i fenomeni da me osservati non hanno nulla di comune con quelli riferiti recentemente dal Villard).

Le figure del Kundt si ottengono in pochi secondi facendo avvenire l'efflu- vio in un'aria fumosa od in cui sieno sospese delle particelle molto leggere (p. e. ossido di magnesio ottenuto bruciando del magnesio in vicinanza); la lamina si copre di fumo o di polvere bianca in quelle porzioni della superficie, che costituiscono appunto le figure del Kundt. Viene quindi naturale alla mente il pensare che queste particelle attive contenute nell'aria si elettrizzano in vicinanza delle punte e poi vengono lanciate sulla lastra ed ivi fissate. Si intende che adopero un'immagine, non volendo in alcun modo affermare o mostrare di credere che le cose avvengano proprio così.

6. Volendo raccogliere i fenomeni osservati, si è portati a concludere che se l'emanazione dell'ossido di torio in aria fresca porta questa in uno stato tale, che si ha un'attivazione solo sopra i corpi negativi, come se si trattasse di particelle elettrizzate positivamente, che seguono le linee di forza — e questo è il fenomeno osservato dal Rutherford — invece dopo alcune ore l'aria in presenza dell'ossido di torio è in uno stato tale, che l'effluvio elettrico, che esce da una punta, rende attiva una lamina e nelle porzioni di essa su cui viene a battere. Questi risultati spiegono ora quello che si era osservato nell'aria semplice, purchè si ammetta che l'aria atmosferica ordinaria si trova, qualitativamente, nelle stesse condizioni come l'aria in presenza delle emanazioni di ossido di torio. E che nei due casi il lasciare l'aria rinchiusa produca una modificazione nell'aria stessa e non già nella lamina, risulta dall'attivazione intensa che si ottiene sopra una lastra portata in una cantina e sottoposta subito dopo al processo elettrico.

7. Ricordo ancora che collegando la lamina e gli aghi coi poli di un trasformatore Tesla, non si ottiene attivazione anche in aria vecchia contenente emanazioni toriche. Anzi la faccia esposta all'effluvio si mostrò una volta meno attiva della faccia rivolta dall'altra parte, la quale aveva l'attività naturale assunta da ogni corpo lasciato a sè per un certo tempo in vicinanza di ossido di torio.

In questa comunicazione mi sono limitato ad esporre i principali risultati ottenuti, senza riportare i dati numerici, che seguono dalle numerose misure eseguite, riservandomi di pubblicarli prossimamente. Intanto mi è grado ringraziare il signor Caboni, laureando in fisica, il quale mi ha efficacemente aiutato nelle esperienze descritte.

Chimica. — *Sulla tautomeria dell'acido piromeconico* [1]. Nota di A. PERATONER, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

La determinazione quantitativa dei prodotti di scissione dell'acido piromeconico [2] mi indusse, alcun tempo fa, a concludere che questo acido, di cui dimostrai la costituzione di 3-ossipirone, nelle sue reazioni non si presenta solamente nella forma ossidrilica (I) finora nota, ma altresì in quella tautomerica chetonica (II).

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l} HC - O - CH \\ \| \qquad\qquad\quad \| \\ HC - CO - C.OH \end{array} \qquad\qquad \text{II.}\quad \begin{array}{l} HC - O - CH_2 \\ \| \qquad\qquad\quad | \\ HC - CO - CO \end{array}$$

Mi sembrò inoltre probabile, che da questa forma chetometilenica fosse da derivare l'acido nitroso-dipiromeconico, ottenuto da Ost [3] per l'azione dell'acido nitroso e considerato come prodotto di addizione dell'acido nitroso-piromeconico con una molecola di piromeconico, $C_5H_3O_3 . NO + C_5H_4O_3$.

Lo studio di questa sostanza dimostrò che la mia supposizione era esatta rivelandosi il nitroso-composto invece come isonitroso-derivato. Un'ulteriore prova della presenza del pruppo $- CH_2 - CO -$ nell'acido piromeconico la trovai nella reazione coi sali di diazocomposti.

Nella presente Nota riassumo brevemente i risultati principali della mia ricerca.

Trattavasi anzitutto di trovare un metodo agevole per la preparazione del materiale di partenza, l'acido nitroso-dipiromeconico puro, giacchè il metodo indicato da Ost, di lavorare cioè con piccole porzioni di acido piromeconico polverizzato, introducendole in soluzioni di triossido di azoto nell'etere assoluto, è faticoso e richiede tempo e spesa rilevanti. Inoltre lavorando con quantità maggiori, la formazione di un nitroderivato per l'azione ossidante dell'acido nitroso non può evitarsi; e data la grande instabilità del nitroso-composto, tale impurezza non si riesce ad eliminarla più in alcun modo.

Assai comoda invece è la preparazione, quando si operi in soluzione cloroformica e si impieghi un nitrito alchilico [4], il cui eccesso non nuoce.

Il prodotto cristallino, d'un bel giallo canario, si separa allora nel tempo di 6-8 ore, con un rendimento del 95-97 % del teoretico, senza che si libe-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Palermo.

(2) Peratoner e Leonardi, Gazzetta chimica *30* I, 539.

(3) Journal. f. prak. Chemie *19*, 195.

(4) Ho preferito al nitrito d'amile quello di etile, preparato secondo Bertoni (Gazz. chim. *12*, 441), perchè dopo si evapora rapidamente col cloroformio.

rino traccie notevoli di acido nitroso. Basta lavarlo con cloroformio per averlo puro per analisi. L'impiego di etilato sodico e di soluzione alcoolica non conduce allo scopo.

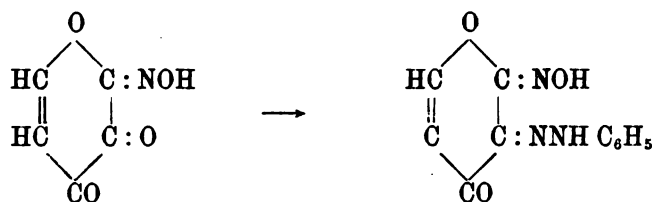
L'acido piromeconico si comporta di fronte all'etere nitroso come alcuni composti chetometilenici e non come i fenoli. Queste sostanze, come è noto, forniscono isonitrosoderivati anche in soluzione acida, quantunque con scarso rendimento. Però ho potuto convincermi con apposite esperienze che è caratteristico il comportamento dei fenoli, i quali in contatto col nitrito alchilico anche a 0° svolgono una corrente regolare di ossidi dell'azoto, mentre gli 1, 3 — dichetoni (eteri acetil- e benzoilacetico, acetil- e benzoil-acetone) si trasformano coll'etere nitroso solo lentamente ed in piccola parte senza che si liberi acido nitroso.

Il comportamento simile dell'acido piromeconico, faceva già arguire la formazione di un ossima — C : (NOH) — CO —. Ma a dimostrare la presenza e la posizione del gruppo isonitroso male si prestarono le reazioni che sono consigliate in casi simili. Taccio quindi i tentativi infruttuosi e noto solamente che la quistione fu risolta mediante la reazione con fenilidrazina.

A priori erano da considerarsi principalmente due casi più probabili: dovevasi cioè attendere, analogamente alle esperienze di Otto Fischer e Wacker [1] colla chinonossima, la formazione di un acido amidopiromeconico,

HON ⟨ring⟩ O → H_2N ⟨ring⟩ OH

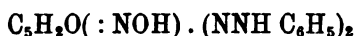
oppure secondo i lavori di v. Pechmann [2] quella di un' idrazossima.

```
        O                          O
      /   \                      /   \
   HC      C : NOH            HC      C : NOH
   ||      |           →      ||      |
   HC      C : O              C       C : NNH C6H5
      \   /                      \   /
       CO                         CO
```

La reazione, infatti, procede secondo quest'ultimo schema e va blandamente, quando si introduca il nitrosocomposto a porzioni piccole in soluzione ben raffreddata di fenilidrazina nell'acido acetico glaciale. Il prodotto della reazione inquinato da molta resina rossa è depurato con difficoltà; in ultimo si ottiene dalla soluzione xilolica un miscuglio di due sostanze cristalline,

(1) Berichte *21*, 2616.
(2) Ibidem *21*, 2992, 2994 ecc.

delle quali l'una dal p. f. 165° è costituita da aghi gialli, sottilissimi, l'altra è in fiocchi bianco-grigiastri. Non sono riuscito finora ad avere pura quest'ultima, dapoichè cristallizzando frazionatamente il miscuglio e specialmente adoperando benzolo, i fiocchi bianchi andavano mano mano trasformandosi in aghi gialli, assai simili nell'aspetto a quelli dal p. f. 165°, ma fondenti invece a 197°. Cosicchè infine ebbi una mescolanza dei due corpi giallo-chiari quasi ugualmente solubili nei solventi, sulla cui separazione faticosa non voglio qui dilungarmi.

Questi due corpi sono isomeri, conducendo l'analisi alla formola di *diidrazoni dell'acido nitrosopiromeconico*

$$C_5H_2O(:NOH).(NNH\,C_6H_5)_2$$

Mostrano l'identico comportamento chimico, del quale rilevo:

1. Entrambi sono ancora veri derivati del pirone, venendo trasformati dagli alcali in xantocomposti, gialli, poco solubili, con apertura dell'anello pironico. Trattando questi sali con acidi, le sostanze primitive si rigenerano, però solamente in parte, mentre si formano quantità non trascurabili di corpi di natura gommosa, ciò che è comune ai derivati dell'acido piromeconico.

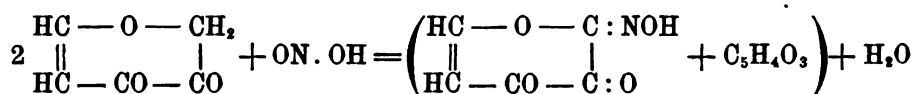
2. Dopo riscaldamento prolungato delle loro soluzioni con acido cloridrico, queste riducono il liquido di Fehling.

3. I due residui della fenilidrazina in entrambi gli idrazoni sono legati ad atomi di carbonio contigui, dapoichè i prodotti danno la reazione degli *osazoni* di v. Pechmann [1] e per ossidazione blanda si trasformano in *osotetrazoni*.

4. Entrambe le sostanze sono inoltre *idrazossime* e per conseguenza un residuo della fenilidrazina ed il gruppo ossimidico sono ancora legati a due atomi di carbonio contigui. Ciò risulta dal fatto, che per riscaldamento sopra il loro punto di fusione, i prodotti eliminano una molecola di acqua fornendo *l'identico* prodotto di anidrificazione, che è da ritenersi come derivato dell'*osotriazolo*, e si presenta in aghi bianchi dal p. f. 242°.

Ne segue che i due corpi isomeri devono avere l'istessa costituzione chimica, e con somma probabilità sono stereoisomeri per la presenza del gruppo ossimico.

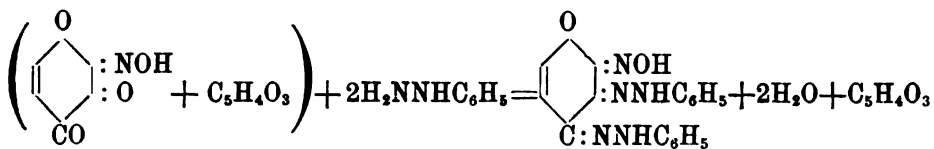
La formazione di tutte le sostanze cennate si spiega con facilità, solo quando si ammetta che l'acido nitroso-dipiromeconico sia l'ossima di un trichetone, in cui i tre gruppi carbonilici si trovino in posizione vicinale, cioè se si considera per l'acido piromeconico anche la forma chetometilenica

$$2\begin{array}{l}HC - O - CH_2\\ \;\|\qquad\qquad\;\;|\\ HC - CO - CO\end{array} + ON.OH = \left(\begin{array}{l}HC - O - C:NOH\\ \;\|\qquad\qquad\;\;|\\ HC - CO - C:O\end{array} + C_5H_4O_3\right) + H_2O$$

(1) Berichte *21*, 2752.

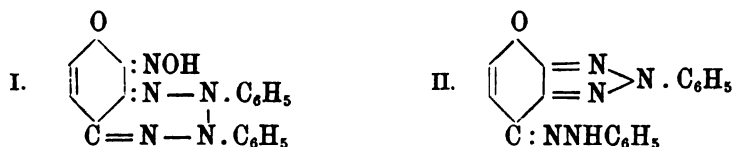
Da questa ossima ottenendosi i due osazoni stereoisomeri con eliminazione della molecola di acido piromeconico addizionata, si sarebbe indotti a ritenere che tale molecola sia legata ad uno dei gruppi carbonilici.

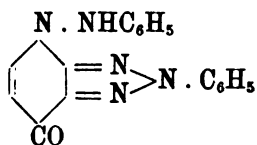
O

$$\left(\begin{array}{l} : NOH \\ : O \end{array} + C_5H_4O_3 \right) + 2H_2NNHC_6H_5 = \begin{array}{l} : NOH \\ : NNHC_6H_5 \end{array} + 2H_2O + C_5H_4O_3$$

CO   C : $NNHC_6H_5$

Dalle due diidrazo-ossime stereoisomere per ossidazione si ricavano gli osotetrazoni (I) e per eliminazione di acqua l'identico osotriazolo (II)

I. O; : NOH; : $N - N . C_6H_5$; C $= N - N . C_6H_5$

II. O; $= N$, $= N$ $> N . C_6H_5$; C : $NNHC_6H_5$

Tuttavia rimane dubbio se a questo derivato triazolico non sia da attribuirsi piuttosto la costituzione

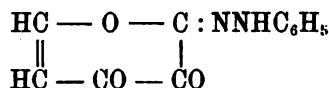
N . NHC_6H_5; $= N$, $= N$ $> N . C_6H_5$; CO

secondo la quale sarebbe anche un composto piridonico.

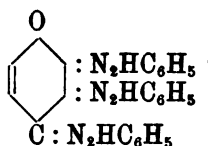
Il fatto che esso rimane inalterato all'azione dell'idrato potassico bollente, con cui invece forma un sale poco stabile, e che per azione di acido cloridrico non elimina più fenilidrazina, dimostrerebbe che non è più nè idrazone, nè derivato pironico. Se ciò viene confermato, bisognerà ammettere che alla temperatura elevata, alla quale il composto triazolico si forma, avvenga uno scambio fra il residuo fenilidrazinico e l'atomo d'ossigeno in posizione *para*.

Nel caso presente abbiamo dunque un'analogia completa coi prodotti preparati da v. Pechmann dagli 1,2 — dichetoni, con la piccola differenza che mentre comunemente la formazione degli osotriazoli dalle idrazossime ha luogo per azione di deacquificanti o per via indiretta, nel caso attuale avviene direttamente e con facilità pel solo riscaldamento.

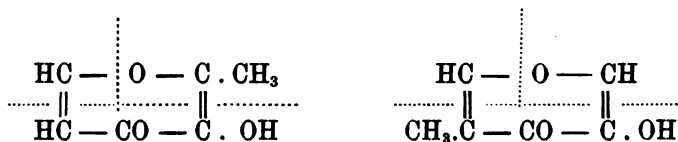
In modo simile alla fenilidrazina reagiscono sull'acido isonitrosopiromeconico anche l'idrossilammina e l'o-fenilendiammina; fornendo quest'ultima un prodotto di condensazione, viene riconfermata la esistenza dei due gruppi carbonili contigui.

L'acido piromeconico si comporta pure come derivato chetometilenico di fronte all'acetato di diazonio. Mescolando le soluzioni acquose ghiacciate, precipita l'*idrazone*, di colore rosso sangue,

$$\begin{array}{l} HC - O - C:NNHC_6H_5 \\ \ \| \qquad\qquad\ | \\ HC - CO - CO \end{array}$$

che può cristallizzarsi dallo xilolo o anche dall'alcool, se si eviti di riscaldare troppo. Si decompone a 175° con eliminazione repentina di carbone.

Facendo reagire questa sostanza sopra eccesso di fenilidrazina in acido acetico glaciale, si possono separare due prodotti gialli; l'uno, insolubile, è isomero dell'idrazone rosso e come questo si decompone a 175°. L'altro, il prodotto principale, che dalla soluzione acetica si depone col tempo per aggiunta di piccole quantità d'acqua, e che depurato si presenta in laminette dal p. f. 158°,5, è un *tri-idrazone* dell'acido piromeconico, al quale, in base a quanto fu detto sopra per le diidrazo-ossime, è da assegnarsi la formula

Riferirò in seguito più estesamente sullo studio di queste sostanze.

Intanto voglio notare fin d'ora che secondo l'accordo preso coi sigg. prof. Kiliani di Friburgo e dott. Feuerstein di Mulhouse, tenterò di applicare le reazioni dell'acido piromeconico da me studiate al *maltolo*. Questo composto, ora facilmente accessibile dopo la comunicazione del dott. Feuerstein [1], era stato considerato dal prof. Kiliani a ragione come acido metilpiromeconico [2]; tuttavia la costituzione non ne fu chiarita. Ora come derivato dell'ossipirone dovrebbe fornire per scissione quantitativa con alcali, a seconda della posizione del metile:

$$\begin{array}{l} HC - O - C.CH_3 \\ \ \| \qquad\qquad \| \\ HC - CO - C.OH \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \quad HC - O - CH \\ \quad\ \| \qquad\qquad \| \\ CH_3.C - CO - C.OH \end{array}$$

acido formico (1 molecola), acido acetico (1 molecola) ed alcool acetolico, oppure acido formico (2 molecole) ed alcool metilacetolico. Ulteriori ragguagli sulla posizione del metile rispetto all'ossidrile potrebbero forse ricavarsi dall'azione dell'acido nitroso secondo le indicazioni date nella presente Nota.

(1) Berichte *34*, 1804.
(2) Kiliani u. Bazlen. Berichte *27*, 3115.

Mineralogia. — *Thomsonite e apofillite di Schiket nella Colonia Eritrea.* Nota di G. D'Achiardi [1], presentata dal Corrispondente A. D'Achiardi.

Fra le rocce raccolte dal dott. Gino Bartolommei Gioli nella Colonia Eritrea e donate al Museo di Mineralogia della R. Università di Pisa, delle quali sarà fra breve da me pubblicata una descrizione, sono alcuni campioni di un basalte nerastro amigdalare presi nelle vicinanze di Schiket, località che si trova sulla strada che da Asmara conduce a Godofelassi prima di arrivare ad Adi-Baro [2]. Di questa stessa località, e se non precisamente dello stesso luogo pur sempre del colle di Schiket, già aveva il Bucca [3] fatto conoscere un basalte con venature e sferule di calcedonio, descritto poi successivamente anche dal Sabatini [4]. Però sembra che almeno per la natura delle segregazioni secondarie nulla abbia a che fare con quello da me osservato, nel quale si hanno del pari vene e sferule amigdalari, ma, anzichè essere calcedoniose, sono di costituzione zeolitica e affine, come dimostra lo studio da me fatto e di cui rendo qui brevissimo conto.

Thomsonite, varietà färöelite.

Come riempimento delle cavità amigdalari, o disteso in frangie ondulate sulle pareti loro ove esse si allungano irregolarmente assumendo aspetto di venule, si ha quasi esclusivamente un minerale bianco, a struttura fibroso-raggiata, lucentezza sericeo-madreperlacea, che nel suo insieme richiama alla mente l'apparenza della mesole, della färöelite e della così detta sferostilbite, varietà tutte di thomsonite, descritta la prima da Berzelius [5], la seconda da Heddle [6] e nuovamente studiata e riportata a questa specie la terza dal Prior [7]. Lo studio fattone conferma la corrispondenza.

Osservando infatti al microscopio le esili fibre, che rendono aspra la superfice delle sferule da cui sporgono, si riconoscono per trimetriche con

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

(2) Baldacci, *Carta dimostrativa della Colonia Eritrea.* Mem. descritt. della Carta geol. d'Italia. Vol. VI, Roma, 1891.

(3) *Contribuzione allo studio geologico dell'Abissinia.* Att. Acc. Gioenia di Sc. Nat. Ser. IX, vol. IX, Catania, 1892.

(4) *Sopra alcune rocce della Colonia Eritrea.* Parte III. Boll. R. Com. Geol., vol. X, n. 2, Roma, 1899.

(5) Philosophical Journal, *7*, 6, 1822.

(6) Philosophical Magazine, *13*, 50, 1857; *15*, 28, 1858.

(7) *On sphaerostilbite.* Mineralogical Magazine, *12*, 54, 1898.

abito prismatico-basale a contorno rettangolare, estinzione perfettamente parallela all'allungamento loro e segno ottico positivo.

Durezza c[a]. 5; peso specifico = 2,25. Al cannello ferruminatorio fonde decrepitando in uno smalto bianco e colora la fiamma in giallo.

Con acido cloroidrico a caldo dà silice gelatinosa.

L'analisi quantitativa mi dette i risultati della colonna I, riportati a 100 nella II:

	I	II
$Si\,O_2$	41,30	40,96
$Al_2\,O_3$	29,49	29,25
$Ca\,O$	11,61	11,51
$Na_2\,O$	5,11	5,07
$K_2\,O$	tracce	—
$H_2\,O$	13,32	13,21
	100,83	100,00

Gli alcali furono calcolati come se fosse solo presente il sodio, poichè il potassio potè solo avvertirsi qualitativamente alla fiamma nel prodotto della disgregazione del minerale con fluoruro ammonico dopo eliminazione della calce e dell'allumina.

L'acqua fu determinata alle temperature seguenti:

		$H_2\,O$ °/₀
A	80°-85°	0,942
	145°-150°	1,169
	205°-210°	1,107
	255°-260°	1,365
	325°-330°	2,179
	Per arroventamento	6,556
		13,318

Anche nella quantità di acqua perduta alle diverse temperature si ha notevole corrispondenza con le determinazioni fatte sulla mesole e sulla färöelite per le quali pure poco meno della metà se ne va solo con l'arroventamento (¹).

Altra e non minore corrispondenza con le stesse varietà si ha poi nell'eccesso di silice di fronte alla costituzione ammessa come normale nella thomsonite, onde se può dubitarsi che si abbia a che fare con tipica thomsonite, nessun dubbio rimane che si tratti della stessa cosa di quelle varietà sopra citate, che furono e sono riferite a questa specie, per le quali, anche

(¹) Dana, *A System of Mineralogy*, pag. 608, New-York, 1892.

se se ne dovessero distinguere, non vi ha certo ragione per indicarle con diversi nomi, ed io ho prescelto quello di färöelite, perchè l'altro più antico di mesole può ingenerar confusione con altre specie quasi egualmente denominate.

L'eccesso di anidride silicica fu da taluno attribuito a mescolanza di quarzo, ma Dana esclude giustamente questa spiegazione. Altra e migliore interpretazione può forse aversi, considerando l'acqua, in buona parte almeno, come di costituzione della molecola, nel ritenere col Clarke (1) che una porzione del silicio anzichè del gruppo [$Si\,O_4$] debba considerarsi come facente parte del gruppo [$Si_3\,O_8$], che del pari tetravalente può ad esso sostituirsi.

Apofillite, varietà tesselite.

Sulle frangie sferulitiche di thomsonite si osservano qua e là dei cristalletti isolati, scoloriti, cubiformi, che a prima vista potrebbero credersi di cabasia. Misurati però gli angoli, quantunque la natura delle faccie non consenta misure goniometriche rigorosamente esatte, ho sempre trovato valori vicinissimi a 90° tanto da escludere il dubbio che si trattasse di cabasia, dubbio escluso del tutto anche dal contegno ottico per l'estinzione, che è di cristalli dimetrici.

Essi spettano alla apofillite, che suole accompagnare anche la färöelite testè ricordata, ed un attento esame al microscopio dei più nitidi cristallini, fra i pochi che ho potuto esaminare, li mostra talvolta costituiti oltrechè dalle facce }100{, }001{, che sono sempre le più sviluppate e spesso le sole esistenti, anche dalle facce }111{ e da quelle pure di un prisma ditetragonale }m n 0{, le une e le altre sempre però piccolissime.

Si ha quindi un abito cristallino quale in quella varietà di apofillite detta tesselite ritrovata alle isole Färöer, e quale fu anche effigiato dal Rumpf (2) e dal Dana (3) per i più semplici cristalli di questa e di altre località.

La sfaldatura è parallela a }001{ con lucentezza madreperlacea.

Durezza = 5; peso specifico = 2,2.

Anomalie ottiche evidentissime tanto sulle facce del prisma, quanto sulle basali che appariscono divise in quattro settori triangolari, nei quali talvolta si ha associazione di aree otticamente positive e negative, carattere anche questo della apofillite.

(1) *The Constitution of the Silicates.* Bull. Un. St. Geol. Surv. Washington, 1895.

(2) *Ueber den Krystallbau des Apophyllits.* Tschermak's Mitth. Bd. II Wien, 1880, tav. III, fig. 15.

(3) Op. cit., pag. 566, fig. 1.

Al cannello ferruminatorio si sfoglia, rigonfia, imbianca e fonde in smalto bianco colorando la fiamma in giallo e violetto, visibile quest'ultima colorazione eliminando la prima con vetro azzurro.

Le ricerche qualitative per via umida dettero silice gelatinosa con gli acidi; calcio abbondante e solo tracce di allumina.

Impossibile fare un' analisi quantitativa completa disponendo di pochissimi cristallini, ma i saggi ottico-cristallografici e chimici non lasciano alcun dubbio che si tratti di apofillite simile alla varietà tesselite.

Cecidologia. — *Di una nuova specie di Pinipide galligeno e della sua galla già nota a Teofrasto.* Nota del dottor A. Trotter, presentata dal Corrispondente Cuboni.

Tra le numerose galle da me raccolte in un viaggio compiuto coll' amico dott. Achille Forti di Verona nella penisola balcanica ed in Asia Minore, dal luglio all' ottobre del 1900, galle che saranno completamente illustrate in un prossimo fascicolo degli Atti della Società botanica italiana, mi colpì non poco una singolarissima della Quercia rinvenuta prima (23 agosto) in Asia Minore sul M. Olimpo nei dintorni di Brussa (su *Quercus lusitanica* Lam.) quindi, più tardi (29 settembre) in Montenegro, non lungi da Cetinje, nei paraggi di Dobisko Selo (su *Q. sessiliflora* Sm. var. *pubescens* Will.).

La struttura di questa galla è altrettento semplice, quanto curiosa e perfetta: è essa costituita a maturità di una specie di nocciolo legnoso, durissimo, ovoide, sensibilmente attenuato ai due poli, lungo 10-12 mm. largo 8-10 mm., a superficie ruvida, anzi un po' rugosa e di un colorito isabellino più o meno spiccato. Entro a questo nocciolo trovasi scavata la camera larvale, tondeggiante di 4-6 mm. di diametro. Questa galla deriva, per quanto io ho osservato, da una trasformazione del frutto — non escludo ch' essa possa talora formarsi anche a spese di una gemma — ed aderisce perciò al ramo, da cui ebbero origine tali organi, e non se ne stacca che a maturità.

Ciò però che più interessa in questa galla si è il suo fitto e completo rivestimento di peli, di un aspetto lanuginoso, peli che sono lunghi 8-12 mm. e talora anche fino a 15-20 mm., giallicci da giovani, fulvi e rossicci a maturità. Osservati con leggero ingrandimento, essi si mostrano diritti soltanto nella porzione basale, presso l'inserzione, mentre più su vanno regolarmente serpeggiando ad acuti zig-zag; ad ingrandimento più forte si vedono costituiti di una serie di cellule cilindriche, abbastanza lunghe, un po' ingrossate all' estremità, le basilari più corte, ricche di protoplasma, le terminali più allungate e povere di contenuto. È chiaro quindi che l' accrescimento dei peli è dovuto principalmente all' accrescersi delle cellule basilari.

Questo rivestimento lanoso appare assai presto nell'ontogenesi della galla, e mentre il nocciolo interno, cioè la galla propriamente detta, è appena sviluppata, avendo un diametro soltanto di 2-4 mm. (1), la chioma lanosa ha già quasi toccato l'apice del suo accrescimento. L'altra continua poi ad accrescersi lentamente fino ad assumere i caratteri già descritti. Giunto a questo punto, il nocciolo si è venuto staccando *completamente* dal suo invoglio lanoso e, contemporaneamente, anche dal ramoscello a cui fino allora era rimasto congiunto, per cui esso cade a terra per il proprio peso. Il rivestimento lanoso invece, per la propria leggerezza, perdura quasi sempre per un certo tempo sulla pianta, sostenuto da qualche foglia o da qualche aderenza semplicemente meccanica col ramoscello, finchè il vento o la pioggia non disperdono anche quest'ultimo vestigio della curiosissima galla (2). In Montenegro io mi sono imbattuto in un arboscello di Quercia che era quasi tutto coperto da questi ciuffi lanosi, semplicemente sostenuti dalle foglie e dai rami, e già abbandonati dalla parte più importante della galla; e se io non avessi già saputo di che cosa si trattava, per averla prima raccolta in Asia Minore in diverse fasi di sviluppo, sarei stato ben imbarazzato nel giudicare di che si trattasse. Ai piedi dell'arboscello rinvenni poi, tra i detriti vegetali abbondantissimi i noccioli caduti, che raccolsi per allevarne il produttore.

Scorgiamo quindi in questa galla un'evoluzione morfologica e biologica curiosissima ed, a vantaggio dell'animale, dei provvedimenti protettivi semplici e ad un tempo perfetti: la larva, quando il tessuto che l'avvolge è ancor tenero e facilmente potrebbe venir trapassato dall'ovopositore di qualche insetto parassita, è validamente protetta dal cospicuo involucro lanoso che appare per l'appunto, già l'ho detto, sin dall'iniziarsi della galla, mentre quando le pareti di questa si son fatte grosse e legnose, l'involucro protettivo non è più necessario e la galla cade a terra; ma anche in quest'ultimo semplice fatto noi scorgiamo un utile provvedimento, poichè sul terreno, tra le foglie ed il musco, essa resta meglio salvaguardata dagli attacchi degli animali parassiti o predatori, ma sopratutto nel terreno le condizioni di temperatura e di umidità sono le più favorevoli allo sviluppo del produttore, quando questi specialmente abbia, com'è il caso nostro, un lungo periodo larvale.

Ho ottenuto l'insetto produttore di questa galla soltanto ai primi di marzo di quest'anno, da galle che tenevo in allevamento nel mio laboratorio e raccolte, come già ho detto, nell'estate del 1900: l'insetto è quindi ap-

(1) In questo stadio la galla è piuttosto sferica che ovoide, succosa e quindi più tenera, ed il suo colorito esterno è verde, in causa dei cloroplasti che ancora sussistono nelle parti periferiche del suo tessuto.

(2) Lo staccarsi della galla dal ramo e dall'invoglio peloso, corrisponde per l'Asia Minore alla fine di agosto e primi di settembre, ad una ventina di giorni più tardi per il Montenegro.

parso nel terzo anno. Avendolo studiato ed avendo riconosciuto una nuova specie del gen. *Cynips*, do di essa una breve descrizione diagnostica:

CYNIPS THEOPHRASTEA n. sp.

Colorito *generale rossiccio-mattone; nerastre sono invece le antenne, le suture pleuriche, le tibie ed i tarsi, particolarmente degli arti posteriori: l'addome nelle sue parti laterali è invece di un colorito giallo-miele.* Pubescenza *grigiastra, non molto fitta, diffusa su tutte le parti del corpo, ad eccezione dell'addome che è un po' pubescente soltanto nelle porzioni antero-laterali ed inferiormente da ciascun lato della spinula ventrale.* Mesonoto *percorso dall'avanti all'indietro da quattro solchi lineari, nerastri, due mediali, che dal margine anteriore giungono sin quasi a metà del mesonoto, gli altri due, uno per ciascun lato, che dal margine posteriore giungono anch'essi sino circa a metà.* Fossette *dello scutello oblique, nerastre, pubescenti.* Spinula *ventrale lunga circa 5 volte la propria larghezza, cigliata al disotto.* Antenne *di 14 articoli il 3° art. è più lungo del 4°, tutti gli altri uniformemente decrescenti in lunghezza ad eccezione dell'ultimo che è un po' più lungo del penultimo; i primi quattro articoli nei punti di articolazione hanno un anello di colorazione più chiara. — Questa specie emana, toccandola, un odore di cimice abbastanza sensibile, benchè non così sgradevole.* Statura *7-8 mm.*

Se questo insetto galligeno è assolutamente nuovo, non può dirsi lo stesso della sua galla di cui la prima notizia risale anzi a più di 2000 anni addietro, essendo stato Teofrasto il primo a ricordarla nella sua *Storia delle piante:* « Produce anche (la Quercia), scrive egli, (Lib. III, cap. VII, per altri è VIII), ciò che alcuni chiamano pelo che è una pallottolina lanosa e molle, cresciuta intorno ad un nucleo più duro, e che serve per lucignolo, essendochè arde bene..... » [1]. La caratterizzazione che Teofrasto dà di questa galla è così chiara e precisa che non vi ha dubbio alcuno ch'essa non sia la galla della nostra *Cynips Theophrastea*. Il Kieffer, nella sua Monografia *Les Cynepides* (p. 200), trattando degli usi a cui hanno servito o servono le galle, cita il passo di Teofrasto relativo alla nostra galla, la cui lanugine era impiegata a farne dei lucignoli, senza poterla però naturalmente identi-

[1] Dalla recente volgarizzazione italiana di F. Ferri Mancini (Roma, Loescher, 1901). Il testo greco dice così: *Φύει δὲ καὶ τὸν ὑπ' ἐνίων καλούμενον πίλον· τοῦτο δ'ἐστὶ σφαιρίον ἐριῶδες μαλακὸν περὶ πυρηνίου σκληρότητα πεφυκὸς, ᾧ χρῶνται πρὸς τοὺς λύχνους· καίεται γαρ καλῶς*..... così tradotto in latino nella ottima edizione del Wimmer (Parigi, Firmin-Didot, 1866): *Gignit etiam quem pilum nonnulli vocant, globulum lanatum mollem circa corpusculum nucleaceum durius, quo in lucernarum luminibus utuntur, quia probe flagrat.....*

ficare [1]. Soltanto egli opina possa trattarsi di una galla simile per il suo rivestimento lanoso a quella di un altro cinenottero della quercia, l'*Andricus ramuli*. Conosco perfettamente quest' ultima specie, nota anche a Malpighi, ma essa per moltissimi caratteri assai importanti si differenzia assolutamente dall' altra: nell' interno anzichè un nocciolo globoso, duro, vi hanno numerosissime piccole cellette, grosse quanto un grano di miglio, che facilmente si separano le une dalle altre ognuna delle quali possiede alla sommità un proprio ciuffo di peli; questi hanno poi, nella massa, un *habitus* affatto diverso ed osservati al microscopio sono unicellulari e di un diametro doppio o triplo degli altri. Essa si sviluppa poi esclusivamente dalle infiorescenze maschili.

Recentemente avendo avuta occasione di visitare le collezioni cecidologiche della R. Stazione di Patologia vegetale di Roma, trovai con mia sorpresa in un cartoccio un gran mucchio di una lanugine rossiccia proveniente dall' Erbario Cesati, raccolta su Quercie di Sardegna, che riconobbi tosto dover appartenere alle galle della *C. Theophrastea*; ed a sicura conferma della mia supposizione, rovistando tramezzo, vi ho potuti anche rinvenire due o tre dei noccioli interni caratteristici.

Questa singolare produzione cotonosa dell' Erbario cecidologico della R. Stazione patologica romana, è quella appunto di cui ebbe a trattare brevemente la marchesa Misciatelli in una seduta della Società botanica italiana, ancora nell' anno 1895 [2], come mi fu confermato anche dal prof. Cuboni, disorientò essa non poco le persone che ebbero ad osservarla, poichè chi la raccolse in Sardegna non ebbe forse l' opportunità di notare la parte principale, cioè il nocciolo interno, o ad esso non vi annesse importanza. Ho avuto anche l' anno passato degli esemplari completi di questa galla in comunicazione dal dott. Cecconi, che li ebbe da Mottola in provincia di Lecce, per cui questa specie ci appare oramai ad un tratto con una distribuzione geografica abbastanza estesa (Asia Minore, Montenegro, Leccese, Sardegna) ed è quindi probabile ch' essa debba in seguito rinvenirsi in molte altre località del bacino mediterraneo e dell'Oriente.

[1] Io pure ne ho fatta esperienza in una piccola lampadina ad olio, ed ho veduto che questa lanugine si presta discretamente come lucignolo, potendo sostituire il cotone; è possibilissimo perciò che, ai tempi di Teofrasto, le popolazioni meno esigenti della campagna, ne traessero a tale scopo profitto, in quelle località naturalmente nelle quali queste galle si mostravano più abbondanti.

[2] Bull. Soc. bot. it. an. 1895, processo verbale, pag. 109.

Zoologia. — *Il Mollusco contagioso negli Anfibi* [1]. Nota di PIO MINGAZZINI, presentata dal Socio TODARO.

Il Mollusco contagioso si conosceva, fino ad ora, soltanto in pochissime specie appartenenti a due classi di Vertebrati, cioè ai Mammiferi (uomo, pecora) ed agli Uccelli (colombo, pollo). Non si era sospettato nemmeno che sarebbe stato possibile di riscontrare tale forma patologica nei Vertebrati inferiori, poichè si credeva limitata ai soli Vertebrati omotermi. Invece io ho potuto trovare, in una specie di Anfibio dei dintorni di Paternò in provincia di Catania, nel *Discoglossus pictus*, una malattia dell'epidermide, che si presenta sotto la forma di noduli relativamente grandi, la quale per i suoi caratteri macroscopici si deve classificare nella categoria del Mollusco contagioso.

I *Discoglossus* infetti provengono da certe località nelle quali sembra che la malattia si propaghi con relativa facilità, perchè un gran numero di esemplari, ivi raccolti in primavera, si presentava affetto da essa. Vi erano alcuni individui lievemente attaccati, con due o tre noduli soltanto sulla loro pelle, altri invece presentavano una notevole estensione del loro tegumento ricoperta dai noduli del Mollusco contagioso. Relativamente alla distribuzione di essi, può notarsi che il dorso è molto più frequentemente infetto del ventre, e presenta noduli molto più sviluppati ed appariscenti. Sebbene non si possa riscontrare nei diversi individui infetti una vera sede di predilezione della malattia, perchè tutta quanta la superficie del corpo può essere invasa dai noduli, tuttavia si può dire che essi trovansi con maggior frequenza all'estremità anteriore verso l'apice del muso, sui margini della bocca e in vicinanza degli occhi, e nell'estremità posteriore in tutta la regione sacrale, con un massimo in vicinanza dell'ano. Meno frequentemente vengono attaccati gli arti, però mi è riuscito di trovarne qualche caso, principalmente sugli anteriori, e non sono risparmiate neppure le dita, sul cui apice ho trovato talvolta dei noduli più o meno sviluppati.

I detti noduli, quando hanno raggiunto il loro completo sviluppo, sono piuttosto grandi; hanno un diametro di quattro a sei millimetri, sono rilevati sul resto del tegumento per un'altezza di circa un millimetro, hanno forma circolare od ovale più o meno regolare. Quando due o più si formano a poca distanza, vengono a toccarsi allorchè sono sviluppati, per un tratto maggiore o minore, lungo il quale il contorno diventa rettilineo. Se molti si sviluppano contemporaneamente in diretta vicinanza, possono fondersi in modo più o meno completo, formando così una superficie nodulare a contorno

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Zoologia nella R. Università di Messina.

esterno curvilineo, nella quale è possibile in certi casi di riconoscere il numero di noduli che l'hanno originata, mentre in altri casi è impossibile, a cagione della completa fusione avvenuta. Queste superficie possono essere notevolmente estese e raggiungono talvolta più di un centimetro quadrato.

Il colorito di questi noduli nell'animale vivente è di un bianco opale, alquanto trasparente; negli animali fissati con sublimato è invece bianco candido, spiccante molto sul fondo bruno scuro o bruno verdastro della pelle del dorso dell'animale; molto meno evidenti sono quelli del ventre, perchè il loro colore è simile a quello bianco giallastro della su perficie inferiore del *Discoglossus*.

La superficie dei detti noduli è pianeggiante; essi per conseguenza si presentano come tanti dischi rilevati sulla pelle dell'animale. Quando si osserva questa superficie sui noduli già fissati e conservati in alcool, vi si vedono delle screplature. Queste sono di due sorta: in alcuni casi sono alquanto profonde, si trovano sulla superficie dei noduli complessi risultanti dalla fusione di due o più noduli semplici e si debbono interpretare come i limiti più o meno evidenti dei noduli primitivi; in altri casi sono più superficiali e poco estese: partono dal centro del nodulo semplice senza raggiungere la periferia ed allora sono l'espressione di tratti di disfacimento della parte superficiale dell'epidermide del nodulo; altre volte infine queste screpolature sono limitate al centro del nodulo ed hanno l'aspetto di un punto infossato del disco stesso.

I *Discoglossus* infetti non presentano differenze fisiologiche ed anatomiche apprezzabili, dai sani; come questi saltano, nuotano e camminano con facilità e vivacità; i loro organi interni sono integri e ben conformati. Io credo che, eccettuati i casi gravissimi, nei quali i noduli per aver ricoperto ed alterato gran parte dell'epidermide, impediscono le funzioni importantissime che questa ha negli Anfibi, causando pertanto uno stato patologico generale grave ed anche la morte, gli animali possano nei casi più comuni, d'infezione leggiera o mediocre, compiere al pari dei sani le diverse funzioni in modo normale.

Esaminata al microscopio un poco di poltiglia ottenuta raschiando la superficie dei detti noduli nell'animale vivente, si vedono le cellule epidermiche normali ed alterate e molti globuli alquanto rifrangenti, caratteristici di questa forma di Mollusco contagioso, un po' irregolari e variabili di dimensione, molto più grossi in generale di quelli della stessa malattia degli Uccelli e dei Mammiferi. Però tale esame riesce nei Batraci comparativamente più difficile di quello che sia nei Vertebrati superiori, poichè nei primi il Mollusco non forma nel derma un'introflessione a modo di follicolo, con apertura crateriforme e con una cavità contenente miriadi di tali corpi, come avviene nei secondi, ma presenta una superficie pianeggiante, con le piccole screpolature superiormente descritte, nelle quali possono trovarsi piccoli accumuli di tali corpi.

I preparati permanenti ottenuti con la triplice colorazione azzurra rossa e gialla, data dall' ematossilina Ehrlich, carminio litico *in toto* ed acido picrico sciolto o in xilolo od in essenza di trementina nelle sezioni, secondo il metodo già da me altre volte pubblicato, confermano il reperto delle osservazioni allo stato fresco, e completano le conoscenze intorno a questa particolare forma patologica dell' epidermide del *Discoglossus*. Le sezioni furono praticate trasversalmente ai noduli presi da diverse parti del corpo, come l' apice del muso, la regione orbitaria esterna, la regione dorsale, le regioni laterale e addominale, tutte dettero risultati identici. I parassiti risultarono colorati in modo differente: i giovani in azzurro intenso dall' ematossilina, gli adulti in rosso dal carminio litico e quelli più maturi, che si trovano nello strato superficiale o anche talvolta liberi sulla superficie nelle screpolature dell' epidermide, poco tinti dai due precedenti colori, ma assumenti una debole colorazione gialla dall' acido picrico. I tessuti normali dell' Anfibio seguono le leggi di colorabilità, secondo quanto produce generalmente il detto metodo: cioè l' epitelio si colora in azzurro, il connettivo in rosso vivo, i globuli sanguigni col plasma giallo e col nucleo in azzurro e via dicendo.

Sede della infezione è esclusivamente l' epidermide; anzi essa non viene in generale affetta in tutte le sue parti, poichè le glandole che ne sono una dipendenza, non di rado vengono risparmiate dal parassita e si trovano normalmente costituite al disotto del nodulo; ma in casi gravi anche diverse fra esse vengono invase dal parassita e sono riempite dalla proliferazione epiteliale che vi produce la sua presenza. Lo strato dermico sottostante, i vasi sanguigni ed i muscoli striati, che in talune regioni possono trovarsi molto vicini all' epidermide, sono generalmente di aspetto normale. Soltanto nei noduli molto sviluppati si può osservare una leggiera proliferazione del connettivo dermico interglandolare, che a forma di zaffi rialza la epidermide infetta e contribuisce a fare aumentare la rilevatezza del nodulo. In gran parte però anche nei noduli maggiori il rilievo è prodotto a spese dello strato epidermico, il quale, in seguito alla presenza del parassita, si ipertrofizza, e prolifera notevolmente, producendo l' accumulo speciale di cellule epiteliali e parassiti che caratterizza essenzialmente il nodulo.

Le sezioni eseguite sia su noduli molto grossi ed a completa evoluzione, sia su quelli assai piccoli, dimostrano che la neoformazione epiteliale è sviluppata secondo la superficie dell'epidermide e non mostra alcuna tendenza ad approfondirsi od invaginarsi nel derma sottostante. È questa una notevole differenza con tutte le altre forme di Mollusco contagioso finora conosciute, e si può indicare come una fase primitiva di tale lesione. È interessante di notare il fatto che questa forma primordiale di Mollusco si incontra appunto in una specie appartenente ad una classe di Vertebrati poco elevata, quale è quella degli Anfibi, mentre in specie appartenenti a classi superiori come negli Uccelli e nei Mammiferi, essa si presenta con caratteri più complessi.

Forse ciò sarà in parte da attribuirsi all'*habitat* diverso dei varî ospitatori, perchè gli uni vivono all'aria, ed i corpuscoli maturi del Mollusco verrebbero facilmente a soffrire il disseccamento se non fossero conservati in un ambiente umido, come la cavità del nodulo del Mollusco dei Mammiferi e degli Uccelli, mentre gli altri vivono prevalentemente nell'acqua; ma anche ammessa una tale ragione, non si può escludere quella propria della maggiore semplicità della forma patologica dovuta alle differenze specifiche del parassita e dell'ospitatore. Un tale fatto si verifica del resto anche in altre malattie parassitarie comuni a differenti classi dello stesso tipo animale.

Il nodulo, quando è molto sviluppato, si presenta limitato nettamente dal resto dell'epidermide: si vede alle due estremità della sezione un brusco rialzo dello strato epidermico, il quale va poi leggermente aumentando verso la parte centrale e presenta sulla superficie libera un contorno variamente sfrangiato, dovuto alle sfaldature irregolari di questa parte dell'epitelio, mentre nell'epidermide normale vi è un limite rettilineo netto, perchè essa si sfalda a strati continui piuttosto regolari. La differenza di altezza fra lo strato sano e lo strato infetto dell'epidermide è notevolissima; nei noduli molto sviluppati lo spessore dell'epidermide infetta è da 15 a 20 volte superiore a quello dello strato sano. Nei noduli meno sviluppati il distacco fra la parte sana e quella malata è meno brusco e si può notare un graduale rialzo dall'una all'altra.

Tutta la disposizione regolare dell'epitelio normale viene ad essere alterata dalla presenza del parassita e tale alterazione è in ragione diretta dello sviluppo del nodulo. Le cellule dei diversi strati vengono spostate, deformate, alterate nella loro costituzione per opera dei numerosissimi parassiti sparsi o nel loro corpo o fra esse, i quali in generale sono più o meno sviluppati, come succede nelle altre forme di Mollusco, a seconda dello strato più o meno profondo dell'epidermide nel quale risiedono. Le forme giovani si trovano nelle cellule più profonde e prevalentemente nello strato degli elementi cilindrici, le più avanzate nello sviluppo e le mature negli strati sempre più superficiali; però non vi ha una legge molto costante in ciò, come avviene nel Mollusco dei Vertebrati superiori, e spesso si osservano forme molto sviluppate del parassita anche negli strati più profondi, come pure si riscontrano forme abbastanza giovani verso gli strati superficiali.

Non tutte le cellule della neoformazione epiteliale vengono invase dai parassiti, anzi molte fra esse ne sono prive; tuttavia sono alterate in parte nella forma, in parte nella costituzione. Nei noduli molto sviluppati lo strato delle cellule cilindriche viene modificato nel senso che i loro nuclei non hanno più la regolare disposizione a palizzata, come nell'epitelio normale, col loro maggior diametro disposto in direzione perpendicolare alla superficie dell'epidermide, ma invece lo presentano parallelo od obliquo a questo, e sono qua e colà più numerose, mentre altrove sono assai più rade che nel-

l'epitelio normale. Soltanto gli elementi entro i quali un parassita si sviluppa vengono ben presto a morire, degenerando con grandissima rapidità il loro protoplasma e il nucleo; tutti gli altri rimangono in vita benchè siano compressi e deformati parzialmente sia dagli elementi vicini, sia dai parassiti, col loro enorme accrescimento.

Il parassita nei primi stadi della sua esistenza intraepiteliale si presenta assai piccolo, di forma sferica del diametro medio di 3-5 μ, è poco colorabile coll'ematossilina, ha un protoplasma omogeneo, alquanto rifrangente, e si può osservare qua e là nelle cellule più profonde dell'epidermide. Raggiunge ben presto maggiori dimensioni ed acquista allora la grossezza, ed in generale anche la forma, dei nuclei dell'epidermide del *Discoglossus*, ma non di rado mantiene la figura sferoidale; il suo protoplasma comincia a mostrare dei vacuoli, ma colla colorazione da me adoperata non presenta traccia di nucleo. Si tinge fortemente in azzurro coll'ematossolina, ma si distingue facilmente dai nuclei dell'epitelio perchè non presenta il caratteristico reticolo cromatico, tinto di azzurro scuro dall'ematossilina, spiccante assai bene sul fondo chiaro occupato dal succo nucleare. La cellula epiteliale, entro cui si trova incluso, degenera profondamente, ed il protoplasma alterato di questa in parte si trasforma in un liquido jalino che attornia come un alone chiaro il parassita, in parte rimane come una massa residuale attorno al nucleo, che si presenta come un piccolo corpicciolo colorabile coll'ematossilina, non più contenente il reticolo cromatico, situato in una delle estremità dell'elemento. Questo stato perdura per un certo tempo finchè non si vede più traccia della cellula che dapprima includeva il parassita e questo rimane avvolto fino ai suoi stadi più evoluti da un alone chiaro. Accrescendosi ancora maggiormente, il parassita prende in ogni caso una figura sferica, sferoidale o irregolare a contorni curvilinei, sebbene vi siano pure delle forme che anche quando sono mediocremente sviluppate conservano per lungo tempo una figura bastonciniforme e sono molto cromatofile per l'ematossilina. Allorchè il parassita però ha raggiunto determinate dimensioni, ed in generale allorchè in uno od in entrambi i diametri supera i 15 μ, perde la sua proprietà cromatofila per l'ematossilina ed acquista quella per il carminio litico, sicchè si colora dapprima in viola e le forme maggiori in rosso sempre più vivo. Il suo protoplasma si vacuolizza sempre in grado maggiore. In questo stato subisce generalmente una frammentazione irregolare in masse di forma svariatissima, le quali rimangono però sempre vicine, in modo da mostrare la figura del parassita che le ha originate; esse spesso lasciano fra loro spazî più o meno considerevoli, occupati da liquido jalino, talvolta assai stretti altre volte notevolmente grandi ed irregolari, posti a centro o verso la periferia. Infine, avendo il parassita raggiunto il *maximum* dello sviluppo intraepiteliale, che può giungere a dimensioni veramente considerevoli, come ad es. μ 104 $\times$ μ 64, diviene maturo, perde la sua cromatofilia per il carminio e assume una tinta

violacea pallidissima, la quale si cambia in giallo più o meno leggiero, se si trattano le sezioni per un tempo abbastanza corto (ad es. 5-10 minuti) con acido picrico sciolto in essenza di trementina.

Se si confronta questa forma di parassita del Mollusco contagioso con quelle che già si conoscono, dei Mammiferi e degli Uccelli, si notano le seguenti caratteristiche differenziali:

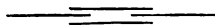
1° Il parassita del Mollusco contagioso dei vertebrati superiori determina un'infezione i cui limiti sono meglio circoscritti di quella degli Anfibi, perchè essa si svolge in un infossamento dell'epidermide, nella cui cavità cadono le forme adulte, mentre negli Anfibi queste si spargono nell'ambiente non appena sono giunte a maturità;

2° Nei vertebrati superiori il parassita determina un'infezione più completa dell'epitelio, perchè quasi tutte le cellule della neoformazione epiteliale sono invase dal parassita, mentre negli Anfibi vi sono molte cellule del nodulo non infette;

3° Il parassita del Mollusco contagioso dei vertebrati superiori, allorchè raggiunge il completo sviluppo, ha dimensioni e forma più costanti di quello degli Anfibi, e ciò probabilmente è dovuto al fatto che i parassiti del Mollusco contagioso dei vertebrati superiori rappresentano specie più evolate e più adatte al parassitismo di quella degli Anfibi. Le dimensioni del parassita adulto dei vertebrati superiori sono molto minori di quelle del parassita del *Discoglossus*; infatti le misure dei corpi del Mollusco contagioso dell'uomo, nei preparati fissati e colorati, danno le seguenti dimensioni medie: $\mu\, 27 \times \mu\, 30$; quelle del piccione $\mu\, 27 \times \mu\, 36$, mentre un gran numero di quelli del *Discoglossus* supera i $70\, \mu$ e non di rado i $100\, \mu$.

CORRISPONDENZA

Il Vicepresidente Blaserna dà comunicazione di un invito dell'Università di Oxford per la celebrazione del terzo centenario della Biblioteca Bodleiana; e l'Accademia delibera di farsi rappresentare alla solenne cerimonia.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 aprile 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Per enunciare sotto forma semplice il problema che tratto nella presente Nota, premetto le definizioni seguenti. Si consideri una superficie S flessibile ed inestendibile. Per ogni deformazione della S cangiano le sue linee assintotiche (reali od immaginarie); diciamo assintotiche *attuali* le effettive assintotiche della S, nella sua configurazione attuale, ed assintotiche *virtuali* ogni sistema di linee di S suscettibili di diventare assintotiche dopo una conveniente deformazione. Come è ben noto, dato un sistema di assintotiche virtuali, la deformazione corrispondente che deve subire la S, per renderle attuali, è pienamente determinata. Ciò premesso, ecco l'enunciato del problema di cui ci vogliamo occupare: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *corrispondenti l'una all'altra punto per punto, in guisa che si corrispondano le loro assintotiche attuali e inoltre a qualsiasi sistema di assintotiche virtuali di* S *corrisponda un sistema di assintotiche virtuali sopra* S_1.

Se una tale coppia di superficie esisterà, è chiaro che ogni deformazione della S trarrà seco una corrispondente deformazione della S_1, cosicchè i due problemi di trovare tutte le superficie applicabili sopra S o quelle applicabili sopra S_1 saranno perfettamente equivalenti. Diremo, per abbreviare, che le due superficie S, S_1 sono *coniugate in deformazione*.

Se le due superficie S, S_1 hanno curvatura positiva, le loro linee assintotiche, attuali o virtuali, sono immaginarie. Volendo anche in questo caso enunciare il problema sotto forma reale, basterà parlare invece della corrispondenza dei *sistemi coniugati* di S a quelli di S_1. Allora, per qualunque deformazione della S, vi ha uno ed un solo sistema attualmente coniugato (sempre reale) che si conserva coniugato dopo la deformazione; lo diremo perciò un sistema coniugato *permanente*. E potremo quindi enunciare il problema sotto l'altra forma: *Trovare le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono per sistemi coniugati, e tali di più che ad ogni sistema coniugato permanente di* S *corrisponda un sistema coniugato permanente sopra* S_1.

Avvi una soluzione ovvia del problema, che trascuriamo nel seguito. Essa si ottiene associando ad una superficie qualunque S una sua omotetica S_1.

2. Per trattare analiticamente il problema enunciato, riferiamo le due superficie supposte S, S_1 ad un sistema di coordinate curvilinee u, v, e siano

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1 dv^2 \tag{1*}$$

le rispettive espressioni dei quadrati dei loro elementi lineari. Ogni deformazione della S è individuata [1] dalla relativa seconda forma quadratica fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 .$$

La nostra ipotesi equivale a dire che deve esistere ogni volta una seconda forma fondamentale corrispondente per S_1

$$D_1 du^2 + 2D'_1\,du\,dv + D''_1\,dv^2 ,$$

tale che sussistano le proporzioni

$$D_1 : D'_1 : D''_1 = D : D' : D''.$$

Pei calcoli seguenti conviene meglio sostituire a D, D', D'' le quantità

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

e analogamente a D_1, D'_1, D''_1:

$$\Delta_1 = \frac{D_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \quad \Delta'_1 = \frac{D'_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \quad \Delta''_1 = \frac{D''_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}.$$

(1) *Lezioni di Geometria differenziale*, cap. IV.

Si sa allora (¹) che $\Delta, \Delta', \Delta''$ sono unicamente vincolate dalla equazione di Gauss

$$\Delta\Delta'' - \Delta'^2 = \mathrm{K}, \tag{2}$$

indicando con K la curvatura totale di S, e dalle due equazioni di Codazzi:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Delta}{\partial v} - \frac{\partial\Delta'}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\Delta'' = 0\\ &\frac{\partial\Delta''}{\partial u} - \frac{\partial\Delta'}{\partial v} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\Delta'' = 0,\end{aligned}\right. \tag{3}$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}$ ecc. essendo costruiti per la prima forma quadratica fondamentale (1) di S.

Si ha per ipotesi

$$\Delta_1 = \lambda\Delta\,, \quad \Delta'_1 = \lambda\Delta'\,, \quad \Delta''_1 = \lambda\Delta''\,,$$

dove λ indica un conveniente fattore di proporzionalità. Intanto dalla corrispondente equazione di Gauss

$$\Delta_1\Delta''_1 - \Delta'^2_1 = \mathrm{K}_1$$

si trae per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = \frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}\,. \tag{4}$$

Questo fattore λ serba dunque invariato il suo valore per qualunque deformazione simultanea di S, S_1.

Ora se scriviamo le equazioni (3) di Codazzi per la S e vi sottragghiamo ordinatamente le (3) stesse moltiplicate per λ, ne deduciamo le due equazioni di condizione

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \Delta'\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta + 2\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1\right]\lambda\Delta' +\\ &\qquad\qquad + \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta'' = 0\\ &\Delta''\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \Delta'\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta + 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1\right]\lambda\Delta' +\\ &\qquad\qquad + \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta'' = 0\,.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Siccome λ non cangia di valore, queste sono equazioni lineari omogenee in $\Delta, \Delta', \Delta''$ che debbono aver luogo, per ipotesi, in tutte le flessioni di S, cioè per tutte le terne di valori di $\Delta, \Delta', \Delta''$ soddisfacenti alle (2), (3).

(¹) *Lezioni* ecc., pag. 90-91.

Segue di qui che le (5) debbono risolversi in identità (¹), ciò che dà luogo alle 6 equazioni di condizione:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1\right], & \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 \\ \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1, & \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1\right] \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1 . \end{cases}$$

Osserviamo che se si supponesse costante λ, ossia costante il rapporto delle due curvature, seguirebbe dalle (6) l'eguaglianza dei valori dei corrispondenti simboli di Christoffel per S, S_1. Ma allora dalle formole (II) a pag. 51 delle Lezioni si deduce subito che saremmo nel caso ovvio escluso di due superficie omotetiche.

3. Paragonando fra loro le (6) delle due prime righe e aggiungendo le formole della terza riga, vediamo intanto che debbono essere soddisfatte le quattro condizioni seguenti:

$$(7)\quad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1 - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1 . \end{cases}$$

Queste hanno un notevole significato geometrico, che si trova ricorrendo alla equazione differenziale delle geodetiche sopra S, scritta sotto la forma a pag. 150 delle Lezioni:

$$(8)\quad v'' - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} v'^3 + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] v'^2 + \left[2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right] v' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Qui è supposta, lungo la geodetica, espressa v in funzione di u, e gli accenti indicano derivazione rapporto a u. Le (7) esprimono che la (8) è la stessa costruita per S o per S_1, e per ciò alle geodetiche di S debbono corrispondere le geodetiche di S_1, o come diciamo per brevità: *la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *deve essere una rappresentazione geodetica.*

Supponiamo ora inversamente che le superficie S, S_1 si corrispondano punto per punto in guisa che siano conservate le linee geodetiche, ed insieme le linee assintotiche attuali, e dimostriamo che a qualunque sistema d'assintotiche virtuali sopra S corrisponderà ancora sopra S_1 un sistema della stessa natura.

(¹) Per la dimostrazione rigorosa v. il § 2 della mia Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di Matematica, Serie 3ª, T. III, 1899).

Indichino infatti Δ_0, Δ'_0, Δ''_0, i valori di Δ, Δ', Δ'' per la configurazione attuale di S. I calcoli del § 2 dimostrano che Δ_0, Δ'_0, Δ''_0, soddisferanno alle (5), avendo λ^2 il valore (4). Ma poichè d'altra parte la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica, sussisteranno le (7) e si avrà quindi

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1$$
$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1.$$

Indicando con A il valore comune delle due prime quantità, con B quello delle due seconde, le equazioni (5) per Δ_0,, Δ'_0, Δ''_0 si scrivono

$$\Delta_0 \mathrm{B} - \Delta'_0 \mathrm{A} = 0, \quad -\Delta'_0 \mathrm{B} + \Delta''_0 \mathrm{A} = 0.$$

Ma siccome il determinante

$$\Delta_0 \Delta''_0 - \Delta'^2_0 = \mathrm{K}$$

non è nullo, risulta di qui $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, cioè sono soddisfatte tutte le (6) e le superficie S, S_1 sono quindi coniugate in deformazione, c. d. d.

Possiamo compendiare i risultati ottenuti nel teorema: *Affinchè sopra due superficie* S, S_1, *che si corrispondono con conservazione delle linee assintotiche attuali, si corrispondano altresì tutte le assintotiche virtuali, è necessario e sufficiente che la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *conservi le linee geodetiche.*

4. Colle considerazioni esposte sopra il problema enunciato viene ridotto alla questione seguente: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono con conservazione delle linee geodetiche e dei sistemi coniugati.*

È ben noto come il problema di trovare le coppie di superficie rappresentabili geodeticamente l'una sull'altra (o meglio i loro ds^2) è stato risoluto dal Dini [1].

L'una e l'altra superficie (escluso il caso ovvio dell'omotetia) debbono appartenere alla classe di Liouville, e più precisamente i due sistemi ortogonali che si conservano nella rappresentazione sono costituiti da due sistemi isotermi di ellissi e di iperbole geodetiche. Qui mi limiterò a trattare il caso particolare in cui la prima e quindi anche la seconda superficie di Liouville sia applicabile sopra una superficie di rotazione, ed il detto sistema isotermo si riduca ai meridiani e paralleli.

Si troverà così una classe effettiva di superficie di rotazione, dipendenti da due costanti arbitrarie, che risolve il nostro problema. Esse possono iden-

[1] *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie sopra un'altra* (Annali di matematica, t. III, 1869). Cf. anche Darboux, *Leçons*, III^e Partie, pag. 47.

tificarsi con quadriche di rotazione (reali od immaginarie), ovvero colle evolute delle superficie applicabili sulla sfera.

Poniamo l'elemento lineare della prima superficie S sotto la forma

$$(a)\quad ds^2 = r^2 (du^2 + dv^2),$$

dove r è funzione della sola u. Risulta allora dalle citate ricerche del Dini (V. § 5 della Memoria) che l'elemento lineare della S_1, rappresentata geodeticamente sopra S, avrà la forma

$$ds_1^2 = \frac{r^2}{b(ar^2+b)^2} du^2 + \frac{r^2 dv^2}{ar^2+b}.$$

Delle due costanti arbitrarie a, b la seconda, limitandoci come intendiamo di fare a superficie ed a rappresentazioni reali, deve essere positiva. Sostituendo alla S_1 una sua omotetica possiamo rendere $b = 1$, senza alterare la generalità; così avremo:

$$(a^*)\qquad ds_1^2 = \frac{r^2}{(ar^2+1)^2} du^2 + \frac{r^2}{ar^2+1} dv^2.$$

Si osservi ora in generale che per un ds^2 della forma

$$ds = \alpha^2 du^2 + \beta^2 dv^2$$

con α, β *funzioni della sola* u, i valori dei simboli di Christoffel sono i seguenti:

$$(9)\qquad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{\alpha'}{\alpha}, & \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\frac{\beta\beta'}{\alpha^2} \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0, & \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\beta'}{\beta}, & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 0, \end{cases}$$

gli accenti indicando derivazione rapporto ad u. I valori di α, β per la S sono

$$\alpha = \beta = r$$

e per la S_1

$$\alpha_1 = \frac{r}{ar^2+1}, \quad \beta_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2+1}}.$$

Si verifica subito colle (9) che le condizioni (7) sono soddisfatte, ciò che doveva essere perchè la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica. Se calcoliamo poi le curvature K, K_1, abbiamo

$$-K = \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{r'}{r}\right)'$$

$$-K_1 = \frac{1}{\alpha_1\beta_1}\left(\frac{\beta_1'}{\alpha_1}\right)' = \frac{1}{r^2}\left\{(ar^2+1)\left(\frac{r'}{r}\right)' - ar'^2\right\},$$

e la (4) ci dà quindi per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = ar^2 + 1 - \frac{ar'^2}{\left(\frac{r'}{r}\right)'}. \tag{10}$$

Ora basta aggiungere p. es., le due seconde (6), che danno

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} \\ &\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 0 , \end{aligned}\right. \tag{11}$$

e soddisfatte queste, insieme alla (10), la rappresentazione di S sopra S_1, quando sieno conformate convenientemente a superficie di rotazione, conserverà altresì le linee assintotiche (o i sistemi coniugati).

Dalle (11) integrando abbiamo

$$\lambda = c\frac{\alpha}{\alpha_1} = c(ar^2 + 1) ,$$

indicando con c una nuova costante arbitraria. Confrontando colla (10), si ha dunque, per determinare r, l'equazione differenziale

$$\left(\frac{r'}{r}\right)' = \frac{ar'^2}{(ar^2+1)[1 - c^2(ar^2+1)]}; \tag{12}$$

tutte le superficie di rotazione che la soddisfano danno altrettante soluzioni del problema.

Per integrare la (12) poniamo

$$\mathrm{T} = \frac{r'}{r},$$

onde si può scrivere

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr} = \frac{a\mathrm{T}r}{(ar^2+1)[1 - c^2(ar^2+1)]}$$

e quindi integrando

$$\mathrm{T}^2 = \frac{ar^2+1}{h[1 - c^2(ar^2+1)]},$$

essendo h una nuova costante. Abbiamo dunque

$$rdu = \sqrt{\frac{h[1 - c^2(ar^2+1)]}{ar^2+1}}\, dr \tag{13}$$

e con una nuova quadratura si avrebbe r in funzione di u. Ma è inutile proseguire l'integrazione, poichè se sostituiamo nella (a) per rdu il valore pre-

cedente, otteniamo già per il ds^2 della superficie S la forma perfettamente determinata:

$$\text{(A)} \qquad ds^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{ar^2 + 1} dr^2 + r^2 dv^2 .$$

Osserviamo che se in questa cangiamo r in kr (k costante) ciò equivale a moltiplicare simultaneamente le costanti a, h per k^2; ne segue che, senza alterare la superficie, possiamo prendere il valore assoluto di una di queste costanti $= 1$.

Le superficie di rotazione (A) che risolvono il problema dipendono dunque, come si era enunciato, da due costanti arbitrarie essenziali. Consideriamo ora la seconda superficie S_1, sulla quale la S, data dalla (A), è rappresentata geodeticamente con conservazione dei sistemi coniugati. Essa avrà per la (a^*) e per la (13) l'elemento lineare

$$ds_1^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{(ar^2 + 1)^3} dr^2 + \frac{r^2}{ar^2 + 1} dv^2.$$

È chiaro *a priori* che questa forma di ds^2 deve rientrare nella (A) stessa, dove soltanto saranno cangiati i valori delle costanti a, c, h. Ed in effetto, se poniamo

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2 + 1}},$$

la precedente diventa:

$$\text{(A*)} \qquad ds_1^2 = \frac{-hc^2\left[1 - \frac{1}{c^2}(1 - ar_1^2)\right]}{1 - ar_1^2} dr_1^2 + r_1^2 dv^2 .$$

Come si vede, è questa la (A) stessa, cangiate a, c, h in

$$\text{(14)} \qquad a_1 = -a , \quad c_1 = \frac{1}{c} , \quad h_1 = -hc^2.$$

5. Prendasi ora di una delle nostre superficie della classe (A) la superficie *complementare* [1] S rispetto alle geodetiche v deformate dei meridiani. Dimostreremo che questa complementare S appartiene alla sua volta alla classe (A).

Quando l'elemento lineare di una superficie S applicabile sopra una perficie di rotazione è posto sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 \quad (r = \varphi(u)),$$

[1] *Lezioni* ecc., pag. 131.

quello della complementare S è dato da

$$\overline{ds}^2 = r^2\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv^2_1,$$

dove

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{dr}{du}\right)} \text{ (}^1\text{)}.$$

Nel caso nostro abbiamo dalla (A)

$$\varrho = \sqrt{\frac{ar^2+1}{h[1-c^2(ar^2+1)]}},$$

e quindi risulta

$$\overline{ds}^2 = \frac{\frac{1}{ac^2}\left[1-c^2\left(1+\frac{\varrho^2}{hc^2}\right)\right]}{1+\frac{\varrho^2}{hc^2}}\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv_1^2.$$

Questa è la forma stessa (A), cangiate a, c, h in

$$\bar{a} = \frac{1}{hc^2}, \quad \bar{c} = c, \quad \bar{h} = \frac{1}{ac^2},$$

ovvero moltiplicando $\bar{a}$, $\bar{h}$ per c^2 (col cangiare ϱ in $c\varrho$):

$$\bar{a} = \frac{1}{h}, \quad \bar{c} = c, \quad \bar{h} = \frac{1}{a}. \tag{5}$$

Se si confrontano le (14), (15) si vede subito che le operazioni rappretate da queste formole sono fra loro permutabili. Ed il significato geometrico di questo fatto sta in ciò che prendendo delle due superficie S, S_1 della classe (A), coniugate in deformazione, le rispettive complementari S, $\overline{S}_1$, queste sono nuovamente coniugate fra loro in deformazione. Per convincersene basta ricordare che sopra S, $\overline{S}$, come sopra S_1, $\overline{S}_1$, si corrispondono le assintotiche e per ciò intanto quelle di $\overline{S}$, $\overline{S}_1$. In secondo luogo si corrispondono sopra $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ le deformate dei paralleli ed egualmente le deformate dei meridiani, poichè queste corrispondono a quelle linee di S, S_1 che sono a tangenti coniugate colle rispettive deformate dei meridiani. Abbiamo dunque il teorema: *Se due superficie applicabili sopra superficie di rotazione si corrispondono geodeticamente e per sistemi coniugati, lo stesso accade delle loro due complementari.*

6. Un caso particolare notevole di coppie di superficie S, S_1 della classe (A) coniugate in deformazione si ottiene supponendo la costante $c = 1$;

(1) Veggasi la seconda edizione delle mie *Lezioni*, vol. I, pag. 296.

allora la (A) diventa

$$ds^2 = \frac{-ahr^2}{ar^2+1}\,dr^2 + r^2 dv^2 .$$

Le due costanti a, h debbono qui avere segno contrario e senza alterare la generalità potremo fare

$$\alpha)\quad a = -1, \quad h = \mathrm{R}^2$$

ovvero

$$\beta)\quad a = +1, \quad h = -\mathrm{R}^2.$$

Così ponendo

$$u = \sqrt{1 \pm r^2},$$

avremo nel primo caso

$$\alpha^*)\quad ds^2 = \mathrm{R}^2 \{du^2 + (u^2 - 1)\,dv^2\}$$

e nel secondo

$$\beta^*)\quad ds^2 = \mathrm{R}^2 \{du^2 + (1 - u^2)\,dv^2\}.$$

L' uno e l'altro elemento lineare appartengono ad una falda dell' evoluta di una superficie a curvatura costante positiva $= \frac{1}{\mathrm{R}^2}$, o, ciò che è lo stesso pel teorema di Bonnet, di una superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{\mathrm{R}}$.

Applicando i risultati sopra ottenuti, avremo due coppie $(S, \bar{S})$, $(S_1, \bar{S}_1)$ di tali superficie, ciascuna coppia formando l' evoluta completa di una superficie a curvatura media costante. In quale relazione fra loro stanno le due evolventi Σ, Σ_1 a curvatura media costante? Senza entrare qui nei calcoli relativi, diciamo che la Σ, Σ_1 son legate dalla trasformazione involutoria di Hazzidakis [1], cioè Σ, Σ_1 sono applicabili l' una sull' altra con conservazione delle linee di curvatura ed inversione dei raggi principali di curvatura. Inversamente siano Σ, Σ_1 due superficie a curvatura media costante, trasformate l' una dell' altra per trasformazione di Hazzidakis, e siano $(S, \bar{S})$ le due falde della evoluta di Σ e $(S_1, \bar{S}_1)$ quelle di Σ_1. *Sopra due falde omologhe* S, S_1, *ovvero* $\bar{S}$, $\bar{S}_1$, *si corrisponderanno non solo i sistemi coniugati, ma anche le linee geodetiche.* Questa proprietà della trasformazione di Hazzidakis non sembra sia stata fin qui osservata.

7. Lasciando ora da parte il caso $c = 1$, già sopra considerato, proponiamoci di trovare la forma della curva meridiana per la superficie di rota- (A). Sia

$$z = \Psi(\varrho)$$

l' equazione del meridiano, l' asse di rotazione essendo l' asse delle z ed indicando ϱ il raggio del parallelo. Per determinare $\Psi(\varrho)$ dobbiamo identificare la (A) con

$$ds^2 = \left(1 + \Psi'^2(\varrho)\right)d\varrho^2 + \lambda^2 \varrho^2 dv^2,$$

[1] *Lezioni*, pag. 447.

ponendo $r = \lambda\varrho$ (λ costante). Ne deduciamo

$$\psi'^2(\varrho) = \frac{[\lambda^2 h - (1 + \lambda^2 c^2 h)] - a\lambda^2 \varrho^2 (1 + \lambda^2 c^2 h)}{a\lambda^2 \varrho^2 + 1},$$

e se disponiamo di λ in guisa da annullare nel numeratore del secondo membro il termine indipendente da ϱ, avremo per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = \frac{1}{h(1 - c^2)},$$

che è finito essendo qui $c^2 \neq 1$.

Integrando abbiamo allora

$$z = \psi(\varrho) = \sqrt{-\frac{h}{a}}\,\sqrt{a\lambda^2 \varrho^2 + 1},$$

onde per la superficie di rotazione (A), quando $c^2 \neq 1$, si può prendere una quadrica, che sarà del resto reale od immaginaria a seconda dei valori delle costanti.

Arrestandoci al caso reale, dovrà essere

$$h(1 - c^2) > 0$$

e le costanti a, h dovranno avere segno contrario. Se supponiamo dapprima a negativa, h positiva, potremo fare senza nuocere alla generalità

$$a = -1, \quad h = k^2, \quad \lambda^2 = \frac{1}{k^2(1 - c^2)}$$

e la costante c^2 dovrà essere naturalmente < 1. La curva meridiana è quindi l' ellisse

$$\frac{z^2}{k^2} + \frac{\varrho^2}{k^2(1 - c^2)} = 1$$

e la quadrica è un ellissoide di rotazione allungato, i cui semi-assi principale e secondario hanno le lunghezze

$$\mathrm{A} = k, \quad \mathrm{B} = k\sqrt{1 - c^2}.$$

Per ottenere l' altra quadrica di rotazione reale basta passare dall' attuale superficie S alla coniugata S_1 in deformazione, ciò che dà per le (14)

$$a_1 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{c}, \quad h_1 = -k^2 c^2.$$

La curva meridiana ha per equazione

$$\frac{z^2}{k^2} - \frac{\varrho^2}{k^2\left(\frac{1}{c^2} - 1\right)} = 1;$$

la quadrica è adunque un iperboloide di rotazione a due falde che ha per lunghezza A, C dei semi-assi principale e secondario

$$A = k, \quad C = k\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$$

Effettivamente è facile accertarsi che fra i punti dell'ellissoide e dell'iperboloide col medesimo semi-asse principale $= A$ e coi semi-assi secondarî B, C legati dalla relazione

$$\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} = \frac{1}{A^2}$$

si può stabilire una corrispondenza geodetica che conservi i sistemi coniugati.

Queste due quadriche sono dunque coniugate in deformazione.

Siano ora S, S_1 due loro rispettive deformate simultanee. I teoremi di Guichard ci insegnano che se si fa rotolare l'ellissoide sulla superficie applicabile S o l'iperboloide sulla superficie applicabile S_1, ogni volta ciascun fuoco descriverà una superficie di curvatura media costante $= \frac{1}{A}$. Due tali superficie Σ, Σ_1 a curvatura media costante sono nuovamente trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Hazzidakis.

A queste proprietà dell'ellissoide ed iperboloide di Guichard coniugati in deformazione ero già in parte pervenuto nella Memoria citata sopra (§ 22), ed è appunto lo studio di queste proprietà che mi ha indotto a trattare il problema generale che forma l'oggetto di questa Nota.

Astronomia. — *Osservazioni del nuovo pianetino HU 1902 fatte coll'equatoriale di 38 cm.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Le osservazioni furono fatte per mezzo del nuovo oggettivo di 38 cm. di apertura libera, donato all'osservatorio dal comm. Enrico Santoro, della cui munificenza è ben memore anche la nostra Accademia. Il dono derivò dai buoni uffici del prof. Tacchini.

L'oggettivo fu costruito dalla celebre casa Steinheil di Monaco ed è riuscito eccellente; esso potrà in avvenire rendere servigi alla scienza. Anche gli oculari vennero commessi alla medesima casa con piena mia soddisfazione. La rigorosa distanza focale è m. 5,248, e però un giro della vite del micrometro filare di Merz, che apparteneva all'antico oggettivo, mi risultò, da numerose osservazioni colla Polare e colle Plejadi (Cat. fot. Jacoby), di

12″ 748

Il pianetino HU è l'ultimo trovato colla fotografia dal dott. Carnera ad Heidelberg il 10 marzo decorso. Di 480 pianeti possediamo fino ad oggi elementi ellittici, e di 50 circa abbiamo o elementi circolari, o così scarse e vicine osservazioni da dover considerarli come perduti o quasi perduti.

Pianetino HU.		Grandezza 12,2	
1902 marzo 29		$9^h\ 24^m\ 15^s$	R. C. R.
α apparente pianeta		$11^h\ 11^m\ 22,^s,56$	$(9^n.186)$
δ " "	+	$3^\circ\ 55'\ 38''\ 0$	(0. 733)
1902 aprile 3		$9^h\ 53^m\ 44^s$	R. C. R.
α apparente pianeta		$11^h\ 8^m\ 50,^s,89$	$(8^n.759)$
δ " "	+	$4^\circ\ 32'\ 44''.1$	(0, 725).

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota III del Socio G. CIAMICIAN e di P. SILBER.

Le esperienze che descriviamo nel presente lavoro formano la continuazione di quelle menzionate nella nostra ultima pubblicazione (1) intorno a questo argomento e trattano però ancora delle trasformazioni che la luce determina nei corpi che contengono il residuo dell'acido nitrico o quello dell'acido nitroso.

Nitrobenzolo ed alcool assoluto.

La reazione che avviene per azione della luce fra il nitrobenzolo e l'alcool etilico non è stata ancora studiata in modo esauriente e però nella citata nostra recente pubblicazione abbiamo detto che su questo argomento saremmo ritornati fra breve. Noto era fin ora che, assieme ad altre sostanze, dal nitrobenzolo per azione dell'alcool si forma anilina ed aldeide acetica ed era però nostro compito di scoprire la natura degli altri corpi che si producono assieme all'anilina.

Ripetendo le prove in più larga scala ed impiegando alcool assoluto in luogo di quello acquoso, usato nella nostra vecchia esperienza di Roma, forse per quest'ultima circostanza (2), abbiamo avuto un risultato alquanto diverso. Il rendimento in prodotti basici fu migliore, ma non abbiamo potuto riscontrare la presenza di aldeide acetica. I prodotti alcalini sono costituiti prevalentemente da *chinaldina*, l'*anilina* non manca, ma si forma in quantità più piccola ed è accompagnata da altre basi che fin ora non abbiamo potuto determinare. La reazione come si vede è complicata, e però sarà necessario studiarla nuovamente su scala anche maggiore.

Alla luce vennero esposti, durante tutto l'estate, complessivamente 60 gr. di nitrobenzolo in 200 c. c. di alcool assoluto. La soluzione diventa

(1) Questi Rendiconti X, 228 (aprile 1901).

(2) Anche su ciò sarà necessario ritornare con nuove esperienze.

bruna; distillando l'alcool a b. m. non abbiamo potuto scoprire in questo la presenza d'aldeide acetica. Al residuo venne aggiunto acido cloridico e la distillazione proseguita in corrente di vapore acqueo. Così passa tutto il nitrobenzolo rimasto inalterato. Trattando con soda in eccesso e distillando nuovamente si ottengono le basi, mentre resta in dietro nel pallone alquanta resina nera e friabile. Il distillato venne portato a secco con acido cloridrico. Il rendimento fu il seguente: 50 gr. di nitrobenzolo riottenuto e 6,6 gr. di cloridrati.

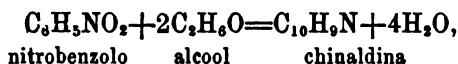
La separazione della *chinaldina* riesce assai bene coll'acido cloroplatinico. Aggiungendo alla soluzione del miscuglio dei cloridrati, alquanto concentrata, una soluzione concentrata di cloruro di platino, precipita quasi tutta la chinaldina. Il cloroplatinato si purifica assai facilmente dall'acqua bollente, da cui si ebbe in aghi lunghi rossoranciati del punto di fusione 229°. I punti di fusione dei sali anche più caratteristici e comuni delle basi chinoliniche mancano quasi sempre nella letteratura. Per il cloroplatinato di chinaldina gli autori danno il punto di fusione 226° (1), ma questo dato non bastava ad accertare la natura della nostra base. Noi abbiamo preparato però dalla chinaldina pura, ottenuta col metodo ordinario, il cloroplatinato ed il cloroaurato, ed abbiamo trovato per questi due sali rispettivamente i punti di fusione 229° e 155°. Abbiamo poi trasformato parte del nostro cloroplatinato in cloroaurato ed abbiamo trovato che questo fondeva pure a 155°. I corrispondenti sali della lepidina fondono rispettivamente a 225°-226° ed a 191°-192°. La base da noi ottenuta è quindi la chinaldina.

La separazione dell'*anilina* non fu così facile per la piccola quantità di prodotto di cui disponevamo e per la presenza di altre sostanze.

Abbiamo però creduto conveniente di trasformare tutta la base non precipitata col cloruro di platino in composto acetilico allo scopo di separare l'anilina allo stato di acetanilide. Ottenemmo così realmente per ebollizione dell'alcaloide con anidride acetica un prodotto cristallino, ma esso non era formato soltanto dall'anilide acetica. Per ripetute cristallizzazioni dall'acqua bollente, abbiamo potuto separare un composto meno solubile, dal punto di fusione 174°-175°, in quantità non sufficiente per un'esauriente esame. La parte più solubile fonde a 112° ed è realmente *acetanilide*. Essa ci dette, per svaporamento con acido solforico, il solfato d'anilina che abbiamo riconosciuto alla reazione col bicromato potassico; per ultimo l'abbiamo trasformato in fenolo con nitrito sodico, da cui abbiamo preparato il tribromofenolo dal punto di fusione 94°. Le acque madri, da cui si separarono i derivati acetilici ora menzionati, contengono in assai piccola quantità un'altra base non acetilabile, e però probabilmente terziaria, diversa dalla chinaldina; essa ci dette un picrato che fondeva a 168°-169°.

(1) Beilstein IV, pag. 307.

La reazione che avviene fra il nitrobenzolo e l'alcool non si presta ad essere riassunta in una sola equazione, si potrebbe ammettere che la trasformazione principale fosse da esprimersi nel seguente modo:

$$\underset{\text{nitrobenzolo}}{C_6H_5NO_2} + \underset{\text{alcool}}{2C_2H_6O} = \underset{\text{chinaldina}}{C_{10}H_9N} + 4H_2O,$$

ma naturalmente con ciò non si terrebbe conto dell'anilina e delle altre basi che si formano in piccola quantità. Forse queste ultime potranno dare qualche schiarimento intorno all'andamento generale del fenomeno. Inoltre è da osservarsi che il nitrobenzolo ricuperato contiene piccole quantità di un composto aldeidico, che pel suo odore ricorda i prodotti di condensazione dell'aldeide. Può darsi però che i primi prodotti, che si formano dalla coppia nitrobenzolo ed alcool, sieno anilina ed aldeide acetica, che questa si condensi ed entri in reazione coll'anilina per dare la chinaldina e le altre basi non ancora determinate. Comunque sia da interpretarsi il complicato processo, rimane assodato che la sintesi dello Skraup, che ebbe una si alta importanza per lo sviluppo di un importante capitolo della chimica organica, è una reazione che si compie spontaneamente, anche senza l'intervento di catalizzatori energici quali sono gli acidi minerali.

Nitrotoluoli ed alcool assoluto.

Il contegno dei nitrotoluoli corrisponde a quello del nitrobenzolo, noi li abbiamo esperimentati tutti e tre ed abbiamo trovato che il miglior rendimento in prodotti basici, lo si ha col *metanitrotoluolo*. Gli altri due dettero quantità di basi così esigue da non permettere uno studio ulteriore; si può tuttavia ritenere accertato che l'andamento della reazione in tutti e tre i casi è qualitativamente lo stesso: si formano le corrispondenti metilchinaldine assieme alle toluidine.

Noi abbiamo esposto alla luce durante tutto il periodo estivo 10 gr. di ciascuno dei tre nitrotoluoli sciolti sempre in 50 c. c. d'alcool assoluto. Il trattamento successivo corrisponde perfettamente a quello ora descritto pel nitrobenzolo e non ha bisogno d'essere qui riportato. Il rendimento fu il seguente: dal m-nitrotoluolo si ebbero 1,1 gr. di cloridrato (cioè circa il 10 $^0/_0$ come dal nitrobenzolo), dagli altri due invece appena la metà cioè soltanto 0,5 gr. di cloridrato. In tutti e tre i casi, l'alcool distillato non conteneva aldeide acetica.

Le basi che abbiamo potuto riconoscere fra le sostanze provenienti dal *m-nitrotoluolo* furono la corrispondente *metilchinaldina* e la *m-toluidina*.

La prima venne separata facilmente allo stato di cloroplatinato, che si scompone verso i 260° (incominciando ad annerire verso i 230°), e che si mostrò identico al prodotto ottenuto dalla m-toluidina con paraldeide ed

acido cloridrico (1). La m- toluidina si ricavò dalle acque madri, e la si riconobbe alla colorazione rossa che l'acido nitrico produce nella sua soluzione solforica ed alla colorazione rosea che si ottiene col cloruro di calce e la soluzione eterea della base libera (2).

Contegno di alcuni altri nitroderivati aromatici in soluzione alcoolica.

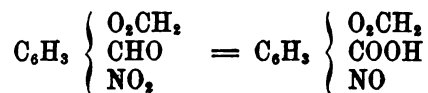
La reazione che si compie fra il nitrobenzolo ed i nitrotoluoli e l'alcool non sembra possedere carattere generale, almeno finora non abbiamo trovato altre sostanze contenenti il residuo dell'acido nitrico suscettibili a dare l'analoga trasformazione.

Noi abbiamo, sempre nelle stesse condizioni, sperimentato con le seguenti sostanze: l'*ortodinitrobenzolo* ed il *metadinitrobenzolo* le *tre nitraniline* e la *nitronaftalina* ed in tutti questi casi, come l'anno scorso coll'*acido picrico*, non siamo stati in grado di ottenere quantità apprezzabili di prodotti basici.

Si formano sempre piccole quantità di materie coloranti brune, ma il prodotto impiegato resta inalterato quasi per intero. Se avviene riduzione o altra trasformazione, questa deve compiersi con tale lentezza da sottrarsi alla osservazione.

Contegno dell'o-nitropiperonalio.

Il nostro amico prof. Angeli ci fece notare che l'o-nitropiperonalio, come l'aldeide o-nitrobenzoica, non dà la sua bella ed importante reazione colla nitroidrossilammina e ci invitò a studiare il comportamento alla luce dell'aldeide o-nitropiperonilica per vedere se esso fosse analogo a quello dell'aldeide o-nitrobenzoica. Lo è realmente: l'o-nitropiperonalio per azione della luce si trasforma in *acido o-nitrosopiperonilico:*

$$C_6H_3 \left\{ \begin{array}{l} O_2CH_2 \\ CHO \\ NO_2 \end{array} \right. = C_6H_3 \left\{ \begin{array}{l} O_2CH_2 \\ COOH \\ NO \end{array} \right.$$

ed anche qui, come coll'aldeide o-nitrobenzoica, la reazione avviene senza intervento di altre sostanze. Noi l'abbiamo studiata in soluzione benzolica, ma essa può compiersi anche in altri solventi. Impiegando l'alcool metilico od etilico si otterranno senza dubbio i corrispondenti eteri composti, come coll'aldeide o-nitrobenzoica, ma coll'o-nitropiperonalio la purificazione di queste sostanze riesce meno facilmente perchè si producono materie brune e

(1) Beilstein, IV, 329.
(2) Ibid. II, 474.

resinose. Noi ci siamo limitati per queste ragioni allo studio dell'acido nitrosopiperonilico.

Esponendo alla luce una soluzione di o-nitropiperonalio in benzolo (2 gr. in 50 c. c.), il liquido leggermente colorato in giallo, dopo breve tempo si colora in verde e dopo un giorno (l'esperienza venne fatta in dicembre) incomincia la separazione di cristalli gialli, che aderiscono alle pareti del tubo. Mentre aumenta la separazione dell'acido, il liquido va perdendo il suo colore verde e tende ad imbrunire. Non è conveniente attendere che la trasformazione sia completa, perchè l'acido nitrosopiperonilico, a differenza del nitrosobenzoico, si altera facilmente e, rimanendo a lungo esposto alla luce, diventa bruno. Per purificare il prodotto, si versa la parte liquida e si fa cristallizzare dall'etere acetico la parte solida, che aderisce alle pareti del tubo. L'acido o-nitrosopiperonilico si presenta in forma di piccoli aghetti gialli, riuniti in mammelloncini, che fondono scomponendosi fra i 160° e 165°.

È assai probabile che anche altre aldeidi aromatiche, che contengono il residuo nitrico in prossimità del gruppo aldeidico, subiscono alla luce una trasformazione simile a quella dell'aldeide o-nitrobenzoica ed o-nitropiperonilica. Sembra però che se il radicale aldeidico si trova in una catena laterale, quello nitrico non ha su di esso più alcuna influenza, perchè ad es. l'aldeide o-nitrocinnamica resta inalterata alla luce o per lo meno si modifica lentamente in altro senso.

Comportamento dell'acido o-nitrosobenzoico e dei suoi eteri composti.

Nella nostra pubblicazione dello scorso aprile [1] abbiamo fatto notare che se si lascia esposta alla luce per molto tempo l'aldeide o-nitrobenzoica in soluzione alcoolica, i cristalli di etere nitrosobenzoico, che si separano da principio, si vanno ridisciogliendo, perchè si formano altri prodotti. Su questa ulteriore trasformazione dell'acido nitrosobenzoico e dei suoi eteri siamo ora in grado di dare ulteriori schiarimenti.

Anzitutto vogliamo dire che l'acido o-nitrosobenzoico in soluzione benzolica resta quasi completamente inalterato anche se esposto alla luce per tutto il periodo estivo. Da 2 gr. di aldeide o-nitrobenzoica, sciolta in 10 c.c. di benzolo, abbiamo ottenuto, dopo nove mesi di insolazione, 1,85 gr. di acido nitrosobenzoico. Il resto era formato da materia resinosa nerastra. In soluzione alcoolica, metilica o etilica, la cosa è invece assai diversa, e tanto partendo direttamente dall'aldeide nitrobenzoica, che dall'etere (etilico) nitrosobenzoico, si ottiene una soluzione intensamente colorata in bruno rossastro, che contiene un'assai complicato miscuglio di sostanze. Noi abbiamo studiato

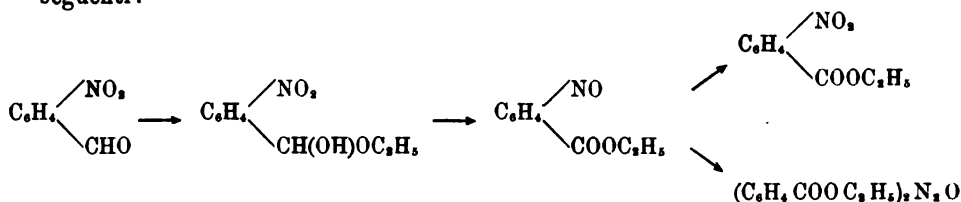
(1) L. c.

segnatamente i prodotti che si ottengono dalla soluzione di aldeide o-nitrobenzoica in alcool etilico, ma anche in questo caso non siamo certamente riusciti a determinare tutti i composti formatisi. L'alcool non sembra prendere parte alla reazione perchè non si formano quantità sensibili di aldeide; le sostanze che abbiamo potuto riconoscere sono le seguenti: l'*etere dietilico dell'acido azossibenzoldicarbonico* e l'*etere dell'acido nitrobenzoico*, inoltre poi l'*acido azossibenzoldicarbonico* e probabilmente anche piccole tracce di *etere antranilico*.

Quantitativamente predominano i due primi, il terzo si forma un po' più scarsamente; ma oltre a questi corpi si ottiene in notevole quantità una materia resinosa e sciropposa non determinabile.

Questa scomposizione dell'etere dell'acido o-nitrosobenzoico in soluzione alcoolica presenta la più grande analogia con quella del nitrosobenzolo colla liscivia di soda studiata assai accuratamente da Bamberger [1]. Egli ottenne, assieme a molte altre sostanze, prevalentemente azossibenzolo e nitrobenzolo. Come egli fa giustamente osservare, si tratta qui di un processo di reciproca riduzione ed ossidazione e secondo tutte l'esperienze che abbiamo fatto fin ora, sono appunto questi i processi che la luce favorisce.

Le trasformazioni principali che si compiono dall'o- nitrobenzaldeide in *soluzione alcoolica* per azione prolungata della luce, sarebbero dunque le seguenti:

$$C_6H_4\begin{cases}NO_2\\CHO\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}NO_2\\CH(OH)OC_2H_5\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}NO\\COOC_2H_5\end{cases} \begin{matrix}\nearrow C_6H_4\begin{cases}NO_2\\COOC_2H_5\end{cases}\\ \searrow (C_6H_4\,COO\,C_2H_5)_2N_2O\end{matrix}$$

Ma oltre ai prodotti principali qui accennati, assai probabilmente molti altri se ne formeranno, come insegna lo studio fatto dal Bamberger sul contegno del nitrosobenzolo. L'alcool, si vede, esercita un'azione catalitica analoga a quella della soda caustica, ma mentre il primo a freddo ed all'oscurità sarebbe un debolissimo catalizzatore, l'azione della luce ne accresce l'attività. Molto probabilmente lo farà anche la temperatura. Per avere completo il quadro bisognerebbe studiare l'azione dell'alcool sul nitrobenzolo alla luce e quello degli alcali sull'acido nitrosobenzoico.

Noi abbiamo lasciato esposto alla luce per tutta l'estate un tubo contenente 10 gr. di o-nitrobenzaldeide sciolti in 100 c.c. d'alcool assoluto. I cristalli che si formano da principio, come s'è detto, a poco a poco si vanno ridisciogliendo mentre il liquido prende un colore rossastro sempre più cupo; alla fine diventa quasi nero, ma i cristalli dell'etere nitrosobenzoico, colla

[1] Berichte 33, 1939 (1900).

concentrazione impiegata, non si sciolgono completamente; la parte dell'etere rimasta inalterata era di 1,9 gr. Distillando l'alcool, che non contiene quantità apprezzabili d'aldeide, resta indietro uno sciroppo rossobruno, che, a poco a poco, in parte si solidifica (8,5 gr.). Esso venne estratto a caldo successivamente con etere petrolico e con benzolo.

La parte solubile nell'etere petrolico è un olio intensamente colorato in rosso, in cui si vanno formando dei cristalli. Questi vennero liberati con carbonato sodico da una piccola quantità di una materia acida, che non abbiamo potuto ottenere in quantità sufficiente per essere riconosciuta, e poi purificati dall'etere petrolico. Si presentano in forma di prismi ramificati, lievemente colorati in carnicino, che fondono a 81-82°. Essi hanno la composizione dell'*etere dietilico dell'acido o-azossibenzoldicarbonico* (oppure *o- azossibenzoico*) e sebbene questo etere non sia stato ancora descritto, non v'ha dubbio che tale debba essere la loro costituzione. La parte oleosa dell'estratto coll'etere petrolico, venne distillata a pressione ridotta e passò a 17 mm. a 155-160°. Malgrado la distillazione l'olio mantiene un intenso colore rosso, che è dovuto ad una impurità, perchè esso è formato prevalentemente dall'*etere etilico dell'acido o-nitrobenzoico* e da piccole quantità di *etere etilico dell'acido o-amidobenzoico*. Trattando la soluzione eterea del prodotto con acido cloridrico gassoso, quest'ultimo si separa in forma di cloridrato. La quantità di materia ottenuta non era tale da potere essere analizzata, ma crediamo di non andare errati affermando che fra i prodotti di trasformazione dell'etere nitrosobenzoico si trovi anche l'etere antranilico. Esso corrisponderebbe all'anilina, che Bamberger ebbe, pure in quantità piccola, dal nitrosobenzolo. L'etere etilico dell' acido o-nitrobenzoico fonde a 30° [1], ma a noi sembrò più conveniente di passare all'acido ed analizzare quest'ultimo. L'abbiamo ottenuto dall'etere per idrolisi con acido cloridrico e purificato dall'acqua bollente. L'acido o- nitrobenzoico ricavato in quantità relativamente cospicua, fondeva a 148° in corrispondenza con Widmann, che trovò 147°.

La parte del prodotto solubile nel benzolo è formata da una materia bruna resinosa da cui non abbiamo potuto ottenere sostanze cristallizzate.

Finalmente il residuo insolubile nell'etere petrolico e nel benzolo costituisce una materia solida grigiastra, da cui per trattamento con alcool metilico e nero animale, abbiamo potuto ottenere una sostanza cristallizzata in in tavolette appena leggermente colorate in giallo, che fondono con decomposizione a 248°. Essa ha la composizione dell'*acido o-azossibenzoldicarbonico*, a cui corrisponde per tutte le sue proprietà [2]. La formazione di

(1) Balstein 2, 1230.

(2) L'acido o- azossibenzoldicarbonico (oppure o-azossibenzoico) (Beilstein, IV, 1343) è descritto da Armaschewsky come una sostanza cristallizzata in tavole colorate in *giallo*

questo acido è dovuta senza dubbio all'acido o-nitrosobenzoico, che si produce sempre assieme al suo etere etilico, in quantità più o meno grande, quale prodotto primario d'insolazione dell'aldeide o-nitrobenzoica, anche in soluzione alcoolica. Dopo quanto s'è detto, si sarebbe potuto aspettarsi di riscontrare fra i prodotti di ulteriore trasformazione, anche l'acido o-nitrobenzoico; ma questo sembra mancare, e però bisogna ammettere che l'acido nitrosobenzoico riducendosi ad acido azossibenzoico ceda parte del suo ossigeno all'etere nitrosobenzoico per dare l'etere nitrobenzoico, che è realmente dopo la resina il prodotto che si forma in quantità maggiore.

Anatomia. — *Sopra gli organi renali delle Salpidi.* Nota del Socio TODARO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Micro-fotografie di fibre muscolari a luce semplice e polarizzata, allo stato di riposo e di contrazione.* Nota del Socio straniero TH. W. ENGELMANN.

Prego l'Accademia dei Lincei di accettare alcune *micro-fotografie di fibre muscolari*, che mi sembrano essere non senza valore, perchè dimostrano alcuni fatti importanti per la dottrina della contrazione muscolare.

Le fibre muscolari volontarie o striate sono composte principalmente da fibrille tenuissime, che nella contrazione si raccorciano senza cambiamento di volume. In ciascuna di queste fibrille si può distinguere, regolarmente alternantisi, due sorta di segmenti: isotropi o monorifrangenti, e anisotropi o birifrangenti. Esistono anche altre differenze fisiche, chimiche e morfologiche fra i due. Nella sostanza isotropa si distinguono p. e. ancora quattro differenti sostanze.

La fotografia N. I mostra questa struttura complicata, come si presenta in luce ordinaria al microscopio, in una fibra muscolare di uno scarabeo allo stato di riposo.

La figura N. II mostra la stessa fibra; a sinistra in luce ordinaria, a destra in luce polarizzata. Si vede che gli strati di sostanza isotropa sono molto più alti che le strie birifrangenti. Ciò vuol dire che allo stato di riposo la più gran parte del volume delle fibrille muscolari è isotropa.

---

bruno, che fonderebbero secondo Homolka a 237-242°. Noi abbiamo preparato il composto secondo le indicazioni di Pietro Griess (Berichte 7, 1611) dell'acido o-nitrobenzoico, e l'abbiamo ottenuto con proprietà perfettamente identiche a quelle sopraindicate.

Ma questo cambia durante la contrazione. Quanto più la fibra si accorcia, tanto più il volume della sostanza anisotropa (V_a) aumenta e diminuisce il volume della sostanza isotropa (V_i). Il volume totale delle due sostanze resta lo stesso.

Questi fatti fondamentali sono illustrati dalla fotografia N. III. Essa mostra una fibra muscolare dello scarabeo *Chrysomela coerulea* che contiene un'onda di contrazione. A destra si vede l'immagine a luce polarizzata (fra due prismi di Nicol incrociati), a sinistra a luce ordinaria.

Il rapporto V_i/V_a, che nello stato di riposo ha un valore di 1,5 a 2,0, diminuisce fino a 0,3 e anche meno nello stato di contrazione massima.

A un certo raccorciamento corrisponde sempre un medesimo valore del detto rapporto.

La fotografia N. IV mostra una fibra in contrazione molto avanzata. Il rapporto volumetrico anzi detto è circa 0,3. Ma si vede ancora un altro fatto importante, cioè: il potere rifrangente della sostanza anisotropa è molto meno grande che quello della sostanza isotropa. Nello stato di riposo ha luogo il contrario, come mostrano le fotografie N. I e II.

Si può provare che durante la contrazione la sostanza anisotropa, in misura dell'aumento di volume e della diminuzione del potere rifrangente, diviene più molle e più estensibile, mentre che la sostanza isotropa diviene più dura e meno estensibile.

Queste alterazioni di volume, di potere rifrangente, di solidità e di estensibilità opposte nelle due sostanze, si spiegano colla ipotesi, che nella contrazione ha luogo un passaggio di acqua dalla sostanza isotropa nella sostanza anisotropa. La sostanza anisotropa si gonfia per imbibizione d'acqua, sostratta alla sostanza isotropa.

La fotografia N. V, infine, mostra che le alterazioni ora descritte, s'iniziano nelle terminazioni nervose. Si vede una *collina nervosa* (N) da cui parte un'onda di contrazione. La contrazione è la più avanzata immediatamente sotto la collina nervosa, e va degradando dal margine sinistro al margine destro della fibra (*contrazione laterale*).

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano*. Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio VOLTERRA.

Matematica. — *Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno*. Nota del dott. I. BOGGIO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Le deformazioni del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Fisica. — *Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua.* Nota preventiva di A. Marcacci, presentata dal Socio Luciani.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull' influenza di basse temperature sulla variazione di resistenza del selenio per effetto della luce.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Socio Blaserna.

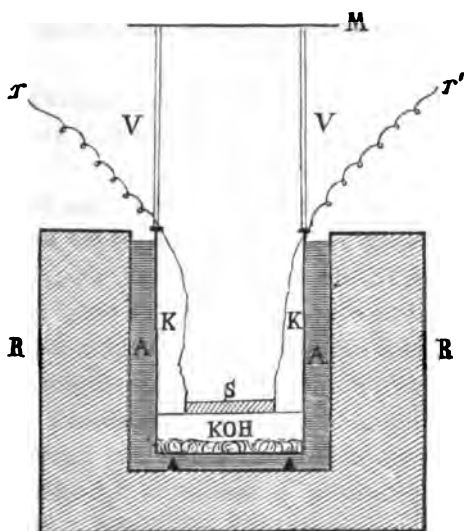
È da tempo (1) noto che uno strato di selenio, quando sia stato sottoposto ad uno speciale trattamento (2), gode della proprietà che la sua resistenza elettrica diminuisce notevolmente se esso viene colpito da un raggio di luce.

Le spiegazioni che sogliono darsi di questo abbassamento di resistenza per effetto della luce sono varie: Siemens (3) crede che questa specie di selenio che presenta la notevole proprietà sia costituita da un miscuglio di due modificazioni allotropiche, una conduttrice metallicamente, l'altra cristallina e che l'azione della luce consista in una trasformazione di quest'ultima modificazione, ancora sussistente, nella prima. Hesehus (4) ammette pure il miscuglio di due modificazioni, ma crede che la luce ne dissoci una e questa allora conduca meglio l'elettricità. Bidwell (5) ed altri, notando che il selenio puro non conduce e che d'altra parte il trattamento per rendere sensibili alla luce i preparati di selenio necessita il portare dei metalli in contatto con questo, credono che la conducibilità del selenio sia da ascriversi al fatto che in esso ordinariamente si trovano impurità metalliche e che la luce renda possibile la formazione di seleniuri metallici conduttori.

(1) Sill. Journ. 5, 1873, pag. 301.
(2) Beibl. 5, pag. 316.
(3) Pogg. Ann. 159, pag. 117.
(4) J. de la Soc. phys. chim. russe, 1884, pag. 146.
(5) Phil. Mag. (5), 20, pag. 178, 1885.

Più complicate ancora sono le teorie di Uljanin (1) e di Kalischer (2) che tendono a spiegare oltre questo fenomeno anche il comportamento del selenio esposto alla luce rispetto ad altri fenomeni.

Ho pensato che avrebbe potuto essere di qualche interesse pel decidere fra queste varie teorie, il vedere come questo fenomeno si comportasse a basse temperature come quella d'ebollizione dell'aria liquida, alla quale, per esempio, la quasi totalità delle reazioni chimiche non avvengono più, e che in ogni modo la ricerca avrebbe anche di per sè presentato qualche interesse.

A tale scopo mi sono fatto costruire dal noto meccanico Richard Müller-Uri di Braunschweig una cellula al selenio di piccole dimensioni e che presentasse un notevole abbassamento di resistenza sotto l'influenza della

luce. Questa cellula presenta una superficie sensibile di circa 2 cm. quadrati; in essa il selenio è steso su una lastra di lavagna fra dei sottili fili di rame.

Per poter portare questa cellula alla temperatura di ebollizione dell'aria liquida, mi sono costruito un recipiente speciale il cui disegno è riportato nella qui annessa figure.

Un recipiente di latta cilindrico R a doppie pareti, con l'intercapedine fra queste riempita di lana ben secca, pressata e poi chiusa a stagno, serve a contenere l'aria liquida A. Entro questa trovasi immerso un secondo recipiente K cilindrico di latta, contenente sul fondo dei pezzi di potassa caustica e un po' più su un diaframma a sfregamento dolce, tutto bucherellato che sostiene la cellula al selenio S. Superiormente questo recipiente K termina in un manicotto V di vetro, masticiato al sottostante K; attraverso due fori

(1) Wied. Ann. 34, pag. 247, 1888.
(2) Wied. Ann. 32, pag. 108, 1887.

nella masticiatura passano i due reofori r_1 r' della cellula S. Il manicotto V di vetro è chiuso poi superiormente da una lamina M di mica ben trasparente, che serve mediante un'altra masticiatura a chiudere ermeticamente il recipiente cilindrico così formato e in cui viene a trovarsi la cellula al selenio. La potassa caustica, assorbendo l'anidride carbonica e l'umidità contenuta nell'aria, preservava dal pericolo che queste venissero condensate dalla bassa temperatura e formassero nell'interno del recipiente una nube assorbente i raggi luminosi. Di più, grazie a quel collare di vetro V, non si avevano al l'esterno delle superfici metalliche irraggianti.

Come sorgente di luce mi servii di un arco voltaico a mano alimentato da una corrente alternante a 50 Volta.

Quest'arco trovavasi situato sopra la lamina di mica M, e la luce da esso emanante veniva concentrata mediante una lente propria sulla superficie sensibile del selenio.

La cellula era inserita nel circuito di un elemento Warren de la Rue contenente un galvanometro Déprez et d'Arsonval di 100 Ohm. di resistenza, fortemente shuntato ed un interruttore.

Il metodo seguito per determinare la resistenza della cellula è in fondo quello di sostituzione, unico applicabile in misure per loro natura poco precise di quantità troppo variabili da un momento all'altro.

Si dava allo shunt un conveniente valore e poi si leggevano le deviazioni al galvanometro, quando si chiudeva il circuito colla cellula illuminata o con la cellula non illuminata; e questa operazione si fece per varî valori dello shunt, sia quando la cellula trovavasi alla temperatura ordinaria, sia quando trovavasi alla temperatura d'ebollizione dell'aria liquida.

In ultimo poi si determinò la sensibilità del galvanometro sostituendo alla cellula a selenio una resistenza di 5000 Ohm, e variando eventualmente lo shunt al galvanometro in modo da poter avere all'incirca le stesse deviazioni che si avevano quando era inserita la cellula.

L'aria liquida gentilmente fornitami dal dott. D. Helbig dell'Istituto Chimico dell'Università, veniva conservata durante l'esperienza entro appositi recipienti del Dewar, dai quali poi si travasava nell'interstizio A fra i due recipienti R e K al momento dell'esperienza e durante la medesima per modo che la parte metallica del recipiente K fosse sempre completamente sommersa. In tal modo un litro di aria liquida durò per circa tre quarti d'ora.

I risultati delle misure compiute si possono riassumere così:

Temperatura ordinaria.

Resistenza della cellula nell'oscurità $r = 31000$ Ohm.

" " " alla luce $r_1 = 18000$ "

Effetto fotoelettrico $\frac{r-r_1}{r} = 0,4$

Temperatura d'ebollizione dell' aria liquida.

Resistenza della cellula nell'oscurità $r = 2600$ Ohm.
» » » alla luce $r_1 = 1900$ »
Effetto fotoelettrico $\frac{r-r_1}{r} = 0{,}3$.

Come si vede, alla temperatura d'ebollizione dell'aria liquida l'effetto fotoelettrico non scompare, anzi la sua variazione è abbastanza piccola, ciò che rende un po' difficile il ricondurre questo effetto della luce ad una azione chimica.

In ultimo noto come il coefficiente di temperatura della resistenza elettrica del selenio conduttore sia illuminato che non illuminato, abbia per questo intervallo di temperatura: 15° — 185°, un valore all'incirca eguale a 0,004, cioè un valore quasi eguale a quello dei metalli.

Chimica. — *Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine.* Nota di A. PERATONER, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Geologia. — *I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia.* Nota di ALESSANDRO MARTELLI, presentata dal Corrisp. DE STEFANI.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sugli Infusori.* Nota del dott. PAOLO ENRIQUES, presentata dal Socio EMERY.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Nota I di ALESSANDRO COGGI, presentata dal Socio EMERY.

Son passati più di dieci anni da che ho comunicato in questi Rendiconti [1] i risultati di parziali ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini in *Torpedo* e alcune mie idee sulle probabili omologie di questi organi peculiari dei Selaci con organi che si riscontrano in altri ordini di Pesci.

[1] *Sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Questi Rendiconti, vol. VII, 2° sem., fasc. 7°, 1891.

Al primo convegno dell' Unione Zoologica Italiana in Bologna (settembre 1900) ho dimostrato su preparati microscopici, alcuni stadî iniziali dello sviluppo delle ampolle in *Torpedo* e la possibilità di distinguere già in embrioni squaliformi di 15 mm. le ampolle stesse dagli abbozzi degli organi di senso laterale (canali o vescicole di Savi). Mentre questi, infatti, si mantengono costituiti di un unico strato di cellule, per quanto alte e specificamente modificate, fino a stadî avanzati di sviluppo e quando l' ectoderma è bistratificato, quelle invece si mostrano composte, fino dal loro primo annunziarsi, da più strati cellulari. Questa differenza di costituzione trae la sua origine dalla maniera e dal tempo diversi in cui le due qualità di organi si formano, e ci invita pure ad annetter loro un diverso significato morfologico.

Le osservazioni e le conclusioni portate da lavori recenti nei quali è trattato, di proposito o per incidenza, delle ampolle di Lorenzini in varie specie di Selaci, mi obbligano ad anticipare in questa Nota la pubblicazione dei risultati di mie ricerche ulteriori sullo stesso argomento.

Disposizione, numero e partizione delle ampolle. — Nelle torpedini adulte le ampolle propriamente dette sono riunite in tre gruppi in ciascuna metà del corpo: un gruppo anteriore dorsale, innanzi e in dentro degli occhi; un gruppo anteriore ventrale, innanzi alle narici, situato sotto al primo e da questo imperfettamente separato per mezzo di una membrana tendinosa; un gruppo posteriore appoggiato alla cartilagine del propterigio, sul contorno esterno dell'organo elettrico, fra la linea segnata dalla rima boccale e la linea che passa per le due prime fessure branchiali. Gli sbocchi dei dotti ampollari invece sono distribuiti lateralmente agli occhi, intorno alle aperture nasali, e presso al margine antero-laterale delle due faccie del corpo. Una partizione delle ampolle fondata sul loro raggruppamento, o sulla disposizione degli sbocchi non avrebbe che una importanza topografica. Più razionale invece ne riesce la partizione fatta sul criterio della loro innervazione, tanto più che con esso si accordano i fatti dello sviluppo.

Ecco quanto mi risulta da dissezioni di individui adulti e di grossi embrioni di *T. ocellata* e dalle ricostruzioni di tagli di giovani embrioni.

I nervi che provvedono le ampolle appartengono tutti al *N. facialis* (¹) e precisamente a quei rami di esso che innervano anche gli organi di senso

(¹) Nella mia Nota del '91 non tenni conto della importante scoperta di Marshall e Spencer che la *portio major* del *R. ophthalm. sup.* è la *portio facialis* dello stesso ramo, e inoltre che il *R. buccalis* appartiene, almeno per gran parte, al facciale; riparai alla mancanza in un mio lavoro successivo (*Un'anomalia in un embrione di Selacio.* Mem. Acc. Scienze Bologna, ser. V, tom. II, 1892). Così ritenni allora che sì le ampolle come gli organi di senso laterale fossero innervati dal trigemino, come parecchi autori di trattati e di lavori speciali ritengono tuttora.

laterale: *R. ophthalmicus superficialis portio facialis*, *R. buccalis* e *R. mandibularis externus*.

Ciascun gruppo anteriore dorsale è costituito:

a) da 6-7 ampolle i cui dotti sboccano sulla faccia dorsale del corpo, allato e in fuori dell'occhio, e che sono innervate da branche [1] del *R. ophthalm. superf.*;

b) da 2-3 ampolle i cui dotti sboccano lateralmente in fuori del canale laterale dietro alla commessura post-auricolare, fra mezzo a tubuli dello stesso canale, e che sono innervate da una branca del *R. mandib. externus*;

c) da 15 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi presso al margine antero-laterale della faccia dorsale del corpo e che sono innervate da una branca del *R. mandib. ext.*

Ciascun gruppo anteriore ventrale si compone:

d) di 11 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi sulla faccia ventrale del corpo intorno alle narici, e che sono provvedute da una branca del *R. ophthalm. superf.*;

e) di 2-3 ampolle i cui dotti sboccano sul margine anteriore della faccia ventrale del corpo, e che sono provvedute da una branca del *R. buccalis*;

f) di 15 ampolle i cui dotti sboccano presso al margine antero-laterale della faccia ventrale del corpo e che sono innervate da una branca del *R. mandibularis externus*.

Ciascun gruppo posteriore è costituito:

g) da 18 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi sulla faccia dorsale del corpo, presso al contorno della pinna pettorale, lateralmente e indietro dell'organo elettrico, e che sono innervate da una branca del *R. mandib. externus*;

h) da 15 ampolle i cui dotti sboccano sulla faccia ventrale del corpo, in fuori e in dietro del contorno esterno dell'organo elettrico, e che son provvedute da una branca del *R. mandibularis externus*.

Tutto sommato *Torpedo ocellata* ci presenta non meno di 168 ampolle [2] distribuite in 8 sottogruppi. Di esse almeno 130 sono innervate da parecchie branche del *R. mandib. ext.*, 34-36 da due branche del *R. ophthalm. sup. facialis*, e solo 4-6 da una esile branca del *R. buccalis*.

Epoca e luogo di formazione delle ampolle. — Finora lo sviluppo delle ampolle non è stato seguito estesamente ed esattamente in alcuna specie di Selacio.

[1] Adopero qui impropriamente la parola « branca » affibbiandole un significato d'ordine inferiore a quello che essa ha nella lingua italiana. Lo faccio provvisoriamente per maggior chiarezza di esposizione.

[2] Questo numero non deve ritenersi assoluto; esso potrà essere diverso, dipendentemente da variazioni individuali. Credo, a ogni modo, ch'esso rappresenti un *minimum*.

Per quanto riguarda *T. ocellata*, i sottogruppi di ampolle numerati sopra non si formano contemporaneamente durante lo sviluppo embrionale; e nè meno è contemporanea l'apparizione delle ampolle appartenenti ad uno stesso sottogruppo. In generale esse si sviluppano isolatamente in ogni sottogruppo, salvo pei sottogruppi più numerosi ove si può verificare lo sviluppo contemporaneo di un certo numero di ampolle (dipendentemente, come si vedrà in seguito, dalla disposizione che assumono i nervi destinati a provvederle).

A cominciare da embrioni squaliformi di 12 mm. di lunghezza fino ad embrioni raiformi di 27 mm., ininterrotta, sebbene irregolarmente intensa, è la formazione di nuove ampolle.

Prime a mostrarsi sono le poche ampolle del sottogruppo *b*. Se ne può constatare l'inizio in embrioni squaliformi di 12 mm. lateralmente in basso sull'arco ioideo, presso il solco che separa quest'ultimo dall'arco mandibolare. Sono le prime *ampolle ioidee* o *io-mandibolari*. Il nervo che le provvede è una breve ed esile branca del *R. mandib. ext.*, la prima branca inviata da questo ramo e che non sia destinata ad organi di senso laterale.

In embrioni squaliformi di 15 mm. appariscono, pure sull'arco ioideo, sotto a quelle del sottogruppo *b*, le prime ampolle del sottogruppo *g* (*ampolle ioidee* o *io-mandibolari*). In embrioni squaliformi di 16 mm. è già segnata, dietro all'occhio, all'altezza del cristallino, qualcuna delle poche ampolle del sottogruppo *e* provveduta da una branca esilissima del *R. buccalis* (*ampolle infraorbitali* o *boccali*). In embrioni squaliformi di 18 mm., innanzi e sotto all'occhio, è chiara la formazione delle prime ampolle innervate dal *R. ophthal. superf.*, e precisamente quelle appartenenti al sottogruppo *a* (*ampolle sopraorbitali* od *oftalmiche*); e nello stesso stadio appariscono sull'arco mandibolare, subito dietro alle ampolle del sottogruppo *e*, le prime ampolle del sottogruppo *c* (*ampolle mandibolari* o *io-mandibolari*), e sull'arco ioideo le prime del sottogruppo *h* (*ampolle ioidee* od *io-mandibolari*), le une e le altre innervate da branche diverse del *R. mandib. ext.* Le ampolle del sottogruppo *d* (*sopraorbitali* od *oftalmiche*) fanno la loro prima comparsa, sotto all'occhio, in embrioni squaliformi di 19 mm. Quelle del sottogruppo *f* (*ampolle mandibolari* o *io-mandibolari*) cominciano a differenziarsi, sulla faccia ventrale dell'arco mandibolare, circa nello stesso stadio.

Tutti i sottogruppi sono chiaramente, se non completamente, rappresentati in embrioni squatiniformi di 20,5 mm.; nuove ampolle continuano a formarsi in ciascuno di essi, eccetto che nei piccoli sottogruppi *b* ed *e*. Ma specialmente continua è l'aggiunta di nuove ampolle nei sottogruppi *g* e *h* fino in embrioni di 27 mm. Di questi sottogruppi fan parte le ampolle i cui dotti sboccano nei punti più periferici delle due superficie del corpo.

Materiale per la formazione delle ampolle. — Nella mia Nota del '91 ebbi occasione di rilevare che le ampolle si sviluppano a fianco degli abbozzi degli organi di senso laterale, e solo di certuni fra essi. Ora posso

aggiungere e precisare meglio che *le ampolle cominciano ad apparire quando le quattro porzioni principali di cui è costituito l'intero apparato di senso laterale* (linea sopraorbitale, linea infraorbitale, linea io-mandibolare e linea laterale) *son già chiaramente abbozzate* e ch'*esse si formano a spese di tratti ectodermici che sono contigui e fiancheggiano, a dir così, quelli di tali abbozzi che son destinati a divenire i canali sensitivi* (*o vescicole*) *del capo*. Ne è esclusa quindi la linea laterale pr. detta, a fianco della quale non si forma alcuna ampolla; ciò che si può già dedurre da quanto è precedentemente esposto circa la posizione che hanno le ampolle al loro primo apparire e circa i nervi che le provvedono.

Le quattro porzioni dell'apparato di senso laterale sono già abbozzate in embrioni squaliformi giovanissimi di *T. ocellata*, quando l'ectoderma è ancor fatto di un unico strato cellulare. Esse si manifestano come tratti o striscie ectodermiche a cellule alte, stipate e con nuclei allungati, mentre le cellule dell'ectoderma ordinario (salvo regioni ove si formano organi speciali, transitorî o permanenti) sono molto più basse e pressochè tanto alte quanto larghe. E il passaggio fra le due forme di cellule è graduale.

Non è giusto dunque continuare a ripetere, come ha fatto recentemente anche Allis [1], l'affermazione di Balfour, che nella formazione degli abbozzi degli organi di senso laterale pigli parte solo lo strato mucoso o profondo dell'ectoderma. La cosa apparisce effettivamente così, solo quando le cellule dell'ectoderma ordinario si dispongono nei due strati caratteristici, mentre quelle degli abbozzi degli organi di senso si mantengono disposte su uno strato solo (e ciò durante una certa serie di stadî embrionali).

Ma anche quando gli abbozzi degli organi di senso laterale si possono manifestare come differenziamento dello strato profondo, i loro margini laterali passano gradatamente all'ectoderma ordinario bistratificato; e ciò avviene a mezzo di cellule discretamente alte, prima disposte alternate, poi su due strati. Per modo che ogni striscia ectodermica, rappresentante l'abbozzo di una porzione dell'apparato di senso laterale, è limitata ai suoi fianchi da ectoderma che non è fatto come l'ectoderma ordinario, ma nè meno può dirsi che faccia parte dell'apparato sensitivo.

Or bene, *è a spese di questo ectoderma che fiancheggia gli abbozzi dell'apparato di senso laterale che si formano le ampolle*. Non sempre però. Ci sono lunghi tratti di essi, a fianco dei quali non si sviluppa alcuna ampolla. Per esempio, a non tener conto della linea laterale, tutto il tratto dorsale della linea sopraorbitale e quasi tutta la linea infraorbitale. Ciò di-

[1] E. Ph. Allis, *The Lateral Sensory Canals, the Eye Muscles, and the Peripheral Distribution of certain of the Cranial Nerves of Mustelus laevis.* Quart. Journ. Micr. Sc., vol. 45, p. 2, N. S., pag. 91.

mostra che *la formazione delle ampolle non è dovuta ad attività propria di questo ectoderma, ma che la causa risiede fuori di esso.*

Primi momenti dello sviluppo delle ampolle. — In tagli frontali di embrioni di *T. ocellata* di 12 mm. dietro all' abbozzo della linea io-mandibolare, di embrioni di 16 mm. dietro all' infraorbitale, di embrioni di 18 mm. innanzi alla sopraorbitale, si possono constatare accenni di ampolle in relazione con esilissime branche inviate dai rami nervosi che rispettivamente provvedono quelle porzioni dell' apparato di senso laterale. Siffatte branche sono accompagnate da nuclei in prossimità del ramo da cui si dipartono, e anche per un certo tratto del loro cammino immediatamente sotto all' ectoderma, ma poi sono esclusivamente costituite da sottilissimi filamenti protoplasmatici (cilindrassili embrionali) i quali giungono fino alle cellule dello strato profondo dell' abbozzo ampollare, e forse penetrano fra di esse. L' abbozzo ampollare in questo stadio è pluristratificato, perchè fra lo strato profondo ch' è continuazione dello strato profondo dell' ectoderma e lo strato superficiale si sono insinuate altre cellule derivate del primo.

In tagli di embrioni rispettivamente un po' più giovani, nelle regioni corrispondenti a quelle su menzionate, non si osservano che sottili filamenti protoplasmatici, i quali dal ramo nervoso che provvede l' apparato di senso laterale e che gli è contiguo, si possono seguire, immediatamente sotto all' ectoderma, fino agli abbozzi delle ampolle; le quali allora sono costituite da due soli strati cellulari.

Però, in embrioni più avanzati rispettivamente a quelli citati sopra, i nuclei si sono inoltrati lungo i filamenti protoplasmatici inviati dai singoli rami nervosi e si sono avvicinati agli abbozzi ampollari, sotto ai quali si accumulano talvolta, anche in seguito a moltiplicazione, e formano una espansione a mo' di clava. Questi abbozzi si possono ben dire allora giovani ampolle, perchè hanno già cominciato a individualizzarsi corrispondentemente alle branche nervose che loro arrivano, e anche perchè gli elementi cellulari che li costituiscono hanno assunto disposizioni peculiari; sulle quali dirò più innanzi.

Voglio, invece, mettere subito in rilievo che le ampolle si formano dall' ectoderma in corrispondenza di altrettante sottili branche nervose loro inviate dagli stessi rami che dànno branche anche agli organi di senso laterale. Ma convien distinguere. Le branche nervose che provvedono questi ultimi organi hanno i loro punti di accrescimento negli abbozzi degli organi stessi, i quali, fino al loro completo sviluppo, servono loro da matrice. La cosa pare indubitata ora che ricerche recenti, eseguite su materiale vario, son venute ad appoggiare l' antica affermazione di Goette e Semper circa la derivazione diretta del *R. lateralis vagi* dall' ectoderma.

È a ritenersi adunque che il sistema dei nervi dell' intero apparato di senso laterale ha la sua origine nell' apparato stesso; come suol dirsi, la

sua formazione è centripeta. Ma mentre si può senz'altro considerare come tale la formazione del *R. lateralis vagi*, altrettanto semplicemente non può dirsi che siano costituiti gli altri tre rami del sistema: *R. ophthalm. superf.*, *R. buccalis* e *R. mandibul. ext.*; nella composizione dei quali entrano bensì, per gran parte, nervi di senso laterale, e che si originano nella stessa maniera che il *R. lateralis*, ma essi comprendono anche i nervi che vanno alle ampolle.

E questi nervi ampollari, a giudicare dal loro primo manifestarsi in forma di sottili filamenti protoplasmatici, e dalla posizione rispettiva che in essi occupano i nuclei negli stadî embrionali su contemplati, non possono che formarsi in direzione centrifuga. E poichè, a cominciare dall'abbozzo ampollare, il loro decorso può essere seguito prima sotto all'ectoderma (e più o meno accosto ad esso, secondo il grado di sviluppo), poi, in unione con una branca nervosa del vicino organo di senso laterale, fino al ramo di cui questa branca fa parte, ne viene la conclusione che *i rami nervosi di senso laterale e le singole branche che li collegano con gli apparati periferici possono servire come vie di conduzione per i nervi che provvedono le ampolle*. Le quali solo in tanto si sviluppano in certi tratti del peculiare ectoderma che fiancheggia gli abbozzi degli organi laterali, in quanto vi arrivino filamenti nervosi o cilindrassili embrionali. *Son questi nervi che danno occasione al formarsi delle ampolle.* Siamo autorizzati a concludere così dal fatto che in ben lunghi tratti di quell'ectoderma ove non giungono filamenti nervosi, ampolle non si sviluppano affatto.

Differenziamento ulteriore delle ampolle. — Subito dopo che nervi embrionali hanno raggiunto il peculiare ectoderma bistratificato (*stadio di ampolla indifferente*) che fiancheggia gli abbozzi degli organi laterali, avvengono in questo ectoderma le seguenti modificazioni.

1. Fra lo strato profondo e quello superficiale si insinuano cellule che provengono dal primo e si moltiplicano *in situ*, e riducono l'abbozzo ampollare tri-o pluristratificato (*stadio di ispessimento ectodermico*).

2. Le cellule dello strato profondo divengono alte, piramidate e si ordinano in un settore sferico, a convessità interna, intorno ad un centro nel quale esse convergono con le loro estremità assottigliate. I nuclei ovali hanno la stessa direzione dei corpi cellulari rispettivi e ne occupano la porzione periferica o basale. Questo speciale ordinamento si verifica in corrispondenza di ogni nervo ampollare. È lo *stadio di ampolla individualizzata*; nella quale le cellule basali disposte a settore sferico son destinate a formare l'ampolla propriamente detta. Al di sopra di esse si moltiplicano attivamente le cellule che la separano dallo strato superficiale.

In questo stadio le ampolle possono presentarsi:

o riunite in gruppi, assai vicine le une alle altre, quasi esse si fossero moltiplicate per scissione contemporanea di ampolle preesistenti, come av-

viene sull'arco ioideo per le ampolle che formeranno parte dei sottogruppi *g* e *h*; allora la branca nervosa del sottogruppo si è suddivisa in modo arborescente in tante sottobranche di cui ognuna fa capo ad un'ampolla;

o disposte in serie lineare, come le ampolle oftalmiche dei due sottogruppi *a* e *d*; allora la branca nervosa dopo aver provveduto un'ampolla, decorre oltre, parallelamente al vicino apparato di senso laterale a provvederne una seconda, una terza e così via.

3. In corrispondenza del centro in cui convergono le alte cellule dell'ampolla propriamente detta apparisce una piccola cavità, nella quale confluiscono poi altre cavità formantisi fra le cellule, immediatamente soprastanti, degli strati intermedî dell'abbozzo ampollare. La cavità unica diventa conica o piriforme, con la parte sottile compresa fra le alte cellule dell'ampolla propriamente detta. È lo *stadio di ampolla cava*. E per quanto sembra, la formazione della cavità è dovuta a disfacimento del plasma delle cellule, specialmente degli strati intermedî, che in quel punto, in seguito a continuata moltiplicazione, si comprimono a vicenda ed esercitano pressione anche sulle alte cellule dell'ampolla propriamente detta.

4. La cavità ampollare si allunga e le cellule degli strati intermedî le si dispongono intorno a formarle una doppia parete. È l'inizio del *dotto ampollare*. Lo strato epidermico superficiale, che non piglia parte alla formazione della parete del dotto, permane per qualche tempo.

5. Segue l'*allungamento del dotto ampollare*, ossia l'affondamento dell'ampolla nel mesenchima, obliquamente o parallelamente al tegumento, e nella stessa direzione donde le viene il nervo. Il lume del dotto è sottile, mentre la cavità dell'ampolla è larga e sferica. L'allungamento è dovuto, oltre che alla moltiplicazione delle cellule delle pareti del dotto, ad accrescimento e parziale introflessione degli strati profondi dell'ectoderma nel punto d'attacco. Quivi il dotto subisce una dilatazione; lo strato epidermico superficiale vien sollevato a volta e finisce per rompersi. Si forma così lo *sbocco ampollare*.

6. Ulteriori modificazioni avvengono nell'ampolla propriamente detta, prima per dilatazione della sua cavità, poi per la formazione di insaccature (al numero di sei in *Torpedo*) disposte in ordine circolare intorno al fondo dell'ampolla. È lo stadio definitivo di *ampolla con placca centrale e otricoli*.

Le ampolle in altre specie di Selaci. — La successione dei differenziamenti che presentano le ampolle in *Torpedo* durante il loro sviluppo, come è esposta qui sopra, riesce a conferma di gran parte delle mie ricerche del '91, ma le corregge per quel che riguarda gli stadî iniziali. Ed essa si scosta in più d'un punto da quella stabilita in un recente lavoro di Minckert [1] su serie incomplete di embrioni di *Spinax niger* e *Acanthias vulgaris*.

[1] W. Minckert, *Zur Topographie u. Entwicklungsgeschichte d. Lorenzini'schen Ampullen*. Anatomischer Anzeiger XIX Bd. n. 20, 1901.

Questo lavoro uscito dall'Istituto Zoologico di Jena e manchevole specialmente ri-

Serie incomplete di embrioni di *Pristiurus melanostomus* mi dimostrano che per quanto diverso sia il numero delle ampolle appartenenti ai varî sottogruppi e diverso pure sia l'ordine secondo il quale esse appariscono, pure non c'è divario essenziale con *Torpedo*, per quel che riguarda i primi momenti di loro formazione e i successivi differenziamenti fino a completo sviluppo.

Per quanto concerne *Mustelus laevis*, Allis [1] afferma di non aver trovata alcuna indicazione di ampolle in embrioni di 36 mm. Io posso assicurare, invece, che già in embrioni di 28 mm. si distinguono benissimo le ampolle sopraorbitali, le infraorbitali e le io-mandibolari, precisamente nello stadio di ampolla individualizzata.

E nello stesso stadio e in quello di ampolla cava trovo riccamente rappresentate le ampolle appartenenti ai medesimi tre gruppi, in un embrione di *Raja punctata* di 30 mm. di lunghezza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: TARAMELLI, FERRARIS, BORZÌ, MAFFUCCI, FISCHER, KLEIN, PFLUEGER, ROSENBUSCH, VIRCHOW; presenta inoltre il vol. III degli *Atti della Società per gli studi della malaria*.

Il Vicepresidente BLASERNA presenta, a nome del Socio TACCHINI, varie pubblicazioni del comandante CATTOLICA, accompagnando la presentazione colle seguenti notizie:

« L'ingegnere comandante Cattolica membro della Commissione geodetica italiana, che insegnava astronomia nautica e idrografia nella Regia Accademia navale di Livorno, fu chiamato a dirigere l'Istituto Idrografico della R. Marina in Genova fino dal 1897.

« Egli ha dato un nuovo ordinamento all'Istituto su basi più scientifiche, per modo che l'Istituto medesimo potesse concorrere al progresso degli studî di sua competenza.

« Il Cattolica, dopo assunta la direzione, ha compiuto la nuova idro-

guardo alla innervazione delle ampolle; contiene bensì un inutile sfoggio bibliografico (a cominciare dal secolo XVII) il quale non è altro che la ripetizione di ciò che si può leggere in qualunque opera precedente che tratti un po' diffusamente degli organi di senso laterale, ma non tiene conto nè della mia Nota del '91, nè di lavori recenti di altri (stampati in lingua tedesca e in giornali tedeschi), portanti chiaramente nel titolo l'espressione: *Ampolle di Lorenzini*.

[1] L. c. pag. 94.

grafia dell'Adriatico, che consta di 3 carte generali e di oltre 20 piani, lavori in gran parte già pubblicati.

« Egli inoltre ha eseguito molte determinazioni astronomiche e geodetiche, delle quali presenta all'Accademia alcune delle più importanti, quali:

1°) Determinazione della latitudine dell'Osservatorio della R. Accademia Navale di Livorno, fatta nel 1897, secondo il metodo di Talcott.

2°) Determinazione della latitudine dell'Osservatorio del R. Ufficio Idrografico, mediante passaggi di stelle al primo verticale, eseguita nel 1898.

3°) Stazione astronomica a San Cataldo di Bari eseguita nel 1898.

4°) Operazioni eseguite nell'anno 1899 per determinare la differenza di longitudine fra Livorno e Genova.

« Offre inoltre all'Accademia un esemplare del suo trattato di navigazione, che serve di testo alla R. Accademia da dieci anni ed a varî Istituti nautici del Regno, ciò che dimostra con quanto amore e competenza egli coltivi le discipline nautiche.

« Infine, credo di dover segnalare all'Accademia una nuova importante pubblicazione da lui iniziata, cioè gli Annali idrografici dei quali presento i due primi fascicoli, nel secondo dei quali trovasi anche la descrizione della nuova stazione meteorologica dell'Istituto Idrografico ».

Il Socio generale FERRERO, a nome della R. Commissione geodetica italiana da lui presieduta, offre la pubblicazione: *Collegamento geodetico delle isole Maltesi con la Sicilia*, e ne discorre.

Il Socio VOLTERRA presenta, a nome dell'autore, due volumi del *Corso di Meccanica razionale* del prof. F. CALDARERA.

Il Socio BETOCCHI fa omaggio di alcune pubblicazioni del prof. BERCHET, colle seguenti parole:

« A nome dell'Autore, chmo cav. Federico Berchet Direttore dell'Ufficio Regionale per la conservazione dei monumenti del Veneto, ho l'onore di presentare all'Accademia la Relazione di tutti i lavori eseguiti ai monumenti della Regione Veneta durante gli esercizi 1899-900 e 1900-901.

« In pari tempo ho l'onore di presentare alcune sue pregievolissime monografie che riguardano le sale d'armi del Consiglio dei X nel palazzo Ducale di Venezia; la sala del maggior consiglio nello stesso palazzo; ed una geniale proposta di restauro e ripristinamento nello stato originario e nelle squisite forme architettoniche che aveva nel secolo XVI la loggia Veneziana di Candia comunemente detta dell'Armeria, che si ritiene opera del Sammicheli al quale il Senato Veneto aveva affidata la costruzione delle fortificazioni di quell'isola; loggia che attualmente si trova manomessa, mu-

tilata e deturpata per la incuria e per le modificazioni in essa introdotte durante il dominio Musulmano.

« Queste pubblicazioni, e sopratutto poi le predette monografie non possono a meno di essere di grandissimo interesse per tutti coloro i quali si occupano d'arte, ed in special modo della storia dell'arte italiana ».

CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società Reale di Londra; la Società zoologica di Tokyo; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geografica del Cairo; la Società geologica di Manchester; l'Ufficio geodetico internazionale di Potsdam; l'Istituto Teyler di Harlem; l'Istituto Smithsoniano di Washington.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Ministero della Guerra; le Società zoologiche di Ottawa e di Pietermaritzburg; l'Ufficio per la misura del grado, di Vienna.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 6 aprile 1902.

Alberti V. — Su la determinazione dei radianti. Napoli, 1901. 8°.
Id. — Sul clima di Napoli. Napoli, 1901. 4°.
Andoyer H. — Théorie de la Lune. Paris, 1902. 8°.
Atti della Società per gli Studî della malaria. Vol. III. Roma, 1902. 8°.
Barbarin P. — La Géométrie non euclidienne. Paris, 1902. 8°.
Bericht ueber die Feier von R. Virchow's achtzigstem Geburtstag am 13 Oktober 1901. Berlin, 1902. 8°.
Berlese A. — Sulle concrezioni cristalline contenute negli organi in dissoluzione e nelle sostanze albuminoidi in via di digestione nelle ninfe degli insetti metabolici. Jena, 1902. 8°.
Bombicci L. — Alcune obbiezioni circa i supposti cristalli liquidi ed i pretesi cristalli viventi. Bologna, 1901. 4°.
Id. — Di un sensibile aumento di volume negli aghetti di Rutilo (Sagenite) diffusi nei limpidi cristalli di Quarzo. Bologna, 1901. 4°.

Bombicci L. — Sui probabili modi di formazione dei cristalli di Granato. Bologna, 1902. 4°.

Bonomi A. — Il 5° Congresso zoologico internazionale di Berlino e l' escursione dei congressisti sul Mar del Nord. Rovereto, 1902. 8°.

Borzì A. — Contribuzioni alla Biologia vegetale. Vol. III, 1. Palermo, 1902. 8°.

Caldarera F. — Corso di meccanica razionale. Vol. I, II. Palermo, 1901. 8°.

Collegamento geodetico delle Isole Maltesi con la Sicilia. Firenze, 1902. 4°.

Curreri G. — Considerazioni intorno alla legge di Baer. Milano, 1902. 8°.

Id. — Osservazioni comparative sul Plancton Pelagico comparente nel porto di Messina. Messina, 1899. 8°.

Id. — Osservazioni sui Ctenofori comparenti nel porto di Messina. Roma, 1900. 8°.

Id. — Osservazioni sulla struttura dell'ectoderma dei Ctenofori. Roma, 1901. 8°.

Id. — Sulla formazione del Mar dei Sargassi. Milano, 1901. 8°

Id. — Sulla respirazione di alcuni insetti acquaiuoli. Roma, 1901. 8°.

Id. — Sulle cause meccanico-biologiche della formazione degli accumoli di Plancton. Roma, 1901. 8°.

D'Achiardi G. — Studio di alcune rocce sienitiche di Kadì-Kalé (prov. di Smirne). Pisa, 1902. 8°.

Ercolini G. — Due esperienze da lezione. Pisa, 1902. 8°.

Id. — Variazione della costante dielettrica del causciù con la trazione meccanica. Pisa, 1902. 8°.

Gegenbaur C. — Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere mit Berücksichtigung der Wirbellosen. II Bd. Leipzig, 1901. 8°.

Giglioli I. — Lo Stato italiano e la cultura del sughero specialmente nella Sardegna. Portici, 1902. 4°.

Gotta G. — Nuovi tipi di palloni dirigibili. Voltri, 1901. 4°.

Klein C. — Optische Studien II. Berlin, 1902. 8°.

Kölliker A. — Weitere Beobachtungen ueber die Hoffmann'schen Kerne am Mark der Vögel. Jena, 1902. 8°.

Le Moine E. Géométrographie ou art des constructions géométriques. Paris, 1902, 8°.

Leonardi Cattolica P. — Determinazione della latitudine dell'Osservatorio della R. Accademia Navale di Livorno, fatta nel 1897 secondo il metodo di Talcott. Genova, 1897. 4°.

Id. — Determinazione della latitudine dell' Osservatorio del R. Ufficio idrografico mediante passaggi di stelle al primo verticale eseguita nel 1898. Genova, 1898. 4°.

Id. — Operazioni eseguite nell' anno 1899 per determinare la differenza di longitudine fra Livorno e Genova. Genova, 1900. 4°.

Id. — Stazione astronomica a S. Cataldo di Bari. Genova, 1899. 4°.

Id. — Trattato di navigazione. Livorno, 1893. 8°.

Macé de Lépinay J. — Franges d'interférence. Paris, 1902. 8°.

Maffucci A. — Intorno alla diversità di decorso della tubercolosi congenita ed acquisita. Catania, 1902. 8°.

Id. — Ricerche sperimentali intorno alla tossina e bacilli tubercolari contenuti nella sperma di animali tubercolotici. Firenze, 1902. 8°.

Maggiora A. e *Valenti G. L.* — Su una epizoozia di tifo essudativo dei Gallinacei. Nota I. Modena, 1901. 4°.

Néculcéa E. — Le phénomène de Kerr. Paris, 1902. 8°.

Omboni G. — Appendice alla nota sui denti di *Lophiodon* del Bolca. Venezia, 1902. 8°.

Pflüger E. — Ueber die Verseifung, welche durch die Galle vermittelt wird und die Bestimmung von Seifen neben Fettsäuren in Gallenmischungen. Bonn, 1902. 8°.

Rajna M. — Sull'escursione diurna della declinazione magnetica a Milano in relazione col periodo delle macchie solari. Milano, 1902. 8°.

Raoult F. M. — Cryoscopie. Paris, 1901. 8°.

Reports to the Malaria Committee. 6th Series. London, 1902. 8°.

Riefler S. — Das Nickelstahl-Compensationspendel D. R. P. No. 100870. München, 1902. 8°.

Rosenbusch H. — Studien im Gneissgebirge des Schwarzwaldes. II. Die Kalksilikatfelse im Rench- und Kinzigitgneiss. Heidelberg, 1901. 8°.

Schuchardt C. — Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen. Hannover, 1902. f°.

Studî e ricerche istituite nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Università di Pisa. F. 17. Pisa, 1902. 8°.

Taramelli T. — La Lotta dei Titani nella Geologia. Pavia, 1902. 8°.

Virchow R. — Zur Erinnerung. Blätter des Dankes für meine Freunde. Berlin. 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 aprile 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno.* Nota del dott. Tommaso Boggio, presentata dal Socio V. Cerruti.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice che permette di ottenere espressa, mediante integrali definiti, la funzione armonica nell'area esterna ad una data ellisse e che, sul contorno di questa, assume valori assegnati (1); e, più in generale, la funzione m-armonica in questa

(1) Nella Nota del prof. Morera: *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti*: « *Sull'espressione della gravità, ecc.* ». (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III, 1° semestre 1894) è esposto un procedimento che permette di costruire la funzione armonica nel campo esterno od interno ad un dato ellissoide e che sul contorno assume gli stessi valori che un polinomio dato di secondo grado; tale funzione, dedotta dall'espressione della funzione potenziale dell'ellissoide, è espressa mediante integrali

stessa area e che, sul contorno, assume colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori dati.

I risultati precedenti si ottengono osservando che l'area esterna ad una data ellisse può trasformarsi, mediante una inversione per raggi vettori reciproci, nell'area interna ad una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e quest'area, a sua volta, può rappresentarsi conformemente su un cerchio mediante polinomi.

1. Sia s' un'ellisse di fuochi F, F'; diciamo σ' l'area esterna ad s', e supponiamo i suoi punti riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x', y' di cui l'origine sia il fuoco F e l'asse Fx' sia l'asse focale.

Si tratta di costruire la funzione u', regolare in σ', e che soddisfa alle equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta'^2 u' = 0 \text{ in } \sigma' \\ u' = \Phi' \quad \text{su } s', \end{cases} \qquad \left(\Delta'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right),$$

ove Φ' indica una funzione continua dei punti di s', comunque assegnata.

Osserviamo perciò che se si riferiscono i punti di σ' alle coordinate polari (r', φ), assumendo come polo il fuoco F e come asse polare l'asse focale Fx', l'equazione polare di s' è:

$$(2) \qquad r' = \frac{p}{1 + e \cos\varphi},$$

nella quale p indica il semiparametro, ed e l'eccentricità $(e < 1)$.

Supponendo, per semplicità, $p = 1$, e facendo una inversione per raggi vettori reciproci assumendo il fuoco F come centro dell'inversione, e supponendo eguale ad 1 il modulo di essa, si ha:

$$(3) \qquad r' r_1 = 1$$

$$(4) \qquad x_1 = \frac{x'}{r'^2}, \quad y_1 = \frac{y'}{r'^2}$$

ove r_1, φ ed x_1, y_1 sono rispettivamente le coordinate polari e cartesiane del punto trasformato di (x', y').

L'equazione (2) diventa pertanto:

$$(5) \qquad r_1 = 1 + e \cos\varphi,$$

la quale, essendo $e < 1$, rappresenta una *Lumaca di Pascal* non passante

definiti. Per quanto riguarda il campo interno ad una ellisse o ad un ellissoide cfr. anche la mia Nota: *Sopra alcune funzioni armoniche o bi-armoniche in un campo ellittico od ellissoidico* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

pel suo polo; l'ellisse s' si è dunque trasformata, mediante l'inversione, nella curva s_1 data dalla (5), e l'area σ' esterna ad s' nell'area σ_1 interna ad s_1.

Chiamando u_1, Φ_1 le funzioni u', Φ' espresse mediante le variabili x_1, y_1, il sistema (1) potrà scriversi:

$$(6) \qquad \begin{cases} \Delta_1^2 u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1, \\ u_1 = \Phi_1 \quad \text{su } s_1, \end{cases} \qquad \left(\Delta_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right).$$

Per risolvere il sistema precedente conviene fare la rappresentazione conforme dell'area σ_1 sopra un cerchio. Se indichiamo con σ il cerchio di raggio 1, appartenente al piano xy, e col centro nell'origine delle coordinate, la rappresentazione conforme di σ_1 sul cerchio σ si eseguisce colle formole [1]

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + x + \frac{e}{2}(x^2 - y^2) \\ y_1 = y + exy. \end{cases}$$

Infatti riferendo i punti del cerchio σ alle coordinate polari r, θ in modo che

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\theta,$$

le formole precedenti possono anche scriversi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + r\cos\theta + \frac{e}{2} r^2 \cos 2\theta \\ y_1 = r \operatorname{sen}\theta + \frac{e}{2} r^2 \operatorname{sen} 2\theta, \end{cases}$$

onde, per $r = 1$, cioè alla circonferenza s di σ, corrisponde la curva:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + \cos\theta + \frac{e}{2}\cos 2\theta \\ y_1 = \operatorname{sen}\theta + \frac{e}{2}\operatorname{sen} 2\theta, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x_1 = (1 + e\cos\theta)\cos\theta \\ y_1 = (1 + e\cos\theta)\operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

cioè:

$$r_1 = 1 + e\cos\theta,$$

che è precisamente la (5).

[1] Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana*, ecc. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII, a. 1899).

Se diciamo u, Φ le funzioni u_1, Φ_1 espresse mediante le variabili x, y, il sistema (6) si trasforma in quest'altro

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \sigma, \\ u = \Phi & \text{su } s, \end{cases} \qquad \left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

In tal modo abbiamo dunque ricondotto la risoluzione del problema di Dirichlet nell'area σ' esterna all'ellisse s' alla risoluzione del problema di Dirichlet per l'area circolare σ (¹).

2. Si voglia ad es. costruire la funzione u', armonica nell'area σ', e che sul contorno s' assume gli stessi valori della funzione $\frac{1}{r'^2}$.

Dovremo porre $\Phi' = \frac{1}{r'^2}$, onde il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} \Delta'^2 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \frac{1}{r'^2} & \text{su } s'; \end{cases}$$

facendo la trasformazione (3), (4) esso si muta nel seguente, analogo al (6):

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1 \\ u_1 = r_1^2 & \text{su } s_1; \end{cases}$$

applicando le (7) ed osservando che sulla circonferenza s si ha:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{e^2}{2} + 1 + e\,x + \frac{e^2}{2}(x^2 - y^2) + e\,x = 1 + e\,x + e\,x_1,$$

si otterrà, dal sistema precedente, quest'altro, analogo all'(8):

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \sigma \\ u = 1 + e(x + x_1) & \text{su } s; \end{cases}$$

e poichè la funzione $1 + e(x + x_1)$ è armonica, si può porre, in ogni punto del cerchio σ:

$$(9) \qquad u = 1 + e(x + x_1).$$

Cerchiamo ora la funzione u_1, cioè la funzione u espressa mediante le variabili x_1, y_1; dobbiamo perciò esprimere anzitutto x, y in funzione di x_1, y_1.

(¹) Ponendo: $z' = x' - iy'$, $z = x + iy$, la rappresentazione conforme di σ' su σ è data dalla formola:

$$z' = \frac{2}{e + 2z + e\,z^2}.$$

Dalle (7), eliminando x, si ha l'equazione:

$$e^2 y^4 + (1 - e^2 + 2 e x_1) y^2 - y_1^2 = 0,$$

che fornisce per y^2 due valori, uno positivo e l'altro negativo; si dovrà tener conto solo del valore positivo che è:

$$y^2 = \frac{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}{2 e^2};$$

ne viene:

$$y = \pm \frac{1}{e\sqrt{2}} \sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}};$$

è poi chiaro che y ed y_1 devono avere lo stesso segno.

Sostituendo nella seconda delle (7), che può scriversi: $1 + e x = \frac{y_1}{y}$, si ha:

$$1 + e x = \frac{e y_1 \sqrt{2}}{\sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}}.$$

Abbiamo così x, y in funzione di x_1, y_1; quindi la (9) porge:

$$u_1 = e x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}}.$$

Passando infine dalle variabili x_1, y_1 alle x', y' mediante l'inversione (4) e poi introducendo le coordinate polari r', φ, si ha:

$$u' = \frac{e \cos\varphi}{r'} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + \frac{2 e \cos\varphi}{r'} + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) \frac{\cos\varphi}{r'} + \frac{4 e^2}{r'^2}}}.$$

Questa espressione di u' è quella cercata.

È infatti facile verificare che questa funzione è armonica in σ', inoltre nei punti di s' ha per valore $\frac{1}{r'^2}$, infine per $r' = \infty$ assume il valore $\sqrt{1 - e^2}$, onde, seguendo una nota denominazione [1], si può dire che la funzione u' è regolare all' infinito; quindi essa soddisfa a tutte le condizioni poste.

[1] Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, chap. II.

3. Determiniamo ora la funzione u', regolare nell'area σ', e che soddisfa alle equazioni:

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Delta'^4 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \Phi', \dfrac{\partial u'}{\partial n'} = \Psi' & \text{su } s', \end{array}\right. \qquad (\Delta'^4 = \Delta'^2 \Delta'^2),$$

in cui n' indica la normale interna a σ', e Φ', Ψ' sono funzioni date dei punti di s' (1).

Converrà fare l' inversione (4) e il cambiamento di funzione espresso dalla formola:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^2},$$

perchè in tal caso si avrà, come è noto (2):

$$\Delta_1^4 u_1 = r'^6 \Delta'^4 u',$$

quindi il sistema (10) si muterà nel seguente:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta_1^4 u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1 \\ u_1 = \Phi_1, \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = \Psi_1 & \text{su } s_1, \end{array}\right.$$

ove n_1 è la normale interna all'area σ_1, limitata dalla curva s_1, che, come si vide nel § 1, è una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e Φ_1, Ψ_1 sono funzioni date dei punti di s_1.

La funzione u_1, come è noto (3), può ottenersi espressa mediante integrali definiti trasformando, per mezzo delle (7), l'area σ_1 nell'area circolare σ.

4. Più in generale, si voglia determinare la funzione u', regolare in σ' e che soddisfa alle equazioni

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta'^{2m} u' = 0 \text{ in } \sigma' \\ \dfrac{\partial^i u'}{\partial n'^i} = \Phi'_i \quad \text{su } s', \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1), \end{array}\right.$$

le Φ'_i essendo funzioni date nei punti di s'.

(1) Il problema analogo per l'area interna all'ellisse s' l' ho risolto nella mia Nota: *Integrazione dell'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in un'area ellittica* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

(2) Levi-Civita, *Sopra una trasformazione in sè stessa dell'equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$* (Id., t. IX, serie VII, a. 1898).

(3) Almansi, Memoria citata. Cfr. anche Almansi, *Integrazione della doppia equazione di Laplace* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. IX, 1° semestre, 1900).

Converrà eseguire l'inversione (4) e il cambiamento di funzione:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^{2m-2}},$$

perchè in tal caso, come è noto (¹), se si ha $\Delta'^{2m} u' = 0$, sarà pure: $\Delta_1^{2m} u_1 = 0$; per conseguenza il sistema (11) si trasforma nel seguente:

$$\begin{cases} \Delta_1^{2m} u_1 = 0 \quad \text{in } \sigma_1 \\ \dfrac{\partial^i u_1}{\partial n_1^i} = \Phi_{1i} \text{ su } s_1, \qquad (i = 0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

le Φ_{1i} indicando funzioni date nei punti di s_1.

La funzione u_1 che soddisfa a queste equazioni può ottenersi espressa per mezzo di integrali definiti (¹), trasformando, mediante le (7), l'area σ_1 nel cerchio σ.

5. Consideriamo infine l'area S interna alla curva di equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = (X^2 + Y^2)^2,$$

ove X, Y sono le coordinate cartesiane ortogonali di un punto, ed a, b sono costanti. Mediante una inversione, per raggi vettori reciproci, di centro l'origine delle coordinate X, Y, la curva precedente può trasformarsi in un'ellisse s' e l'area S nell'area σ' esterna a tale ellisse.

Per quanto precede si conclude che si può sempre ottenere espressa con integrali definiti, la funzione m-armonica in S e che al contorno assume, colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori assegnati.

Meccanica. — *Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. T. Levi-Civita, in una Nota comunicata a questa R Accademia (²), ha enunciato e dimostrato un notevole teorema, il quale insegna a determinare delle soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante.

Siano $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n$ le due serie di variabili che definiscono lo stato di moto di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo,

(¹) Volterra, *Sulle funzioni poli-armoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LVII, a. 1899).

(²) *Sulla determinazione di soluzioni particolari*, ecc. Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5ª, 1901.

e soggetto a forze conservative; talchè le equazioni del moto sono

$$(0) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots n),$$

ove H non dipende da t. Supponendo di conoscere k integrali o relazioni invarianti di tal sistema in involuzione tra loro, non contenenti il tempo, e risolubili rispetto ad altrettante p (per es. $p_1, p_2, \ldots p_k$), il teorema in parola si enuncia così: *Se* H_1 *è ciò che diviene* H *quando alle* p_1, p_2, p_k *si sostituiscono le espressioni dedotte dagli integrali o relazioni invarianti conosciute, le relazioni*

$$(1) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial H_1}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = k + 1, \ldots n)$$

insieme a quelle supposte note costituiscono un sistema invariante rispetto all'equazioni canoniche.

Di qui risulta, che dalle (1) e dalle k relazioni note, supposte tutte indipendenti tra loro, si potranno ricavare le p e le $q_{k+1}, \ldots q_n$ in funzione delle $q_1, q_2, \ldots q_k$; talchè fatte le sostituzioni nel sistema canonico (0), si otterrà un sistema ridotto di k equazioni, atto a definire le $q_1, q_2, \ldots q_k$ in funzione del tempo. Le soluzioni particolari dedotte in questa maniera corrispondono a *moti stazionari* del sistema, nel senso attribuito a questa espressione dal Routh e completato dal Levi-Civita [1].

L' importanza che ha senza dubbio l'enunciato teorema, rende manifesta l' utilità di collegarne la deduzione alla teoria generale delle equazioni differenziali, e in particolare a quella dei sistemi Hamiltoniani. Questo è quanto ho voluto fare nello scrivere la Nota che ho l'onore di presentare a questa R. Accademia. Avvertirò che dai miei calcoli e ragionamenti il teorema risulta alquanto più esteso; poichè, quando non sono soddisfatte le condizioni necessarie all'esistenza delle soluzioni stazionarie del Levi-Civita, ma ne sono soddisfatte certe altre, si possono ancora determinare delle classi di soluzioni particolari, che però in generale non sono stazionarie.

1. Consideriamo il sistema d'equazioni ai differenziali totali

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx_{m+1} &= b_{11}\, dx_1 + b_{12}\, dx_2 + \cdots + b_{1m}\, dx_m \\ dx_{m+2} &= b_{21}\, dx_1 + b_{22}\, dx_2 + \cdots + b_{2m}\, dx_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_{m+n} &= b_{n1}\, dx_1 + b_{n2}\, dx_2 + \cdots + b_{nm}\, dx_m, \end{aligned}$$

[1] *Sui moti stazionari dei sistemi olonomi.* Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5ª, 1901.

ove si riguardano le $x_1, x_2, \dots x_m$ come variabili indipendenti, x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+n} come funzioni di quelle variabili, e i coefficienti b_{rs} funzioni di tutte le variabili $x_1, \dots x_{m+n}$. Posto

$$X_r(f) = \frac{\partial f}{\partial x_r} + b_{1r}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + b_{nr}\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}},$$

le condizioni

$$X_r(b_{is}) = X_s(b_{ir}) \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots n \\ r, s = 1, 2, \dots m \end{matrix}\right) \tag{3}$$

sono necessarie e sufficienti affinchè il sistema (2) sia completamente integrabile. Supponendo soddisfatte queste condizioni, vediamo se è possibile di determinare delle soluzioni particolari, tali che le x_{m+s} non dipendano da una delle variabili, per es. dalla x_1.

Dovranno pertanto essere nulle le derivate delle x_{m+s} rispetto a x_1; cioè le equazioni

$$b_{11} = 0, b_{21} = 0 \dots b_{n1} = 0 \tag{4}$$

dovranno essere identicamente soddisfatte per quelle espressioni delle x_{m+s}, che rappresentano le soluzioni particolari in discorso. Le quali dunque, se esistono, si devono dedurre dalle (4) con operazioni puramente algebriche, e quindi le b_{r1} non dovranno contenere x_1. Resta a vedere se le espressioni delle x_{m+s}, così dedotte, soddisfano il sistema ridotto

$$\begin{matrix} dx_{m+1} = b_{12}\,dx_2 + \cdots + b_{1m}\,dx_m \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dx_{m+n} = b_{n2}\,dx_2 + \cdots + b_{nm}\,dx_m . \end{matrix} \tag{2'}$$

Basterà perciò che il differenziale totale di b_{r1} $(r = 1, 2, \dots n)$ sia identicamente nullo in virtù delle (2') e delle (4). Ora si ha

$$d\,b_{r1} = \sum_{i=2}^{m}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_i}\,dx_i + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_{m+s}}\,dx_{m+s}$$

$$= \sum_{i=2}^{m}\left\{\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n} b_{si}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_{m+s}}\right\} dx_i ,$$

ossia

$$d\,b_{r1} = \sum_{i=2}^{m} X_i(b_{r1})\,dx_i ;$$

ma

$$X_i(b_{r1}) = X_1(b_{ri}) ,$$

quindi

$$d\, b_{r1} = \sum_{i=2}^{m} X_1 (b_{ri})\, dx_i\,.$$

Essendo

$$X_1 (b_{ri}) = \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} + b_{11} \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+1}} + \cdots + b_{n1} \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+n}}\,,$$

si vede facilmente che esso sarà identicamente nullo in virtù delle (4) quando sia $\frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} = 0$, quando cioè le b_{ri} non contengono la x_1. Si conclude: *Se i coefficienti del sistema* (2) *completamente integrabile non contengono la variabile indipendente x_s, le equazioni*

$$b_{s1} = 0\,,\; b_{s2} = 0\,, \ldots .\; b_{sn} = 0\,,$$

che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di dx_s, somministrano una soluzione particolare del sistema proposto.

2. Di questo teorema ce ne serviremo ora per determinare delle soluzioni particolari del sistema Hamiltoniano (0), quando se ne conoscono k integrali in involuzione.

Siano

$$p_1 - \varphi_1 = 0\,,\; p_2 - \varphi_2 = 0\,, \ldots p_k - \varphi_k = 0 \tag{5}$$

gl' integrali in parola risoluti rispetto a $p_1, p_2 .. p_k$, ove le φ saranno in generale funzioni delle rimanenti p, di tutte le q e di t. Anche la funzione H potrà contenere t; giacchè noi togliamo per ora le restrizioni che abbiamo enunciate in principio sul sistema olonomo che dà luogo alle (0). Ciò posto, decomponiamo il sistema Hamiltoniano nei tre gruppi seguenti, contradistinti dalle indicazioni (*a*), (*b*), (*c*):

$$(a) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$(b) \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}\,, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$(c) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} (i = k + 1\,, \ldots n)\,.$$

Se nelle equazioni del 2° gruppo si sostituiscono alle $p_1, p_2, \ldots p_k$ le funzioni φ, e si tien conto delle (*a*) e (*c*), si trova

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} + [\varphi_r\,, H]_{k+1} = 0\,, (r = 1\,, 2\,, \ldots k)\,,$$

ove l' indice $k+1$ nella parentesi di Poisson sta ad indicare che la sommatoria, rappresentata da quel simbolo, va estesa da $k+1$ fino ad n. Indicando poi con H' ciò che diventa H dopo aver sostituito le φ_r alle p_r, si deducono subito le relazioni:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_s} &= \frac{\partial H'}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_s} \qquad (s=1\,,2\,,\dots n) \\ \frac{\partial H}{\partial p_s} &= \frac{\partial H'}{\partial p_s} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s} \qquad (s=k+1\,,\dots n). \end{aligned}$$

Le quali, combinate opportunamente con le precedenti, conducono, dopo calcoli facili e ben noti [1], alle relazioni seguenti:

$$(7)\qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_r} + [\varphi_r\,, H']_{k+1} = 0 \quad , \quad (r=1\,,2\,,\dots k)$$

che devono essere identicamente soddisfatte.

Consideriamo ora l'equazioni (c), le quali in virtù delle (6) diventano

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} - \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \end{aligned} \qquad (i=k+1\,,\dots n),$$

ove bisognerà immaginare sostituite nelle sommatorie le φ_s alle p_s. Vediamo se è possibile definire le p_i e q_i $(i=k+1\,,\dots n)$ in funzione di $t\,,q_1\,,q_2\,,\dots q_k$ in guisa che queste equazioni risultino soddisfatte in virtù delle (a). Dovrà essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial p_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_r} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i}\right) &= 0 \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i}\right) &= 0 \end{aligned} \qquad (i=k+1\,,\dots n).$$

A queste si soddisfa definendo le p_i e q_i mediante il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_r} = -\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \qquad (i=k+1\,,\dots n) \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i}\,, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_r} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \qquad (r=1\,,2\,,\dots k), \end{aligned}$$

[1] Vedi in particolare la Nota citata del Levi-Civita.

il che sarà possibile, quando per le equazioni ai differenziali totali

$$
(8) \qquad \begin{aligned} dq_i &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} dt - \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} dq_r \\ dp_i &= - \frac{\partial H'}{\partial q_i} dt + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} dq_r , \end{aligned} \qquad (i = k+1, \dots n)
$$

che equivalgono a quel sistema, siano soddisfatte le condizioni d'integrabilità. È facile vedere che ciò avviene, ricorrendo alle (7) e alle condizioni d'involuzione. Questo, del resto, è ben noto; ed è anche noto che dalle (8) si deducono conseguenze importanti per la teoria generale dei sistemi Hamiltoniani.

Ma, giunti a questo punto, ci possiamo proporre di determinare delle soluzioni particolari delle (8); per esempio delle soluzioni in cui le q_i e p_i sieno funzioni di $q_1, q_2, \dots q_k$ e non di t. In virtù del teorema dimostrato nel paragrafo precedente, ciò sarà possibile quando i coefficienti delle (8) non contengono t; quando cioè H' e le φ non dipendono da t. Stando in queste ipotesi, il teorema ricordato ci dice che le soluzioni particolari sono definite dalle equazioni:

$$
\frac{\partial H'}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = k+1, \dots n)
$$

che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di dt. Queste equazioni insieme alla (a) e (5) definiscono ∞^{2k} moti, che sono i moti stazionarî indicati dal Levi-Civita. Così la ricerca di questi moti è direttamente collegata alla classica teoria dei sistemi Hamiltoniani.

Più generalmente possiamo supporre che H' e le φ, pur contenendo il tempo, non dipendano da una delle variabili $q_1, q_2, \dots q_k$, per esempio dalla q_r. In tal caso il sistema (8) ammetterà la soluzione particolare definita dalle equazioni:

$$
\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = k+1, \dots n);
$$

le quali unite alle (a) e (5) definiranno ∞^{2k} moti particolari del sistema dinamico. Questi moti però non saranno, in generale, moti stazionarî.

Matematica. — *L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico.* Nota del prof. FRANCESCO PALATINI, presentata dal Socio SEGRE.

In una interessante Nota (¹) il prof. Segre, partendo da due importanti formole date dal sig. H. Schubert, risolve i due seguenti problemi « Determinare gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti: 1° da una matrice qualsiasi con elementi affatto generici; 2° da una matrice quadrata simmetrica ». Un altro caso notevole da esaminare è quello della varietà che annulla i subdeterminanti del grado $2r+2$ (e quindi anche quelli del grado $2r+1$) di un dato determinante emisimmetrico del grado $n+1$. La dimensione di questa varietà è $r(2n-2r+1)-1$, il che può vedersi p. e. applicando il teor. II del § V della Memoria, *Ueber dass Pfaffsche Problem*, del Frobenius (²).

La questione di cui ci occupiamo equivale a quest'altra. Si considerino in uno spazio $[n]$ tutti gli ∞^m $\left(\text{porremo } m=\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)$ complessi lineari di rette (³), e per semplicità di linguaggio si rappresentino linearmente coi punti di un $[m]$. Ciascun complesso dà luogo ad un sistema nullo, cioè ad una reciprocità tale che ogni punto sta nell'iperpiano che gli corrisponde, e il determinante di questa reciprocità è un emisimmetrico del grado $n+1$. Se tutti i minori di grado $2r+2$ si annullano, allora il complesso è degenere, e precisamente possiede uno spazio-centro di dimensione $n-2r$, uno spazio tale cioè che ogni retta ad esso incidente appartiene al complesso. Si tratta dunque di trovare l'ordine, che indicheremo con x_{n-2r}, della varietà, che rappresenteremo con $V^{(n-2r)}_{r(2n-2r+1)-1}$, di $[m]$ la quale corrisponde all'insieme di quei complessi di $[n]$ che sono dotati di $[n-2r]$-centro (almeno). Per $n=2q+1$, $r=q$ si vede immediatamente che la nostra varietà è di ordine $q+1$, cioè che sono $q+1$ i complessi di un fascio generico di complessi di $[n]$ (corrispondente ad una retta generica di $[m]$) dotati di retta-centro (⁴). Per $n=2q$, $r=q-1$

(¹) *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Acc. Lincei, 1900, serie 5ª, vol. IX.

(²) Crelle, vol. 82, 1876.

(³) In seguito si dirà *complesso* semplicemente in luogo di *complesso lineare di rette*.

(⁴) Cfr. Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1891, serie VII, vol. 2°.

si ha che l'ordine cercato è $\frac{q(q+1)(2q+1)}{6}$, perchè generalizzando il procedimento seguito dal prof. Castelnuovo nel n. 10 del citato lavoro, si trova che appunto questo è il numero dei complessi di $[2q]$ dotati di piano-centro contenuti in un sistema triplo generico di complessi di $[n]$ (corrispondente ad un $[3]$ generico di $[m]$).

Nello studio dei sistemi lineari di complessi di $[n]$ ha una speciale importanza la varietà M^r_{m-1} (di dimensione $m-1$ e ordine r) che in $[m]$ corrisponde all'insieme dei complessi di $[n]$ passanti per i complessi degeneri di un dato $[2r-1]$ (¹). Con M^1_{m-1} sarà da intendersi l'iperpiano che corrisponde all'insieme dei complessi passanti per una data retta. Ora mediante ovvia generalizzazione del ragionamento contenuto nel n. 3 di una mia Nota (²) si trova subito $x_{n-2} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$

Venendo ora alla $V^{(n-4)}_{4n-7}$ $(r=2)$, seghiamola con $2n-6$ varietà M^2_{m-1} relative ad altrettanti spazi $[3]$ di $[n]$, e otterremo una varietà di dimensione $2n-1$ e ordine $2^{2n-6}x_{n-4}$ che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a quei $2n-6$ spazi $[3]$ e che indicheremo con W_{2n-1}. Generalizzando, ciò che è ben facile, il ragionamento del n. 4, V, α della mia Nota citata vedesi che per questa varietà la $V^{(n-2)}_{2n-2}$ è multipla secondo il numero $\frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!}$, per cui segandola con un'altra M^2_{m-1} si otterrà, oltre alla $V^{(n-2)}_{2n-2}$ contata un tal numero di volte, una varietà, che indicheremo con W_{2n-2}, la quale corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a $2n-5$ spazi $[3]$ ed ha per ordine $2^{2n-}x^5{}_{n-4} - \frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!}x_{n-2}$. Ed ora continuando a generalizzare il ragionamento del n. 4, V, β, γ, δ della stessa Nota si giunge ad una varietà, che indicheremo con W_5 di dimensione 5, che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a $4(n-3)$ spazi $[3]$ ed il cui ordine è dato da

$$2^{4(n-3)}x_{n-4} - 2^{2n-7}\frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!}x_{n-2} - \sum_{h=1}^{h=2n-7}(2^{2n-7-h}x_{n-4,\,n-2,\,h})$$

(¹) Analoga importanza ha per lo studio dei sistemi lineari di quadriche di dimensione $n-1$ di $[n]$ la varietà di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}-1$ e ordine $r+1$ formata da quelle di queste quadriche che passano per le quadriche degeneri di dimensione $r-1$ di un dato $[r]$.

(²) *Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1900, t. 60.

dove $x_{n-4,n-2,h}$ rappresenta l'ordine della varietà $U^{(n-4),(n-2),h}$ che corrisponde all' insieme dei complessi dotati di $[n-2]$-centro contenente un $[n-4]$ appoggiato a $2n-6+h$ spazi [3]. L'ordine di quest' ultima varietà, sempre tenendo presente il luogo citato della detta Nota, trovasi esser rappresentabile col simbolo

$$(2\,,3\,,\cdots,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{2n-6+h}\,\mu_{n-2}^1\,\mu_{n-1}^{2n-2-h}\ \text{(}^1\text{)}$$

il quale, in virtù del principio di dualità, equivale a

$$(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}$$

Se ora osserviamo che a $4(n-3)$ spazi [3] è incidente un numero finito di spazi $[n-4]$, numero che è ben noto e che noi per ottenere maggior omogeneità nelle formole rappresenteremo (il che, com'è facile a vedersi, è lecito) con $(4,5,\cdots,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{4(n-3)}$ al qual simbolo per la legge di dualità possiamo sostituire quest'altro $(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\,\mu_3^3\,\mu_4^{4(n-3)}$ che equivale a $\frac{4}{2}(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^4\,\mu_3^1\,\mu_4^{4(n-3)}$; e se notiamo inoltre che ciascuno di questi $[n-4]$ è centro per ∞^5 complessi formanti un sistema lineare al quale in $[m]$ corrisponde un [5], per cui la W_5 si compone di tanti spazi [5] quanti sono indicati dal numero ultimamente scritto, il quale esprime perciò esso pure l'ordine di questa varietà; e se infine consideriamo che è

$$\frac{(2n-6)!}{(n-3)!\,(n-2)!}\cdot\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}=(2\,,3\cdots,n)\,\mu_1^1\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{2n-6}\,\mu_{n-2}^1\,\mu_{n-1}^{2n-2}=$$

$$=(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6}$$

possiamo scrivere

$$(1)\quad 2^{4(n-3)+1}\,x_{n-4}=\sum_{h=0}^{h=2n-6}\left[2^{2n-6-h}(n-3,n-2,n-1,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}\right]$$

Ora sviluppando $(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}$ mediante la formola (16) del citato lavoro dello Schubert, ed applicando alcune convenienti riduzioni, risulta

$$2^{4n-11}\,x_{n-4}=$$

$$=\frac{2^2.1!3!(2n-6)!(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!(n-1)!n!}\cdot\sum_{h=0}^{h=2n-6}\left[2^{2n-6-h}(2n-6+h)_{2n-6}(2n-2-h)_4\right]$$

(1) Per quanto riguarda il significato di questo simbolo vedasi H. Schubert, *Allgemeine Anzahlfunctionen* ecc., § 4, Math. Ann., t. 45, 1894.

e siccome applicando la formola

$$(2m)_m(2n)_{2n}+2(2m-1)_m(2n+1)_{2n}$$
$$+2^2(2m-2)_m(2n+2)_{2n}+\cdots+2^m m_m(2n+m)_{2n}=2^{2m}(m+n)_n$$

la sommatoria dà per risultato $2^{4n-13}(2n-5)(2n-4)$, così in conclusione si ricava

$$x_{n-4}=\frac{1!\,3!\,(2n-6)!\,(2n-4)!}{(n-3)!\,(n-2)!\,(n-1!)\,n!}$$

Ed ora generalizzando il ragionamento precedente, si arriva senza difficoltà ad ottenere il valore di x_{n-2r} mediante una formola del tipo della (1), la quale però non apparisce semplificabile facilmente. Ad ogni modo le espressioni qui trovate per x_{n-2}, x_{n-4} ci permettono di intuire che sarà

$$x_{n-2r}=\frac{[1!\,3!\ldots(2r-1)!]\cdot[(2n-4r+2)!\,(2n-4r+4)!\,(2n-2r)!]}{(n-2r+1)!\,(n-2r+2)!\ldots(n-1)!\,n!}$$ [1]

e con tanto maggior sicurezza possiamo asserire ciò in quanto che per $n=2q+1$, $r=q$ e per $n=2q$, $r=q-1$ quest'espressione ci fornisce i valori sopra indicati e trovati per altra via, mentre per $n=2q$, $r=q$ e per $n=2q+1$, $r=q+1$ essa diventa eguale ad 1, ciò che precisamente dev'essere.

Meccanica. — *La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. Somigliana in una recente Nota (Rend. Acc. Lincei, febbraio 1902), di cui certo non è sfuggita l'importanza ai cultori di Fisica matematica, ha indicato un metodo semplice e diretto per risolvere il problema della deformazione di un diedro retto isotropo o cristallino, con due piani di simmetria, allorchè sulle due superficie limiti sono note parte degli spostamenti e parte delle forze.

Il caso in cui sono dati o i soli spostamenti o le sole forze sfugge al metodo del Somigliana; nè sembra facile la sua trattazione col metodo generale Betti-Cerruti. Nel caso in cui si conoscano gli spostamenti superficiali, il problema è stato risoluto assai elegantemente dal prof. Tedone (Rend. Acc. Lincei, dicembre 1901) per via di approssimazioni successive; forse al problema stesso potrebbe applicarsi con successo il così detto metodo alternante,

[1] Quest'espressione coincide, a meno del fattore 2^{n-2r} con la prima delle (4) del citato lavoro del Segre.

partendo dalle formole della deformazione di un suolo isotropo indefinito (Problema di Boussinesq e Cerruti).

Tuttavia il metodo generale suddetto conduce con grandissima facilità alla risoluzione dei nuovi problemi del Somigliana; ed è ciò che, in breve, mi propongo di mostrare in questa Nota. Mi varrò costantemente, come in altri miei lavori, dei metodi e delle notazioni delle note *Ricerche* ecc. del Cerruti e della sua Memoria *Sulla deformazione* ecc. (Rend. Acc. Lincei, giugno 1888).

I. L'asse y sia lo spigolo del diedro isotropo i cui piani contengano le direzioni positive dei due semi-assi x e z: accenneremo con σ_1 il semipiano $x=0$ e con σ_2 il semipiano $z=0$; M è un punto qualunque di coordinate (x, y, z) variabile nello spazio S del diedro; $M_1(x_1 y_1 z_1)$ un altro punto fisso dello stesso spazio. Siano: M_1' la immagine di M_1 rispetto σ_1; M_1'' e M_1''' rispettivamente le immagini di M_1' ed M_1 rispetto σ_2 e diciamo r, r_1, r_2, r_3 le distanze del punto M da M_1, M_1', M_1'', M_1'''; sicchè abbiamo:

$$r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2; \; r_1^2=(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$
$$r_2^2=(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2; \; r_3^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2$$

Consideriamo ora le seguenti funzioni di x, y, z, armoniche in tutto S,

$$G=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\,; \qquad G'=-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}$$
$$G_1=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\,; \qquad G_3=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_3}\,.$$

Osservando che si ha:

$$\begin{array}{lll} \text{per} & x=0 & r=r_1\,,\quad r_2=r_3 \\ \text{»} & z=0 & r=r_3\,,\quad r_2=r_1 \end{array}$$

si deduce che sopra σ_1 e σ_2 la funzione G è tale che

$$G=\frac{1}{r}$$

La G è quindi la funzione di Green relativa allo spazio S; e mediante questa è possibile assegnare, in un punto qualunque del campo, il valore di una funzione uniforme in S e che all'infinito soddisfa a certe note condizioni di convergenza, allorchè sono noti il valore del $\varDelta_2$ in ogni punto del campo e i valori della funzione al contorno. Applicando una formola ben nota si ha:

$$2\pi u(x_1y_1z_1)=-\frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)u\,d\sigma_1-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)u\,d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G\right)\varDelta_2 u\,dS.$$

La funzione G′ soddisfa al contorno alle condizioni seguenti:

$$x=0\,,\ \frac{\partial G'}{\partial x}=\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\quad;\quad z=0\,,\ \frac{\partial G'}{\partial z}=\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,;$$

quindi la G′ è una funzione analoga a quella di Green relativa allo stesso spazio e che permette risolvere il problema precedente, allorchè però in superficie sono noti i valori della derivata normale di u; infatti si trova:

$$2\pi u(x_1y_1z_1)=-\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}d\sigma_1-\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial u}{\partial z}d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G'\right)\Delta_2\, u\, dS\,.$$

La funzione G_1, a sua volta, soddisfa al contorno alle condizioni:

$$x=0\quad,\quad \frac{\partial G_1}{\partial x}=\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\quad;\quad z=0\quad,\quad G_1=\frac{1}{r}\,,$$

e permetterà quindi di risolvere lo stesso problema, allorchè sul piano σ_1 si conoscono i valori della derivata normale di u e sul piano σ_2 i valori della funzione stessa: e si trova:

$$2\pi u(x_1y_1z_1)=-\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}d\sigma_1-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)u\,d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G_1\right)\Delta_2 u\,dS.$$

Così finalmente mediante la funzione G_3 potremo risolvere il problema per così dire complementare, quando cioè sono noti su σ_1 i valori di u e sopra σ_2 i valori della derivata normale.

2. Vogliasi determinare, nel punto $x_1\,y_1\,z_1$, la deformazione di questo diedro isotropo soggetto a forze qualunque di massa, allorchè sui due piani limiti sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e le componenti normali delle forze: si conoscono cioè:

$$\begin{array}{llll} \text{per} & x=0 & \text{le} & L\,,\ v\,,\ w \\ \text{e per} & z=0 & \text{le} & u\,,\ v\,,\ N\,. \end{array}$$

Come è ben noto la difficoltà maggiore del metodo consiste nel sapere assegnare la deformazione ausiliaria, in un punto generico $x\,,y\,,z$, di componenti $\xi\,,\eta\,,\zeta$ corrispondenti a forze di massa nulle e tali che in superficie sia:

$$x=0\,,\ L'_0=-2k\omega^2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\,,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,,\ \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,;$$

$$z=0\ ,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,,\ N''_0=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\,;$$

le quali assai agevolmente si trasformano in queste altre:

$$x=0\ ,\ \frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ ;$$

$$z=0\ ,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial\zeta}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\ .$$

La dilatazione cubica ϑ è una funzione armonica in S e poichè su σ_1 e σ_2 si ha:

$$\vartheta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0\ ,$$

sarà, in tutto S, $\vartheta=0$; quindi anche le componenti ξ,η,ζ di deformazione sono armoniche e la loro determinazione è un caso particolare dei problemi risoluti nel § precedente. Ma senza applicare le formule generali, basterà osservare che la funzione armonica $\frac{\partial G}{\partial x}$ è tale che:

$$\text{per } x=0,\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ \ ;\ \ \text{e per } z=0\ ,\ \frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ .$$

Sarà dunque:

$$\xi=-\frac{\partial G}{\partial x}\ .$$

Allo stesso modo si deduce:

$$\eta=-\frac{\partial G}{\partial y}\ \ ;\ \ \zeta=-\frac{\partial G}{\partial z}\ .$$

Determinata la deformazione ausiliaria, restano a determinare le forze da applicare in superficie perchè producano la deformazione precedentemente calcolata; e ciò si ottiene agevolmente dalle equazioni ai limiti. Infatti si ha già:

$$L'_0=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,$$

e poi:

$$M'_0=2k\omega^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0}\ \ ;\ \ N'_0=2k\omega^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial z}\right)_{x=0}\ .$$

Ma un breve calcolo mostra che:

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{2}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\ \ ;\ \ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial z}\right)_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{2}{r_3}-\frac{1}{r}\right)$$

Quindi:

$$M_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{2}{r_3} - \frac{1}{r}\right) \quad ; \quad N_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{2}{r_3} - \frac{1}{r}\right).$$

Un calcolo analogo dà pure:

$$L_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \; ; \; M_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \; ; \; N_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

3. Questa deformazione ausiliaria permette di assegnare la dilatazione cubica Θ, corrispondente alla effettiva deformazione, nel punto $x_1\, y_1\, z_1$.

Basta applicare infatti la formula del Betti, la quale nel caso in quistione si riduce alla:

$$\begin{aligned} 4\pi\Omega^2\Theta(x_1 y_1 z_1) = & \frac{1}{k}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x}\right) L\, d\sigma_1 + \frac{1}{k}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z}\right) N\, d\sigma_2 \\ & + \int\left\{\left(\frac{1}{k} M_0' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y}\right) v + \left(\frac{1}{k} N_0' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}\right) w\right\} d\sigma_1 \\ & + \int\left\{\left(\frac{1}{k} L_0'' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}\right) u + \left(\frac{1}{k} M_0'' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}\right) v\right\} d\sigma_2 . \end{aligned}$$

Abbiamo invero supposte nulle le forze di massa; ma con ciò, come è noto, non si restringe la generalità del problema. La formola che darebbe darebbe nel caso generale la dilatazione, conterrebbe ancora tre altri termini relativi alle forze di massa.

Notando che:

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=0} = 2\frac{\partial \frac{1}{r_3}}{\partial x_1} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=0} = 2\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z_1}$$

e che:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1\, \partial y_1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x\, \partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1\, \partial z_1}; \text{ ecc.}$$

e ponendo:

$$\frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} P = \frac{1}{k}\int \frac{L\, d\sigma_1}{r_3} + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\int v\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right) d\sigma_1 - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1}\int w\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r}\right) d\sigma_1 ;$$

$$\frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} R = \frac{1}{k}\int \frac{N\, d\sigma_2}{r_1} - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\int u\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right) d\sigma_2 + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\int v\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) d\sigma_2$$

risulta semplicemente:

$$\Theta = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1} \right).$$

Si osserverà che P e Q sono funzioni armoniche in tutto il diedro e risultano composte di funzioni potenziali di determinate distribuzioni superficiali (fatte sulle facce del diedro) e delle loro derivate.

4. Cognita la dilatazione cubica, la ricerca di u, v, w si riconduce ad uno dei problemi risoluti nel § 1. Infatti abbiamo:

$$\Delta_2 u + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1} \right) = 0.$$

Sul piano $z_1 = 0$ sono noti i valori di u e sul piano $x_1 = 0$ essendo soddisfatta la:

$$\frac{1}{k} L + 2\omega_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\, \Theta = 0.$$

sarà noto il valore della derivata normale. Può quindi ritenersi conosciuta la u stessa nel punto $x_1 y_1 z_1$. La ricerca di w dipende da un problema del tutto analogo. La ricerca di v, della quale è noto il Δ_2, dipende da un problema più semplice essendo noti i suoi valori sopra σ_1 e σ_2. Gli spostamenti all'infinito si suppongono nulli.

Le formole che si ottengono sono abbastanza semplici; ma non è qui il caso di svilupparle completamente.

5. Supponiamo invece che sui due piani limiti siano conosciute la componente normale dello spostamento e le componenti tangenziali delle forze; cioè siano note:

per $x = 0$ le u, M, N;
per $z = 0$ le L, M, w.

Dovremo determinare una deformazione ausiliaria di componenti ξ, η, ζ tale che al contorno siano soddisfatte le condizioni:

$$x = 0 \;,\; \xi = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \;,\; M'_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y} \;,\; N'_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z};$$

$$z = 0 \;,\; L''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z} \;,\; M''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \;,\; \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

A queste agevolmente si sostituiscono le altre equivalenti:

$$x=0\ ,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\ ,\ \frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ;$$

$$z=0\ ,\ \frac{\partial\xi}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ,\ \frac{\partial\eta}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\ ,\ \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Decomponiamo la deformazione ξ, η, ζ in altre due $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ e $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ e le $\zeta_1\,\eta_1\,\zeta_1$ siano armoniche in S e al contorno soddisfino alle condizioni precedenti; mentre le $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ soddisfino alle equazioni indefinite di equilibrio e siano nulle al contorno. Nè per la ricerca della prima deformazione occorre seguire il metodo generale del § 1; perchè un facile calcolo mostra che si può prendere:

$$\xi_1=-\frac{\partial G'}{\partial x}\quad;\quad \eta_1=-\frac{\partial G'}{\partial y}\quad;\quad \zeta_1=-\frac{\partial G'}{\partial z}$$

Questa deformazione è quindi priva di dilatazione e di rotazione e allora si vede subito che alle equazioni ulteriori può soddisfarsi ponendo $\xi_2=\eta_2=\zeta_2=0$: ond'è:

$$\xi=-\frac{\partial G'}{\partial x}\quad;\quad \eta=-\frac{\partial G'}{\partial y}\quad;\quad \zeta=-\frac{\partial G'}{\partial z}.$$

Dopo ciò la risoluzione del problema non presenta più alcuna difficoltà.

Lo stesso può dirsi per gli altri casi considerati dal prof. Somigliana. Con pari facilità si possono trattare problemi analoghi relativi alla deformazione di un triedro retto isotropo.

Fisica. — *Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua.* Nota preventiva di A. Marcacci, presentata dal Socio Luciani.

Al congresso internazionale di Fisiologia di Torino (settembre 1901) feci conoscere alcuni risultati da me ottenuti studiando il modo di comportarsi di certi gas (azoto e idrogeno) quando sieno lasciati a lungo nell'acqua, sia soli e allo stato di purezza, sia mescolati a dell'ossigeno. Ecco le conclusioni alle quali giungevo dopo tale studio.

I. Se, a periodi regolari, si esamina l'idrogeno stagnante sull'acqua comune sotto una campana, vi si trova, nei primi giorni, dell'ossigeno in piccola quantità: questo gas sparisce però dopo un certo tempo, e non riappa-

risce più finchè vi è idrogeno sotto la campana. In questo tempo dunque, come si crede generalmente dai fisici, non è penetrata aria nella campana.

II. *a*) Se invece d'idrogeno puro si mette sotto la campana una mescolanza di idrogeno e di ossigeno, questi gas spariscono dopo un certo tempo: resta un gas, in piccola quantità, che è certamente dell'azoto.

b) È allora, dopo questo primo periodo, che l'ossigeno riappare, aumenta lentamente, e raggiunge la proporzione del 15 al 20 %. Ma questa mescolanza s'è formata a spese dei gas disciolti nell'acqua, e che ne sono usciti in momenti differenti, e non già a spese dell'aria in natura, che sarebbe penetrata, come tale, dal di fuori.

III. Si può ottenere naturalmente quest'ultimo risultato (realizzando direttamente la fase *a*), se, invece d'una mescolanza d'idrogeno e di ossigeno, si mette sotto la campana, fin dal principio dell'azoto puro: finisce col formarsi un'atmosfera che ha la composizione dell'aria.

Queste erano le conclusioni generali alle quali venivo nella comunicazione fatta a Torino: aggiungevo che molte circostanze possono far variare la fisonomia dei fenomeni, soprattutto rispetto all'idrogeno: citavo, ad es., una soluzione satura di Cl Na, messa al posto dell'acqua comune: in questo caso nè l'idrogeno puro, nè un miscuglio detonante che vi riposino sopra, anche per lunghissimo tempo, cambiano sensibilmente nella loro fisonomia.

Quanto alla spiegazione dicevo testualmente così: « Per il momento io mi credo autorizzato ad emettere l'ipotesi che l'idrogeno, in presenza dell'acqua ordinaria, possa combinarsi coll'ossigeno: il fenomeno non avrebbe luogo nell'acqua alterata in qualsiasi modo. Questi fatti ci obbligano a modificare le nostre idee sulla diffusione di certi gas: il fenomeno non è solamente d'ordine fisico, ma anche d'ordine chimico ».

Dopo questa comunicazione continuai, com'è naturale, i miei studî sui gas che rimangono a lungo nell'acqua: ma rivolsi più specialmente i miei sforzi a verificare l'ipotesi annunziata, se cioè la combinazione dell'idrogeno e dell'ossigeno avvenisse in seno all'acqua: credo oggi di essere autorizzato, dall'evidenza dei fatti raccolti, ad annunziare che questa ipotesi è pienamente confermata.

Se, io pensai, l'idrogeno, sciogliendosi nell'acqua, si combina con l'ossigeno di questa, collocando e mantenendo a lungo sull'acqua un'atmosfera di idrogeno, deve venire un momento nel quale l'acqua stessa non deve contenere più ossigeno: e ciò si potrà verificare estraendo ed analizzando i gas di quest'acqua.

Estrassi ed analizzai, per le prime, due acque; una delle quali era rimasta per più di un anno in rapporto con un'atmosfera di idrogeno, e l'altra, un egual tempo e nelle identiche condizioni, con una di azoto: quest'ultima, come ho già detto, era stata inquinata da ossigeno (20 %): l'idrogeno ne era privo da parecchi mesi. Analizzati i gas estratti dalle due acque trovai:

nell'acqua all'idrogeno cc. 0,8 di ossigeno per litro d'acqua, e cc. 4,3 dello stesso gas, per litro d'acqua sull'azoto.

L'impoverimento in ossigeno dell'acqua all'idrogeno era più che evidente: riscontrai il fatto anche in altre acque sottoposte ad un'atmosfera di idrogeno: tracce di ossigeno però le trovai sempre. Perchè, in sì lungo tempo, nell'esperimento citato, tutto l'ossigeno non era scomparso? Ciò poteva derivare da due fatti: o dalla continua rifornitura in ossigeno che l'acqua delle campane poteva ricevere dall'acqua esterna dei bacili in cui quelle eran rovesciate, e che era in contatto coll'aria; o dal fatto che gli strati superiori della colonna d'acqua delle campane, pur essendo privi di ossigeno, ne venissero a ricevere, durante la forte aspirazione della campana a vuoto, dagli strati inferiori che ne possedevano. La presa infatti veniva praticata a 5-6 cm. dalla superficie dell'acqua, che si sollevava in colonna per 12 a 14 cm. sul livello dell'acqua dei bacili.

Pensai allora di ricorrere all'esame dell'acqua di un gazometro di vetro, a perfetta tenuta, nel quale era raccolto, da molto tempo, dell'idrogeno: qui la rifornitura di ossigeno non era possibile: ebbene, *in quest'acqua trovai appena tracce di ossigeno.*

Incoraggiato da questi risultati, feci un esperimento che mi doveva dare (se l'ipotesi, come tutto faceva sperare, era vera), un risultato definitivo. In un lungo cilindro, ripieno prima d'acqua comune e rovesciato sul mercurio, misi dell'idrogeno: in queste condizioni, come nel gazometro, la colonna d'acqua era separata completamente dall'aria esterna. Quando, coll'analisi dell'idrogeno, potei verificare la sparizione completa di quelle piccole tracce d'ossigeno che vi soglion penetrare in principio, e la cessazione della diminuzione di volume dell'atmosfera gassosa, estrassi ed analizzai i gas di tutta la colonna d'acqua che aveva subìta l'azione dell'idrogeno: vi trovai, come sempre, dell'azoto e dell'idrogeno, *ma non vi era più traccia di ossigeno.*

Inutile aggiungere che in tutte queste ricerche (oltre le precauzioni necessarie perchè le acque da analizzarsi non venissero mai in contatto coll'aria), furono praticate sempre delle analisi gazometriche in campane di quella stessa acqua che era stata sottoposta all'azione dell'idrogeno; ebbene queste analisi, com'era da aspettarsi, dettero sempre il 30 o il 31 °/₀ di ossigeno, e il 6,5-7 per litro di questo gas: ciò che collima coi dati fornitici dal Bunsen.

La mia ipotesi poteva dunque dirsi completamente confermata: ed è a questo solo che limito, per oggi, la mia comunicazione. Nel resoconto completo che, lo spero, potrò dar presto alla stampa, dirò delle molte e svariate circostanze che possono modificare o ammettere il fenomeno da me trovato, e delle conseguenze che può portare sul modo di considerare la solubilità e la diffusione dei gas, e più specialmente dell'idrogeno, nell'acqua.

Fisica. — *Sulla influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Socio Blaserna.

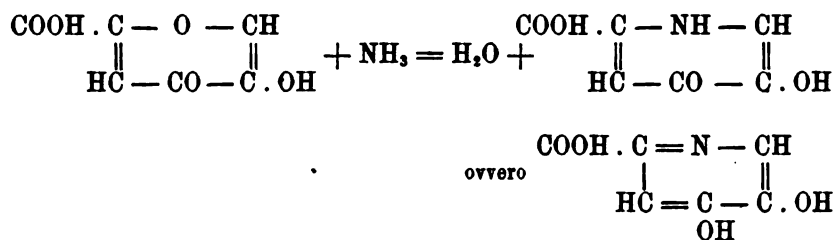
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine.* Nota di A. Peratoner, presentata dal Socio E. Paternò.

Nei suoi lavori interessantissimi Ost [1] dimostrò che i derivati dell'acido meconico, contenenti il nucleo del γ- pirone, possono essere trasformati in composti piridici seguendo due vie diverse. La prima è data dal l'azione dell'ammoniaca, una reazione che secondo Lieben ed Haitinger [2] e v. Pechmann [3] si interpreta ammettendo che l'atomo di ossigeno dell'anello pironico venga sostituito dal gruppo imidico generandosi γ-piridoni, i quali, come è noto, presentano il fenomeno della tautomeria. P. es.

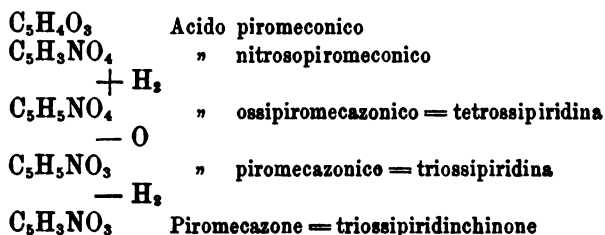
Ac. comenico [4] = ossipironcarbonico — Ac. comenaminico = ossipiridoncarbonico

$$\begin{array}{l} COOH.C - O - CH \\ \quad\; \| \qquad\qquad \| \\ \quad HC - CO - C.OH \end{array} + NH_3 = H_2O + \begin{array}{l} COOH.C - NH - CH \\ \quad\; \| \qquad\qquad\quad \| \\ \quad HC - CO - C.OH \end{array}$$

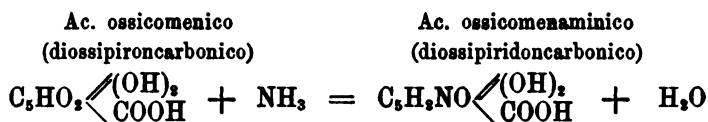
$$\text{ovvero} \quad \begin{array}{l} COOH.C = N - CH \\ \quad\; | \qquad\qquad \| \\ \quad HC = C - C.OH \\ \qquad\quad\;\, OH \end{array}$$

Il secondo modo in cui avviene la trasformazione, fin oggi non è stato chiarito. Ost partendo dal nitrosocomposto doppio, giallo dell'acido piromeconico, indicato da lui come acido nitroso-dipiromeconico $C_5H_3O_3.NO + C_5H_4O_3$, e riducendolo con acido solforoso, ebbe un prodotto contenente 2 atomi di idrogeno in più, che aveva la composizione di una tetrossipiridina $C_5H_5NO_4$ e venne chiamato acido *ossipiromecazonico*. Questo per ulteriore riduzione

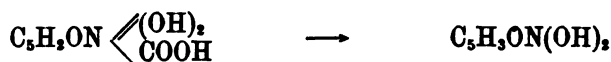
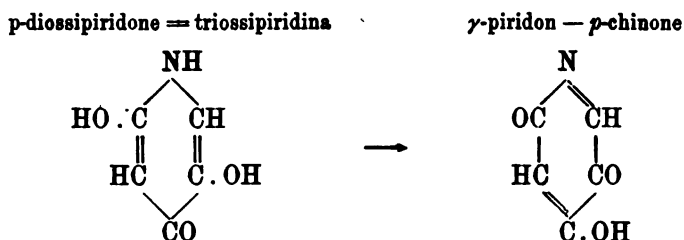
[1] Journal f. prakt. Chemie *19*, 177; *27*, 257; *29*, 57.
[2] Monatshefte *5*, 363; *6*, 307.
[3] Pechmann u. Baltzer. Berichte *24*, 3151.
[4] Per la costituzione dell'acido comenico confr. la Memoria di Peratoner e Leonardi. Gazz. Chim. *30*, I, 539.

con acido jodidrico cedendo un atomo di ossigeno forniva la sostanza $C_5H_5NO_3$, detta acido *piromecazonico* o triossipiridina, la quale finalmente all'ossidazione perdeva 2 atomi di idrogeno trasformandosi nel chinone rosso, il *piromecazone* $C_5H_3NO_3$.

$C_5H_4O_3$	Acido piromeconico
$C_5H_3NO_4$	» nitrosopiromeconico
$+H_2$	
$C_5H_5NO_4$	» ossipiromecazonico = tetrossipiridina
$-O$	
$C_5H_5NO_3$	» piromecazonico = triossipiridina
$-H_2$	
$C_5H_3NO_3$	Piromecazone = triossipiridinchinone

Fra queste sostanze l'acido piromecazonico o triossipiridina di Ost è indubbiamente un piridone sostituito, dapoichè può anche prepararsi per la prima via sopraindicata partendo dall'acido comenico (ossipironcarbonico). Infatti, trasformando questo in ossiderivato (diossi-pironcarbonico) e facendo poi reagire l'ammoniaca si ricava un acido, il cui nucleo deve essere piridonico

Ac. ossicomenico (diossipironcarbonico) — Ac. ossicomenaminico (diossipiridoncarbonico)

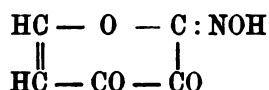
$$C_5HO_2\begin{cases}(OH)_2\\COOH\end{cases} + NH_3 = C_5H_2NO\begin{cases}(OH)_2\\COOH\end{cases} + H_2O$$

e da cui per eliminazione del carbossile si giunge all'identico acido piromecazonico o triossipiridina di Ost

$$C_5H_2ON\begin{cases}(OH)_2\\COOH\end{cases} \longrightarrow C_5H_3ON(OH)_2$$

Siccome questo corpo si comporta come l'idrochinone (reazione azzurra col cloruro ferrico; formazione di chinone), Ost lo considerò « senza alcun dubbio come costituito analogamente alle sostanze aromatiche parasostituite ». Pechmann [1] gli attribuì la seguente formula, che è anche riportata nei manuali più recenti [2]:

[1] Stokes e Pechmann. Berichte *19*, 2710.

[2] P. es. Roscoe-Schorlemmer's Lehrbuch von Brühl, Hjelt, Aschan. VII Band, 5 Theil, p. 163.

Quanto all'acido ossi-piromecazonico, da cui il composto precedente si forma per riduzione, sembrò dubbio ad Ost se fosse tetrossipiridina. Egli fu inoltre del parere che « dovesse decidersi ancora la quistione, se l'acido « nitrosopiromeconico, da cui questa tetrossipiridina prende origine, fosse « veramente un nitroso-composto, non potendosi comprendere in qual modo « ne risultasse un corpo con l'azoto così saldamente legato come la triossi- « piridina » ([1]).

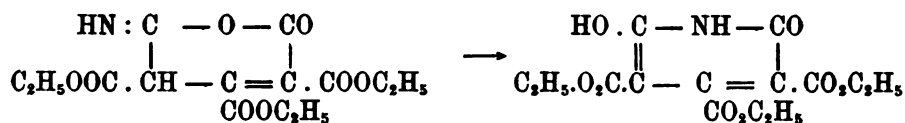
Come ho dimostrato in una Nota precedente ([2]), l'acido nitrosopiromeconico è però un isonitroso-derivato della forma tautomera chetonica dell'ossipirone cui compete la formula:

$$\begin{array}{l} HC - O - C:NOH \\ \;\| \qquad\qquad\;\; | \\ HC - CO - CO \end{array}$$

Partendo da questa costituzione nota e considerando, come dianzi ho detto, che è indubbiamente un piridone l'acido piromecazonico, cui si giunge, non è difficile avere una spiegazione attendibile del modo come avviene la formazione dei composti piridici cennati; dapoichè il problema si riduce allo studio della genesi e della costituzione del prodotto intermedio, l'acido ossipiromecazonico o tetrossipiridina di Ost.

Dalla superiore formula si rileva che nell'isonitroso-ossipirone il gruppo ossimidico è legato ad un atomo di carbonio, il quale resta unito inoltre all'ossigeno dell'anello pironico. Ammettendo che avvenga fra questi gruppi una trasposizione, quello ossimidico potrà entrare nel nucleo, mentre l'ossigeno diventerà carbonilico.

Supporre un tale cambiamento di posto, e la conseguente trasformazione di un anello pironico in piridico, non ha nulla di arbitrario essendosi constatati casi del tutto analoghi che dal presente vengono ad essere confortati.

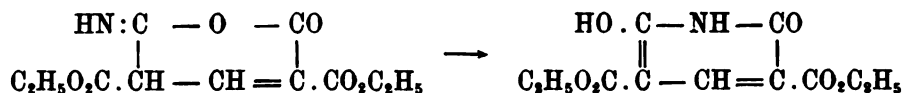
Infatti recentemente Errera ([3]) dalle sue ricerche sintetiche sulle ossipiridine è condotto a ritenere che un derivato azotato della cumalina (α-pirone), da lui preparato, debba considerarsi come *isoimide;* la quale pel solo riscaldamento si muta in composto ossipiridico:

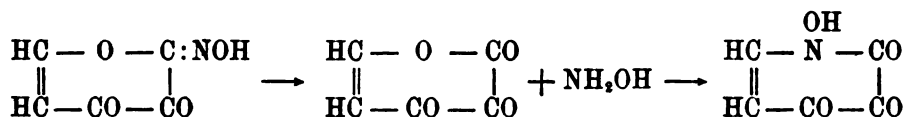
$$\begin{array}{c} HN:C - O - CO \\ | \qquad\quad | \\ C_2H_5OOC.CH - C = C.COOC_2H_5 \\ COOC_2H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} HO.C - NH - CO \\ \| \qquad\quad | \\ C_2H_5.O_2C.C - C = C.CO_2C_2H_5 \\ CO_2C_2H_5 \end{array}$$

([1]) Journ. f. prakt. Chemie *27*, 273; *29*, 67.

([2]) Questi Rendiconti della seduta del 16 marzo 1902.

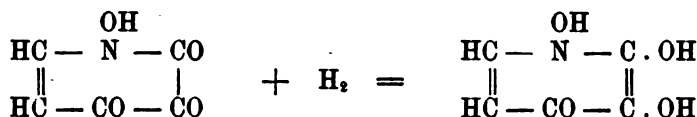
([3]) Gazz. Chim. *32*, 1; Berichte *34*, 3700. Errera e Perciabosco. Gazz. Chim. *32*, 9.

L'autore, tenendo presenti i lavori di Hoogewerff e van Dorp [1] sulle isoimidi, dimostra le ragioni di questa interpretazione e viene altresì alla conclusione che le varie sostanze azotate, preparate da Guthzeit [2] per azione di ammoniaca ed ammine sull'etere etossicumalindicarbonico, anche esse sono isoimidi dell'α-pirone, piuttosto che imidi. Per opera del calore si trasformano in piridoni; e per quanto forse questa isomerizzazione rappresenti un fenomeno complesso, pure il risultato finale andrebbe espresso p. es. dallo schema:

$$\begin{array}{l} \mathrm{HN\!:\!C \;-\; O \;-\; CO} \\ \mathrm{C_2H_5O_2C\,.\,CH - CH = C\,.\,CO_2C_2H_5} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{HO\,.\,C - NH - CO} \\ \mathrm{C_2H_5O_2C\,.\,C - CH = C\,.\,CO_2C_2H_5} \end{array}$$

La trasposizione molecolare che io ammetto subisca l'isonitroso-ossi-γ-pirone corrisponde a quelle precedenti. È probabile che essa sia preceduta da addizione degli elementi dell'acqua, essendochè avviene già per sola ebollizione con acqua o con alcool; ma procedendo nel modo più blando, quando vi agisce l'acido solforoso, si può immaginare pure che si formi, per scissione, idrossilamina, la quale allo stato nascente reagirebbe con l'atomo di ossigeno del nucleo precisamente come l'ammoniaca fa con molti derivati del γ-pirone.

$$\begin{array}{l} \mathrm{HC - O - C\!:\!NOH} \\ \mathrm{\|\qquad\qquad\;\; |} \\ \mathrm{HC - CO - CO} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{HC - O - CO} \\ \mathrm{\|\qquad\qquad |} \\ \mathrm{HC - CO - CO} \end{array} + \mathrm{NH_2OH} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{\qquad\;\; OH} \\ \mathrm{HC - N - CO} \\ \mathrm{\|\qquad\qquad |} \\ \mathrm{HC - CO - CO} \end{array}$$

Nel primo stadio della reazione dovrebbe quindi risultare un 1 . 2 . 3 — trichetone azotato. Come tale dovrà forse considerarsi l'isomero dell'acido nitrosopiromeconico che, secondo Ost, si forma da quest'ultimo, quando viene conservato secco in vaso chiuso [3].

In presenza d'acqua però la reazione va più oltre. Il trichetone addiziona subito una molecola di idrogeno, ciò che riesce nel modo più facile in presenza dell'acido solforoso riducente, per trasformarsi in un triossi-piridone stabile contenente azoto ossimidico, mentre fra i due atomi di carbonio si stabilisce legame doppio.

$$\begin{array}{l} \mathrm{\qquad\;\; OH} \\ \mathrm{HC - N - CO} \\ \mathrm{\|\qquad\qquad |} \\ \mathrm{HC - CO - CO} \end{array} + \mathrm{H_2} = \begin{array}{l} \mathrm{\qquad\;\; OH} \\ \mathrm{HC - N - C\,.\,OH} \\ \mathrm{\|\qquad\qquad \|} \\ \mathrm{HC - CO - C\,.\,OH} \end{array}$$

(1) Receuil d. Pays-Bas *11*, 84; *12*, 12; *13*, 93; *14*, 252.

(2) Berichte *26*, 2795. Annalen *285*, 35.

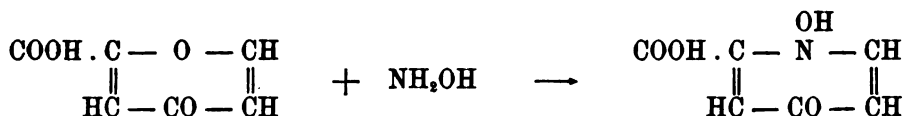
(3) Journ. f. prakt. Chemie *27*, 272, nota 2 a piè di pagina.

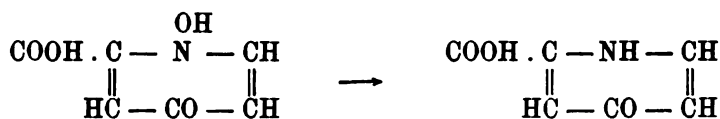
Questo modo di considerare l'acido ossipiromecazonico (tetrossipiridina) come composto ossimidico con l'azoto nel nucleo, corrisponde perfettamente al suo comportamento chimico. Per ebollizione con anidride acetica ho potuto ricavarne un derivato *triacetilico* dal p. f. 123-124°, con cloruro di benzoile un etere *tribenzoilico*, p. f. 162-163°, prodotti che facilmente vengono saponificati dall'alcool bollente ridando il composto primitivo.

Che dei tre ossidrili uno si comporta in modo essenzialmente diverso dagli altri due, resta provato dalla riduzione fatta da Ost (con HI oppure $Sn + HCl$), nella quale un solo atomo di ossigeno (quello legato all'azoto) viene eliminato con somma facilità, laddove gli ossidrili legati agli atomi di carbonio resistono anche a riduzioni ulteriori (1). Il prodotto finale è sempre l'acido piromecazonico (triossipiridina di Ost).

Che del resto l'acido ossi-piromecazonico è già un derivato della piridina, risulta chiaramente « dal suo carattere chimico che coincide in tutto con quello dell'acido piromecazonico », eccettuata naturalmente la facile riducibilità del primo. Da entrambi l'azoto non può eliminarsi per scissione, entrambi colorano in azzurro-violetto il cloruro ferrico e forniscono con cloruro di bario ed ammoniaca il precipitato caratteristico azzurro-fior d'aliso.

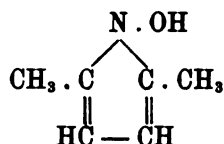
Un ulteriore riconferma del mio modo di rappresentare l'acido ossi-piromecazonico come piridone con ossidrile legato all'azoto del nucleo, la si ricava dalla esistenza e dal comportamento di pochi composti analoghi finora noti. Ost ne ebbe fra le mani qualcuno senza deciderne la costituzione (2). Infatti, per l'azione dell'idrossilamina sull'acido comanico (pironcarbonico) preparò una sostanza che ora dobbiamo considerare come acido N *ossi-piridoncarbonico*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{COOH.C} & - & \mathrm{O} & - & \mathrm{CH} \\ \| & & & & \| \\ \mathrm{HC} & - & \mathrm{CO} & - & \mathrm{CH}\end{array} + \mathrm{NH_2OH} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{OH} & & \\ \mathrm{COOH.C} & - & \mathrm{N} & - & \mathrm{CH} \\ \| & & & & \| \\ \mathrm{HC} & - & \mathrm{CO} & - & \mathrm{CH}\end{array}$$

e da questa, per eliminazione del carbossile, un corpo che deve ritenersi *N ossi-piridone*. Queste sostanze, come Ost stesso constatò, si comportano alla riduzione precisamente come l'acido ossipiromecazonico, cedendo con facilità un solo atomo d'ossigeno, epperò dovranno avere quest'atomo legato all'azoto.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{OH} & & \\ \mathrm{COOH.C} & - & \mathrm{N} & - & \mathrm{CH} \\ \| & & & & \| \\ \mathrm{HC} & - & \mathrm{CO} & - & \mathrm{CH}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} \mathrm{COOH.C} & - & \mathrm{NH} & - & \mathrm{CH} \\ \| & & & & \| \\ \mathrm{HC} & - & \mathrm{CO} & - & \mathrm{CH}\end{array}$$

(1) Loco cit. p. 258, 270.
(2) Journ. f. prakt. Chemie *29*, 378.

Ho ripreso lo studio dell'azione dell' idrossilamina sopra alcuni composti γ- pironici e posso comunicare intanto, che mentre l'acido comenico (ossipironcarbonico), come è noto, rimane inalterato, il suo etere dietilico fornisce un derivato ossimidico, il cui azoto con somma probabilità trovasi nel nucleo. Colora in rosso, fino rosso-bruno, il percloruro di ferro, reazione cromatica questa che ritengo comune appunto a quei composti ciclici, del cui anello fa parte un atomo di azoto ossimidico.

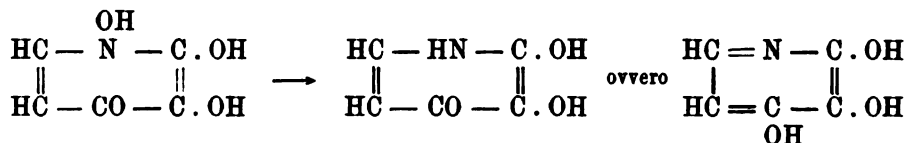
Infatti ho potuto constatarla per l'ossipirrolo di Knorr [1] ed alcuni suoi derivati,

```
          N . OH
         /      \
CH3 . C          C . CH3
      ||         ||
      HC   —     CH
```

che tirerò pure nel campo delle mie ricerche, e per lo stesso acido ossipiromecazonico.

Facendo con questo il saggio in piccolo, non si ha altro che la nota colorazione azzurra; ma adoperando eccesso di soluzione satura e facendovi cadere a gocce il cloruro ferrico, comparisce dapprima il bel colorito rosso e quindi si precipita un sale rosso, che soltanto con eccesso del reattivo si ridiscioglie cambiandosi il colore in azzurro. L'analisi del sale porta alla formula $Fe(C_5H_4O_4N)_3$. Se ne deduce che anche di fronte al cloruro ferrico uno dei tre ossidrili dell'acido ossipiromecazonico ha un comportamento particolare, e che quest'ossidrile dovrà essere quello ossimidico.

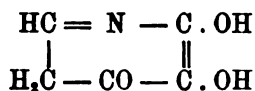
In quanto all'acido piromecazonico o triossipiridina di Ost, che dal composto precedente si ottiene per eliminazione dell'ossigeno ossimidico mediante la riduzione, la formula di costituzione assegnatagli da von Pechmann deve modificarsi in modo, che i due ossidrili rimanenti si trovino fra loro in posizione *orto*, considerandosi per conseguenza questo corpo come *αβ-diossi* — γ-piridone.

Tuttavia è dubbio che la cennata riduzione proceda nel modo semplice, espresso dallo schema:

```
       OH
HC —  N  — C . OH          HC — HN — C . OH             HC = N — C . OH
||          ||       ──>    ||         ||        ovvero   |        ||
HC — CO — C . OH           HC — CO — C . OH             HC = C — C . OH
                                                              OH
```

Queste due formule tautomere dell'acido piromecazonico richiederebbero la possibilità di ricavarne un derivato triacetilico, mentre Ost non riuscì a

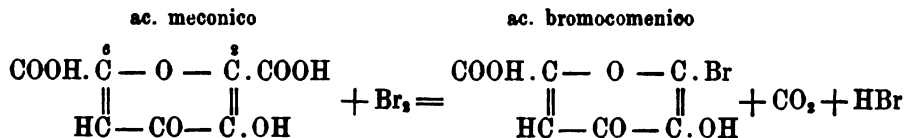
[1] Annalen der Chemie *236*, 300.

preparare che il diacetilico, sebbene spingesse l'azione dell'anidride acetica sino a 220°. Di questo fatto, e di tutte le altre reazioni della triossipiridina darebbe ragione una formula di costituzione, dalla quale si rilevi uno spostamento dell'atomo di idrogeno imidico, come:

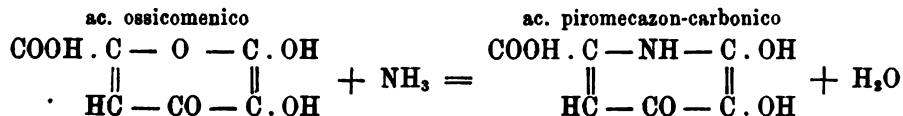
$$\begin{array}{l} HC = N - C.OH \\ \quad | \qquad\quad \| \\ H_2C - CO - C.OH \end{array}$$

e che, pur essendo più verosimile delle altre, per ora dò con riserva.

La posizione $\alpha\beta$ degli ossidrili può d'altronde essere dimostrata mediante la genesi di questo composto dall'acido comenico che ho ricordato in principio di questa nota. L'acido comenico fornisce un bromoderivato, identico a quello che si ottiene dall'acido meconico per sostituzione del bromo al carbossile in posizione 2, come ho discusso in un lavoro precedente [1].

ac. meconico — ac. bromocomenico

$$\begin{array}{l} COOH.\overset{6}{C} - O - \overset{2}{C}.COOH \\ \quad \| \qquad\qquad \| \\ HC - CO - C.OH \end{array} + Br_2 = \begin{array}{l} COOH.C - O - C.Br \\ \quad \| \qquad\qquad \| \\ HC - CO - C.OH \end{array} + CO_2 + HBr$$

Questo prodotto alogenato scambia poi, per azione dell'acqua, il bromo con ossidrile dando l'acido ossicomenico; sul quale agendo l'ammoniaca, si forma il composto piridonico corrispondente, che è il derivato carbossilico dell'acido piromecazonico.

ac. ossicomenico — ac. piromecazon-carbonico

$$\begin{array}{l} COOH.C - O - C.OH \\ \quad \| \qquad\qquad \| \\ HC - CO - C.OH \end{array} + NH_3 = \begin{array}{l} COOH.C - NH - C.OH \\ \quad \| \qquad\qquad \| \\ HC - CO - C.OH \end{array} + H_2O$$

Epperò nel composto che se ne ricava per eliminazione di anidride carbonica, gli ossidrili devono occupare pure le posizioni sopraindicate.

Finalmente il chinone rosso, che dall'acido piromecazonico si ottiene per ossidazione, detto *piromecazone*, dovrà essere un *orto*chinone e contemporaneamente 1.2.3- trichetone. A quale delle due formule più probabili

$$\begin{array}{l} HC - NH - CO \\ \| \qquad\qquad | \\ HC - CO - CO \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{l} HC = N - CO \\ | \qquad\qquad | \\ H_2C - CO - CO \end{array}$$

sia da darsi la preferenza, spero potere decidere mediante nuove esperienze che ho iniziato sopra i varii prodotti accennati in questa Nota.

(1) Peratoner e Leonardi. Gazz. chim. *30*, I, 562.

Geologia. — *I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia.* Nota del dott. Alessandro Martelli, presentata dal Corrispondente De Stefani.

Ad oriente dell'antica Salona e, in modo più preciso, alle falde delle alture cretacee di Clissa, ha principio la formazione eocenica, che di là si distende fino a costituire tutta la costa spalatina.

I terrenici eoceni della Dalmazia sono poco noti e della ricchissima fauna nummulitica dei dintorni di Spalato nemmeno si fa cenno; perciò ne ho intrapresa la illustrazione giovandomi degli abbondanti materiali raccolti sul posto dal prof. De Stefani e da me.

A Salona il calcare nummulitico poggia direttamente e in concordanza sulla Creta superiore e presenta, oltre un numero non trascurabile di piccole *Orbitoides*, esemplari delle seguenti specie:

(r) *Nummulites Guettardi* d'Arch. et H.
(r) » *striata* d'Orb. var. *minor* d'Arch. et H.
(c) » *variolaria* Sow.
(r) » *Heberti* d'Arch. et H.
(r) » *Heeri* de la Harp.
(c) » *Lucasana* Defr. var. *obsoleta* de la Harp.
(c) » *Lucasana* Defr. var. *depressa* d' Arch. et H.
(c) » *Lucasana* Defr. var. *granulata* de la Harp.
(c) » *perforata* d' Orb. var. *obesa* Leym.
(c) *Nummulites perforata* d' Orb. var. *Renevieri* de la Harp.
(c) » *perforata* d' Orb. var. *granulata* Tell.
(c) *Assilina mamillata* d'Arch. et H. var. *plicata* de la Harp.
(c) » *exponens* Sow. var. *plicata* de la Harp.
(c) » *exponens* Sow. var. *granulosa* d'Arch.
(r) *Operculina subthouini* Tell.
(r) » *Thouini* d'Orb.
(r) » *ammonea* Leym.

Tenendo presente che a Salona le nummuliti granulate sono assai bene rappresentate, mentre in modo assoluto vi mancano le *Alveoline* e vi difettano le forme più grandi delle nummuliti non granulose a filetti settali semplici, si viene ad escludere tanto il livello più basso dell' Eocene medio quanto il più alto, e a riferire i terreni di Salona alla parte media di detto Eocene medio.

Sovrastante al calcare nummulitico ora considerato, dirigendosi verso Spalato, si osservano situati in largo sinclinale tra Salona e Monte Marian, strati quasi orizzontali di marne ad *Helmintoida* alternate con arenarie, e, fra di essi, una brecciola che viene poi a differenziarsi in un vero e proprio calcare screziato, allorchè i materiali che lo costituiscono divengono più uniti e più intimamente fra loro cementati. Il passaggio dalla parte media a quella superiore dell' Eocene medio, si può osservare a Spalato, dove si ha un calcare marnoso col seguente aggregato di nummuliti, oltre alla comunanza di quelle forme già citate nel calcare di Salona.

(r) *Nummulites Tchihatcheffi* d'Arch. et H.
(r) » *complanata* Lamk.
(r) » *latispira* Savi e Menegh.
(r) » *distans* Desh.
(c) » *Guettardi* d' Arch. et H.
(c) » *biarritzensis* d'Arch.
(c) *Nummulites Lucasana* Defr. (tipo)
(c) » *perforata* d'Orb. var. *aturensis* d' Arch. et H.
(c) » *subitalica* Tell.
(c) » *italica* Tell.
(c) *Assilina* sp.
(c) *Orbitoides* sp.

Dove la formazione eocenica mostra tutta la sua potenza e raggiunge il suo massimo è nel Monte Marian, che, a guisa di promontorio segna l'estremità nord-occidentale della zona da noi studiata. Esso è originato da una piega parallela al littorale ed è per metà eroso dal mare; presenta una successione di strati i quali, specialmente nel fianco occidentale e meridionale, si arrestano a picco con le loro testate ed hanno un'inclinazione costante a nord-est di 35°-40°.

Il calcare che lo costruisce risulta di un impasto di grosse foraminifere, di briozoi, coralli, echini, piccoli lamellibranchi ed altri fossili, i quali spesso si rivelano sulle superfici corrose della roccia. In tale calcare abbiamo notato come le forme del gruppo della *Nummulites distans* (*N. Tchihatcheffi — N. complanata, N. latispira — N. distans* ecc.) si mostrino in numero abbondante e pari a quello delle già citate varietà della coppia *N. Lucasana — N. perforata,* e come non difettino neppure i rappresentanti delle seguenti specie:

Foraminifere:

Nummulites subdiscorbina de la Harp.
» *discorbina* Schloth.
» *discorbina* Schloth. var. *La Harpei* Martel.
» *striata* d'Orb.
» *contorta* Desh.
Nummulites contorta Desh. var. *Viquesnelii* d'Arch. et H.
» *curvispira* Menegh.
» *Gizehensis* Ehr.
» *Gizehensis* Ehr. var. *Ehrenbergii* de la Harp.

Nummulites Gizehensis Ehr. var. *Lyelli* d'Arch et H.
" *Lucasana* Defr. var. *Meneghinii* d'Arch. et H.
" *perforata* d'Orb. var. *Stefanii* Martel.
" *subitalica* Tell.
" *italica* Tell.
" *Guettardi* d'Arch. et H.
" *biarritzensis* d'Arch.
" *variolaria* Sow.
" *Heberti* d'Arch. et H.
Assilina sp.
Orbitoides sp.
Briozoi: *Retepora* sp.
Cellepora sp.

Coralli: *Columnastraea Caillaudi* Mich.
Caryophyllia sp.
Echini: *Echinolampas Suessi* Laub.
Echinolampas sp.
Conoclypus conoideus Lamk.
Conoclypus anachoreta Agas.
Conoclypus sp.
Lamellibranchi: *Pecten Bonarelli* Vin.
Pecten sp.
Murex sp.
Vermi: *Serpula* (*Rotularia*) *spirulaea* Lamk.
Nulliporidee: *Lithothamnium nummuliticum* Gümb.

Le località delle Botticelle e di Santo Stefano, le quali tanto ad oriente che ad occidente delimitano il porto di Spalato venendo a formare le due punte più sporgenti di questo tratto di costa, sono le più fossilifere, ma la roccia che le costituisce risulta di fossili già ruzzolati e rimaneggiati, spesso in frantumi, e di detriti di calcari più antichi, perfino di *Rudistae*. E così anche la brecciola che vi si trova alla base insieme con sottili lenti di argille turchiniccie, come resultato della denudazione atmosferica e marina è ridotta ad un impasto incoerente di minuti frammenti di roccia e di fossili diversissimi.

Tutte le specie fossili citate a proposito dei terreni di Salona, Spalato e Monte Marian, vi si ritrovano pure, ma mescolate con altre molte, comuni all'Eocene medio, che altrove si osservano in gruppi ben distinti a caratterizzare livelli costanti. Dei fossili raccolti alle Botticelle e a Santo Stefano e non ancora menzionati, riportiamo qui la nota per meglio far conoscere la fauna eocenica dei dintorni di Spalato, sebbene non trattandosi di fossili vissuti tutti insieme, le determinazioni dell'orizzonte abbiano valore alquanto minore. Oltre a tutte le forme di nummulitidi, di corallari, echini, lamellibranchi ecc. che già abbiamo avuto occasione di enumerare nel calcare marnoso di Spalato e in quello del Monte Marian, abbiamo dunque pure raccolto alle Botticelle e a Santo Stefano, rappresentanti delle seguenti specie:

Nummulitidi:

Nummulites anomala de la Harp.
" *Montis-Fracti* Kaufm.

Nummulites suboenotria Martel.
" *oenotria* Tell.

Orbitoides dispansa A Martel.
» *dispansa (B)* Sow.
» *aspera A* Mart.
» *aspera (B)* Gümb.
» *papyracea (A)* Boub.
» *papyracea (B)* Boub.
» *papyracea (B)* Boub. var. *Fortisi* d'Arch.
» *applanata* Gümb.
» *ephyppium* Schloth.
» *dalmatina A* Mart.

Orbitoides dalmatina B Mart.
» *stella* Gümb.
» *stellata* d'Arch. et H.

Echini: *Cidaris* sp.
Cyphosoma cribrum Agas.

Brachiuri; *Ranina Marestiana* Kön.

Nulliporidee: *Lithothamnium torulosum* Gümb.
Lithothamnium effusum Gümb.

Nei terreni di Spalato ho dunque creduto di riconoscere tre principali livelli ben distinti paleontologicamente a Salona (Eocene medio parte media) a Spalato (piano di transizione) e al Monte Marian (Eocene medio parte superiore), basando principalmente la distinzione sui rapporti di aggruppamento delle nummuliti granulose, in posto, con quelle liscie riferibili al gruppo della *N. distans*. Ricordiamo che, nella scala delle nummuliti redatta dal de la Harpe [1], le forme granulose costituiscono la terza zona, le *Assiline* la quarta, le nummuliti striate la quinta e quelle liscie la sesta. Orbene, considerando che, eccezione fatta per il piano più basso dei terreni eocenici spalatini, i rappresentanti della sesta zona — mentre vengono a prender parte insieme con un proporzionale numero di quelli della quinta e della quarta ad una fauna nummulitica che viene qui caratterizzata da forme in prevalenza granulose — sono mancanti a Salona, scarsi a Spalato e abbondanti al Monte Marian, si comprende come sia naturale la distinzione, paleontologica oltre che stratigrafica, in tre zone.

Anche nel Veneto, alla Maiella e al Gargano, per citare solo località ben note, le nummuliti si trovano associate in modo quasi identico a quello che si verifica nei terreni di Spalato.

La coppia *N. Lucasana — N. perforata* considerata come caratteristica del Parisiano medio — facendo il Parisiano corrispondente all'intiero Eocene medio — è al Monte Marian del pari abbondante come la coppia *N. Tchihatcteffi — N. complanata*, la quale in tutto il perimetro del Mediterraneo sta a rappresentare un orizzonte alquanto più alto. A togliere infine il dubbio che il Monte Marian non sia costituito da terreni eocenici meno antichi dei circostanti, basta il fatto che le nummulitidi da noi determinate vengono a prender parte ad una fauna, che, dall'enumerazione degli altri pochi fossili più sopra citati, risulta pure sincrona a quella di San Giovanni Ilarione e quindi con ogni probabilità, riferibile all'Eocene medio parte superiore.

[1] De la Harpe Ph., *Étude des Nummulites de la Suisse*, Mémoires de la Société Paléontologique Suisse, vol. VII, pag. 76.

Biologia. — *Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Nota II di ALESSANDRO COGGI, presentata dal Socio EMERY.

Nervi ampollari. — Ho rilevato nella Nota I portante lo stesso titolo [1] che nello stadio di ampolla individualizzata il nervo forma una sorta di clava sotto e di fianco all'ampolla, pel fatto che parecchi nuclei ivi si sono accumulati. Questi appartengono ad elementi nervosi embrionali la cui migrazione in direzione centrifuga dai rami nervosi che contengono anche i nervi di senso laterale, a me sembra evidente. Ma è anche indubitato che questi elementi vanno ivi soggetti ad attiva moltiplicazione, il cui risultato è la formazione di una espansione o dilatazione di forma ovale o conica, sulla quale sembra che l'ampolla sia in parte adagiata. Ho osservato siffatta espansione, più o meno sviluppata, oltre che in *Torpedo*, in *Pristiurus*, *Mustelus* e *Raja*.

Forse per una certa somiglianza che questa espansione offre con la placca terminale del *R. lateralis vagi* in via di sviluppo, riscontrata nei Pesci e negli Anfibi da varî autori (Clapp, Raffaele e altri), Dohrn [2] che l'ha osservata in embrioni di *Pristiurus* e *Scyllium*, la chiama « Basalzellplatte » del nervo ampollare, « Bodenplatte » dell'ampolla. E *pour cause*. Poichè nello stesso modo che la espansione terminale del nervo laterale è dovuta alla migrazione in essa di elementi ectodermici formatisi per moltiplicazione nell'abbozzo della linea laterale, così Dohrn ritiene che sia prodotta la « Basalplatte » delle ampolle dalla parete di esse. Anzi egli si fonda esclusivamente su questa asserita migrazione di elementi cellulari dal fondo dell'ampolla nella « Basalplatte », e i quali, secondo ammette egli stesso, ivi si moltiplicano, per confermare precedenti ricerche sue e di altri sulla formazione dei nervi di senso laterale da catene cellulari costituite da elementi che provengono dagli abbozzi dei rispettivi apparati di senso.

Ora, io credo di fare le mie riserve circa i nervi che provvedono le ampolle. Riserve che trovano la loro ragione in quanto è esposto nella mia comunicazione su citata riguardo al primo manifestarsi di questi nervi ampollari in forma di filamenti protoplasmatici; i quali solo in prosieguo di sviluppo sono accompagnati da elementi nucleati che provengono evidente-

[1] V. pag. 289.

[2] A. Dohrn, *Die Schwann'schen Kerne, ihre Herkunft und Bedeutung. Erwiderung an A. Kölliker. 20ª. Studium zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers.* Mittheil. Zool. Stat. Neapel, Bd. 15, 1 u. 2 H. 1901.

mente dal ramo nervoso che provvede anche gli organi di senso laterale al cui fianco si sviluppano le ampolle, raggiungono poi la base delle ampolle stesse e quivi si moltiplicano.

E per quanto mi consta, le relazioni fra la dilatazione terminale del nervo ampollare embrionale, sia essa in forma di clava, o di placca ovale o conica, e la parete dell'ampolla propriamente detta consistono solo di ponti o processi protoplasmatici; talvolta sembra che qualche nucleo della placca si insinui fra la parte basale delle alte cellule dell'ampolla, ma esso può facilmente distinguersi da quelli propri di quest'ultime cellule.

Circa l'ufficio che devesi attribuire a questa « Bodenplatte », convengo su quanto dice Dohrn a pag. 152: « Es scheint unszweifelhaft, dass die Bodenplatte jeder Ampulle den Hauptproductionsplatz für die Zellen bildet, aus welchen der anhaftende Strang besteht ». Ma è da rilevare ancora che essa non raggiunge uguali dimensioni in tutte le ampolle. Essa è maggiormente sviluppata nelle ampolle il cui sbocco o punto d'attacco con l'ectoderma va soggetto a maggiore spostamento in seguito all'accrescimento di volume e al cambiamento della forma esterna del corpo dell'embrione. È evidente che in tali ampolle l'allungamento del dotto non basta a compensare lo spostamento, e i nervi ampollari sono obbligati ad allungarsi; ciò che si verifica perchè nuovi elementi, ordinati in catene cellulari, vengono loro forniti dalla espansione terminale. Una tale compensazione, del resto, è necessaria perchè i dotti ampollari conservino il loro attacco con l'ectoderma e a ciascuna ampolla sia conservato il suo nervo.

In quelle ampolle che vanno soggette a spostamenti meno significanti, l'espansione terminale esiste, ma meno sviluppata.

Siffatta maniera di considerare la formazione e l'accrescimento dei nervi ampollari, basata sulla osservazione delle strutture varie che ci offrono le ampolle durante il loro sviluppo, mentre nulla toglie alla possibilità del loro differenziarsi da catene cellulari, sfugge, secondo io credo, al dilemma troppo assoluto posto dalle due teorie che attualmente si contendono il campo per spiegare la formazione e l'accrescimento de' nervi: quella dei processi nervosi inviati da cellule situate nei centri, e l'altra della connessione primitiva fra centro e organo periferico.

Comunque sia, per me è certo che *i nervi ampollari, già per la loro maniera di svilupparsi, dimostrano di essere di natura alquanto diversa da quella dei nervi di senso laterale.* Io li considererei piuttosto come nervi di senso più generale. Alla stessa conclusione del resto conducono le recenti ricerche di Peabody, Forssell e Retzius sulla istologia delle ampolle e sulla terminazione dei loro nervi nei Selaci adulti. Nessuna distinzione di cellule sensorie e cellule di sostegno si può fare nella parete degli otricoli o nella placca centrale; e le fibre nervose, dopo aver perduto la guaina mielinica, mostrano ciascuna un ingrossamento fusiforme nucleato (ultimo ricordo della

espansione terminale embrionale?) appartenente alla guaina di Schwann, e poi si dividono più volte dicotomicamente per abbracciare con una fitta e fine arborizzazione terminale la parete esterna degli otricoli, e terminare con numèrosi ingrossamenti di varia forma addossati alle cellule della parete medesima e talvolta penetranti fra di esse.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sugli Infusorî* (1). Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

1. *Introduzione.* — La membrana cellulare o ciò che la sostituisce (ectoplasma) si è mostrata, specialmente per le importanti ricerche di Overton, permeabile all'acqua, ma non in generale alle sostanze disciolte, sia negli animali, sia nelle piante. Conseguenza necessaria di questa proprietà è l'isotonicità dei liquidi endocellulari e pericellulari tra loro. È ormai questo un concetto ammesso per molte tra le cellule interne del corpo degli animali pluricellulari; le cellule esterne, quelle cioè che sostituiscono l'epitelio della pelle, del canale digerente delle branchie, si sottraggono a questa legge della permeabilità all'acqua in molti animali acquatici (pesci teleostei ecc.), nei quali l'ambiente interno è differente per concentrazione dall'esterno; ciò che evidentemente non sarebbe possibile se l'acqua potesse traversare liberamente le membrane. Interessa anche di ricercare se in altri animali vi siano eccezioni in senso contrario, vale a dire se esistano cellule le cui pareti siano permeabili osmoticamente ai sali. Secondo il sig. Quinton (2) sarebbe permeabile ai sali la pelle delle Aplisie e di altri invertebrati marini; ma le sue esperienze son state dimostrate fallaci da Bottazzi e da me in un recente lavoro (3), in cui anche si dimostra sperimentalmente la semipermeabilità della membrana gastrica di quegli animali.

Dato come probabile questo concetto, che cioè in generale anche gli animali aventi un ambiente interno isotonico all'esterno, abbiano membrane limitanti l'interno dall'esterno, le quali non permettano il passaggio dei sali per diffusione, merita uno speciale studio il modo con cui molti di questi animali possono adattarsi a vivere in ambienti notevolmente varî osmoticamente. Dovrebbe, come conseguenza della semipermeabilità delle membrane,

(1) Queste ricerche e quelle che formano il soggetto delle tre Note seguenti, sono state eseguite nell'Istituto Zoologico di Bologna durante l'anno scolastico 1900-1901.

(2) Quinton, *Communication osmotique, chez l'Invertébré marin normal, entre le milieu intérieur de l'animal et le milieu extérieur.* C. R. de l'Acad. Paris, tome 131, pp. 905-908, 1900. — Id., *Perméabilité de la paroi extérieure de l'Invertébré marin, non seulement à l'eau, mais encore aux sels.* Ibid. pp. 952-955, 1900.

(3) Bottazzi Ph. u. Enriques P., *Ueber die Bedingungen des osmotischen Gleichgewichts* ecc. A. f. Anat. Phys., Phys. Abt. Supplementband, pp. 109-170, 1901.

un organismo di questi, messo in un ambiente anisotonico, variare di volume per passaggio di acqua, fino al ristabilimento dell' equilibrio. Ma in realtà questa cosa non avviene, o per lo meno non rappresenta un fatto persistente, come è evidente solo che si pensi ad animali che hanno la possibilità di passare dal mare all' acqua dolce dei fiumi; i quali dovrebbero acquistare un volume decuplo e più se così fosse. Quale meccanismo compensatorio insorge?

Le presenti esperienze, fatte su alcuni Protozoi d' acqua dolce (specialmente Infusorî) e sulla *Limnaea stagnalis*, hanno avuto per scopo di aggredire — un po' indirettamente — tale questione; esse mostreranno come la prima reazione di uno di questi animali, immerso in una soluzione anormale, anisotonica, consiste in una variazione di volume, dipendente dal passaggio osmotico dell' acqua; ma dopo un certo tempo il volume torna quello di prima, avvenendo un passaggio di acqua e di sale, tantochè l' animale finisce per essere della stessa grandezza che aveva prima dell' esperienza, avendo aumentata o diminuita la quantità assoluta e relativa di sale nei suoi liquidi organici. Questa seconda reazione si presenta in tali condizioni da apparire intimamente dipendente dalle condizioni di vita e di salute dell' animale, ed appare rientrare in quella categoria di fenomeni che vanno sotto i nomi, rispettivamente, di assorbimento e di escrezione.

Qualche Protozoo (alcuni Flagellati) ha fatto eccezione a questa legge, non presentando in nessun caso la reazione osmotica; onde si deve ritenere probabile che il sale sperimentato (Na Cl) diffonda liberamente attraverso alla loro superficie esterna. Per contro, tale diffusibilità non esiste affatto in alcuni Protozoi senza canale digerente (*Opalina ranarum*), sì che si deve per essi correggere l' antico concetto, che, perchè privi di stomaco, si alimentino per *endosmosi*. L' ingresso delle sostanze anche in essi dipende da altre leggi — fisiologiche — che non sono quelle della diffusione.

2. *Tecnica*. — Nell' esame degli Infusorî, solo per determinarne le specie ed osservarne le minute particolarità, conviene di adoperare i soliti vetrini porta e copri-oggetti. Ma per osservarli nelle loro condizioni quasi normali di vita, val molto meglio di coltivarli in vetrini da orologio (conservati in una camera umida) o addirittura in vaschette di vetro a fondo piano, assai grandi per contenere una diecina di cm. c. di liquido, e munite di coperchio a smeriglio, per poterle conservare a lungo senza evaporazione. Questo sistema aveva per il mio scopo grandi vantaggi, giacchè mi permetteva di far variare molto comodamente la concentrazione del liquido. Prendevo, per esempio, 5 cm. c. di acqua contenente Infusorî (concentrazione quasi O), ed aggiungevo ad essa 5 cm. c. di Na Cl 2 °/₀₀; così ottenevo 10 cm. c. di liquido all' 1 °/₀₀. Quando poi volevo col liquido di una vaschetta fare delle prove, in piccolo, di variazione di concentrazione, allora mi servivo di una pipetta costituita di un tubo di vetro tirato in punta non troppo aguzza. Immergendo questa pipetta nell' acqua o in soluzione Na Cl, e poi risollevandola, essa per

capillarità conservava una certa quantità di liquido, che era approssimativamente sempre la stessa. Io potevo in tal modo prendere una piccola porzione da un liquido, per esempio da una vaschetta di esperienza. Soffiando leggermente, versavo questo liquido in un vetrino da orologio; poi prendevo una piccola porzione (uguale) di una soluzione nota, ed anche questa volta riunivo i due liquidi e calcolavo facilmente la concentrazione del miscuglio. Gli Infusorî venivano presi colla pipetta in abbondanza, quando erano abbondanti nel liquido. Quando ve ne erano pochi, bisognava andarne alla caccia, ricercandoli al microscopio: vistine qualcheduno, alzavo rapidamente il tubo del microscopio, per poter immergere nella vaschetta la pipetta, e cercavo di farla andare di contro al centro della lente del condensatore Abbé. Dopo qualche tentativo, uno o due Infusorî venivano presi. Se essi erano nel fondo della vaschetta, naturalmente chiudevo la pipetta col dito all'estremità superiore finchè fosse arrivata al fondo della vaschetta colla punta; allora levavo il dito repentinamente.

Gli Infusorî li ottenevo o con infusi, o raccogliendo dell'acqua stagnante; prendevo acqua, erbe, terriccio ecc. Poi cambiavo l'acqua, lasciando le erbe, ecc., sostituendo l'acqua dello stagno con acqua potabile. Facevo quest'operazione più volte subito, e dopo qualche giorno; così facevo vivere gli Infusorî sempre nell'acqua potabile, che ha una concentrazione quasi 0, e da questo ambiente li prendevo per disporre e fare le esperienze.

3. *Alcuni Infusorî delle acque stagnanti.* — Cominciamo a vedere quanto possono esser sensibili alle soluzioni concentrate gli Infusorî di acqua dolce.

Esperienza I. — Presa dell'acqua stagnante da un fosso, se ne separano due porzioni: in A, si aggiunge Na Cl fino alla concentrazione di 0,5 °/₀₀; la porzione B serve di confronto. Già l'indomani in A non vi sono più Infusorî; in B ve ne sono parecchi. Alla superficie di A vi sono però molte cisti. I flagellati si conservano su per giù ugualmente nelle due porzioni.

La causa di questa estrema sensibilità, per la quale una differenza di concentrazione di 0,5 °/₀₀ produce l'incistidamento, è evidente. La concentrazione interna dell'Infusorio essendo piccolissima, quasi 0, ne segue che, per quanto poco sale si aggiunga nell'ambiente esterno, se si deve raggiungere l'equilibrio per il passaggio dell'acqua, quasi tutta l'acqua deve uscire dall'Infusorio.

Cito un altro esempio.

Esperienza II. — Vorticelle (*Vorticella nebulifera*) viventi nell'acqua potabile (concentrazione circa 0). Siccome, quando sono posate sul vetrino porta-oggetti, si attaccano ad esso col piede, si può benissimo sostituire il liquido in cui si trovavano, con un altro, senza perderle. Alcune, poste in Na Cl 5 °/₀₀, dopo pochi istanti cessano le contrazioni e i movimenti cigliari, e divengono grinzose, restringendosi.

Altre son messe in soluzione di Na Cl 1 °/₀₀. Dapprima si ha un breve stato contrattorio del filamento e del corpo cellulare. Poi ricomincia la distensione, ma non è com-

pleta la distensione del corpo cellulare. In una, dopo 15′ le ciglia non vibrano più. Dopo 30′, la distensione è di nuovo completa, le ciglia vibrano. Finiscono però tutte per morire un po' ingrinzite entro qualche ora.

Ma è inutile insistere su questo punto, che gli Infusorî cigliati delle acque dolci sono pochissimo resistenti alle soluzioni concentrate. E giacchè la morte avviene con la superficie del corpo cellulare ingrinzita, e il corpo stesso diminuito di grandezza, è evidente che la causa è la perdita di acqua per osmosi, e che il Na Cl *non traversa*, in queste condizioni di esperienza, *le pareti che nell'Infusorio separano l'interno dall'esterno*. Ma, se così fosse senza eccezione, non si potrebbe avere in questi animali nessuna adattabilità alle soluzioni concentrate. I fatti dimostrano il contrario.

Esperienza III. — Gen. *Halteria*, Dujardin. Questi piccoli cigliati sono molto curiosi per il modo di procedere, ora in un senso, ora nell'altro, a scatti, fermandosi ogni tanto. Li ho trovati in un'acqua stagnante, e coltivati nell'acqua potabile. Vale a dire, per più volte di seguito, le erbe dell'acqua stagnante raccolta furono cambiate di acqua, e poste in acqua potabile fresca. In un piccolo recipiente finirono questi cigliati per prevalere moltissimo sulle altre specie di Protozoi, rimanendo quasi soli ed abbondantissimi.

Col metodo della pipetta viene provata la loro resistenza alle soluzioni di Na Cl. Come regola generale, quando vengono posti in soluzioni concentrate, essi reagiscono in questo modo: immediatamente cominciano a correre rapidissimi per il liquido, cambiando direzione quando arrivano ai confini del liquido, e poche volte spontaneamente. Quando è vicino il loro ultimo momento, rallentano la loro corsa moltissimo, cominciano a procedere innanzi lentamente, e con moto irregolare, ruotando su sè stessi; si comincia già a distinguere la superficie del corpo grinzosa. Poi fanno qualche oscillazione, una piccola piroetta finale e si fermano. Le ciglia continuano a vibrare per qualche tempo. La forma del corpo, un poco triangolare normalmente, è più accentuatamente triangolare, la superficie notevolmente grinzosa, e le dimensioni ridotte. Morti, vengono alla superficie del liquido. Questi fenomeni si succedono nelle loro fasi più o meno rapidamente, secondo la concentrazione del liquido in cui gli animali vengono trasportati.

Da ripetute prove resultano come medie i seguenti numeri esprimenti il tempo della sopravvivenza nelle varie soluzioni di Na Cl:

1 ‰	2 ‰	3 ‰	4 ‰	5 ‰	1 %	2 %	3 %	5 %
	circa 2^h	circa 10′	circa 4′	1′,30″	45″	15″	6-7″	0

Le prove sono state fatte mescolando rapidamente quantità uguali dell'acqua cogli Infusorî e di soluzioni di Na Cl di concentrazione doppia di quella indicata nella tabella (metodo della pipetta).

11 Aprile, ore 15. Alcune porzioni dell'acqua colle *Halteriae* vengono mescolate con soluzioni di Na Cl, in modo da portarle alla concentrazione:

a) 0,5 ‰ *b*) 1 ‰

12 Aprile, ore 10. In *a* quasi tutte le *Halteriae* sono ancora vive; in *b* molte: ma vi sono dei cadaveri alla superficie del liquido.

Prova della resistenza: le *Halteriae* delle porzioni *a*, portate alla concentrazione di Na Cl 1 % muoiono in circa 50″; di 5 % in 2′ 40″.

Quelle delle porzioni *b* alla concentrazione di 1 %, in 50″.

In questi Infusorî, abituati da un giorno alla concentrazione di 0,5 ‰ Na Cl, la resistenza alle soluzioni più forti è un po' aumentata; muoiono

in 50″ anzichè in 45″ in Na Cl 1 %, e in 2′ 40″ anzichè in 1′ 30″ in Na Cl 5 ‰.

20 Aprile, ore 10. In *a* le *Halteriae* sono ancora vive, ma più scarse. In *b* pochissime, e notevolmente grinzose. In tutte le porzioni sono aumentati grandemente dei *Chilodon* (Ehrenberg), prima scarsissimi; specialmente nelle porzioni *b* ove sono comunissime le forme di divisione.

20 Aprile, ore 17. Le stesse condizioni. Prova della resistenza: le *Halteriae* delle porzioni *a* portate alla concentrazione di 1 % muoiono in 30″ circa.

21 Aprile, ore 10. In *a* non molte *Halteriae,* assai grinzose. In *b* nessuna *Halteria,* molti *Chilodon.*

22 Aprile. Morte tutte le *Halteriae.*

In questa esperienza, le *Halteriae* poste in Na Cl 0,5 ‰ hanno resistito per qualche giorno, ma hanno poi finito per morire raggrinzite. Dapprima la loro resistenza alle soluzioni più concentrate era aumentata, poi diminuita. Discuteremo dopo questi risultati. Intanto qui siamo sempre nel caso di tentativi infruttuosi di adattamento alle soluzioni più concentrate. Ma esaminiamo i risultati di quest' altra esperienza.

Esperienza IV. — A 5 cm. c. di acqua contenente moltissime *Halteriae,* qualche *Chilodon* e qualche *Gastrostyla Steinii* (Engelmann) si aggiungono, nel corso di varî giorni, 5 cm. c. di Na Cl al 4 ‰. E precisamente nel modo seguente:

20 Aprile,	cm.c.	1,5.	Si arriva così alla	concentrazione di	Na Cl	0,5 ‰
21	»	»	0,5	»	»	»	1,1 ‰
22	»	»	0,5	»	»	»	1,3 ‰
23	»	»	0,5	»	»	»	1,5 ‰
24	»	»	1,0	»	»	»	1,7 ‰
25	»	»	0,5	»	»	»	1,8 ‰
26	»	»	0,5	»	»	»	2 ‰
			5,0				

Durante questo graduale aumento di concentrazione le *Halteriae,* alquanto grinzose, sono assai diminuite di numero, per la morte di alcune. I *Chilodon* sono aumentati, ed ancor più i *Gastrostyla.*

27 Aprile, ore 9. *Halteriae* in Na Cl 1 % muoiono in (varie prove): 65″-40″-30″-40″-34″. Si nota una certa irregolarità di comportamento, secondo gli individui.

28 Aprile. Le *Halteriae* sopravvissute non sono più grinzose. Anzi appaiono rotondeggianti e più rigonfiate del normale. Nei giorni successivi si avvicinano di più all'aspetto normale.

29 Aprile. Le *Halteriae,* portate alla concentrazione di Na Cl 0,5 ‰ (mediante 3 volumi di acqua distillata), muoiono in circa 7-8′. Dapprima intraprendono la solita corsa furiosa, che si fa a un certo punto più disordinata. Ad un tratto l'Infusorio scoppia, riducendosi in minutissimi frammenti, che si disperdono.

Questi ultimi resultati sono molto notevoli. Mostrano che nell' interno delle *Halteriae* la concentrazione è aumentata per ingresso di Na Cl. Infatti messe in una soluzione nella quale a stento resistono le *Halteriae* normali, perchè troppo concentrata, queste muoiono per rigonfiamento ed assunzione di acqua. Dopo il primo periodo di reazione osmotica alle soluzioni concen-

trate, nel quale si aveva il solito raggrinzimento, ne è sottentrato un altro, in cui gli Infusorî sono al contrario più rigonfiati, periodo transitorio anche questo, per ritornare poi ad un aspetto quasi normale. In questo ultimo stadio, in cui si hanno presso a poco le dimensioni primitive, l'assunzione di acqua alla concentrazione di 5 °/₀₀ dimostra evidentemente che il sale interno è in maggior quantità che all'inizio dell'esperienza. Ma quale significato ha quel periodo transitorio di aumento di volume? È evidente che questa seconda reazione indica, in questo momento, l'assorbimento di qualche cosa dall'esterno. Sarà acqua soltanto? No, perchè allora i succhi interni si diluirebbero di nuovo alla concentrazione primitiva stabilendosi un disequilibrio osmotico tra l'interno e l'esterno; ma non c'è bisogno di negare *a priori* questa possibilità; la nega *a posteriori* l'esperienza dello scoppiamento in Na Cl 0,5 °/₀₀. Dunque in quel periodo, nell'Infusorio entra acqua e sale. In queste condizioni si deve ritenere che le *Halteriae* si fossero adattate alla maggior concentrazione. Infatti, l'esperienza continua:

3 Maggio. Le *Halteriae* non acccennano a diminuire ulteriormente di numero.

29 Aprile, ore 15. Alcuni *Chilodon* e *Gastrostyla* si portano alla concentrazione di Na Cl 0,5 °/₀₀. Reagiscono con movimenti violenti, ma poi si calmano.

30 Aprile, ore 9. Sono tutti morti.

29 Aprile, ore 15. 5 cm.c. di liquido vengono tolti dalla vaschetta dell'esperienza, e messi in un'altra vaschetta. Si parla ormai di questa nuova vaschetta. Si aggiunge 1 cm.c. di Na Cl 8 °/₀₀ (si arriva così alla concentrazione di 3 °/₀₀).

30 Aprile, ore 9. Le *Halteriae* sono tutte morte. Sopravvivono specialmente i *Gastrostyla*. Si aggiunge 1 cm.c. di Na Cl 8 °/₀₀ (concentrazione: 3,7 °/₀₀).

1 Maggio. I *Gastrostyla* sono diminuiti.

3 » I *Gastrostyla* non sembrano ulteriormente diminuiti.

4, 5, 6 Maggio. Si aggiunge ogni giorno 1 cm.c. di Na Cl 8 °/₀₀ e si arriva così finalmente alla concentrazione di 5 °/₀₀.

8 Maggio, ore 14. I *Gastrostyla* vivono in queste condizioni. Ne vien posto uno in Na Cl 2,5 °/₀₀.

9 Maggio, ore 9. Questo *Gastrostyla* è morto.

10 Maggio. Un *Gastrostyla*, condotto alla concentrazione di 1 °/₀ Na Cl, dopo 3′ di piccoli giramenti ne fa qualcheduno più disordinato; poi rallenta di nuovo; si nota la superficie grinzosa. Dopo 11′ è quasi fermo. Dopo 12′ riprende un po', fa 2 o 3 movimenti, e poi cessa di nuovo per sempre. Le ciglia però vibrano ancora fino verso le ore 11,15′. Altre prove dànno resultati simili.

Il 27 di Aprile erano state fatte prove coi *Gastrostyla* che vivevano al 2 °/₀₀. Essi morivano, trasportati alla concentrazione di 1 °/₀, in circa 2′.

Abbiamo dunque, per quest'altra specie, gli stessi resultati: mano mano che si aumenta la concentrazione dell'ambiente, senza che gli Infusorî muoiano, aumenta la resistenza alle soluzioni più concentrate, e diminuisce per quelle che sono ora più diluite. Quando, nell'esperienza III, le *Halteriae* viventi in Na Cl 0,5 °/₀₀, mostravano una resistenza alle soluzioni concentrate, diminuita, (21 aprile), ciò dipendeva dal fatto che esse non si erano potute adattare, questa volta, alle nuove condizioni di vita. Infatti esse erano sempre

rimaste grinzose, e poco dopo morirono. Esse non avevano assorbito sale, e perciò l'essere già in soluzione un po' più concentrata rappresentava per loro uno svantaggio. Ecco come le apparenti discordanze nei resultati, quando tutte le condizioni siano accuratamente considerate, illuminano invece sempre di più questo fenomeno dell' *adattamento* alle soluzioni concentrate.

Poichè per ora si tratta di Infusorî che sono forniti di canale digerente, può sorgere il dubbio che i due momenti di reazione (perdita di acqua, assunzione di acqua e sale) siano dovuti all'entrata in gioco di membrane differenti: prima, la parete esterna del corpo cellulare, semipermeabile; poi la parete del canale digerente, capace di lasciar passare anche il sale. Veramente la supposizione non regge, perchè bisognerebbe ammettere nel 1° momento di reazione un meccanismo di chiusura della bocca, meccanismo che, in realtà, non sembra esistere. Ma pure ho voluto sperimentare su un Infusorio privo di canale digerente e di apertura buccale, per vedere se la parete esterna del corpo, che funge necessariamente da membrana assorbente, perchè non ce ne sono altre con cui venga in contatto il liquido ambiente, presentasse ostacolo al passaggio dell' Na Cl.

4. *Infusorî privi di canale digerente* (*Opalina*).

ESPERIENZA V. — *Opalina ranarum.* Infusorio parassita dei girini di rospo, nel cui intestino si trova. La forma è allungata, e l'animale procede flessuosamente, spinto dai movimenti delle ciglia laterali del corpo, le quali si muovono ad onde procedenti dall'avanti all'indietro.

Preso a un girino il pezzo di intestino che contiene abbondantissimi questi Infusorî, lo ponevo su un vetrino da orologio, e lo aprivo. La quantità di liquido contenuta in questo pezzetto è scarsissima, sì che, aggiungendo abbondante quantità di una soluzione di Na Cl, si ha in definitiva con molta approssimazione la stessa concentrazione della soluzione adoperata.

È difficile sperimentare su questi Infusorî, perchè dopo qualche giorno muoiono, in qualunque soluzione siano stati messi.

In acqua distillata, le *Opalinae* si rigonfiano in pochi minuti, divenendo completamente tonde; muoiono presto, ma per qualche minuto si muovono anche dopo essere arrotondate.

In Na Cl 1 °/₀₀, si trovano tutte morte il giorno dopo, assai rigonfiate.

In Na Cl 2 e 3 °/₀₀, le stesse cose, meno accentuate.

Anche in Na Cl al 4 e al 5 °/₀₀, in generale le *Opalinae* muoiono in un giorno, rigonfiate alquanto. Una volta però in un vetrino con Na Cl al 4 °/₀₀, qualche *Opalina* sopravvisse anche più di 2 giorni, un poco rigonfiata. Dopo tre giorni dall'inizio dell'esperienza, erano ancora vive, e non più rigonfiate. Presentavano l'aspetto normale.

In Na Cl 6-7 °/₀₀ le *Opalinae* vivono per qualche giorno, senza visibilmente alterarsi. Deve essere infatti questa su per giù la concentrazione più abituale del contenuto intestinale dei girini, probabilmente simile, in generale, a quella del loro sangue.

In Na Cl 8-9 °/₀₀ un giorno o due qualche volta resistono. Ma sono molto visibilmente contratte. I fenomeni del rigonfiamento e della contrazione per perdita d'acqua in questi animali sono molto facilmente riconoscibili, perchè il rigonfiamento porta ad un

accorciamento, e ingrossamento; la contrazione, a una diminuzione dei diametri trasversali, mentre che il diametro longitudinale non varia.

In Na Cl 1 °/₀ circa come sopra, solo più accentuata la contrazione.

In Na Cl 3 °/₀ muoiono subito in grande contrazione.

Dunque anche in questi Infusorî privi di canale digerente vi è la stessa sensibilità alle soluzioni anisotoniche, le quali producono restringimento o rigonfiamento negli animali, evidentemente perchè l'acqua sola può passare a ristabilire l'equilibrio. Quando quelle *Opalinae* che sopravvissero più a lungo delle altre in Na Cl al 4 °/₀₀, dapprima gonfiatesi, tornarono alla forma primitiva, evidentemente non uscì fuori soltanto l'acqua che era stata assorbita in più, per portare i succhi interni alla stessa concentrazione esterna, ma sale e acqua nelle stesse proporzioni della concentrazione interna ed esterna, in modo da conservare la condizione di isotonicità tra dentro e fuori. Assistiamo qui, in senso inverso, allo stesso fenomeno già osservato per gli altri Infusorî presi in esame.

I resultati delle esperienze esposte in questa Nota si possono insomma così riassumere:

Gli Infusorî trasportati da un ambiente ad un altro di tonicità diversa, presentano dapprima una variazione di volume dovuta a passaggio di acqua attraverso alla loro parete, osmoticamente impermeabile ai sali; poi una variazione di volume inversa, per passaggio non osmotico di acqua e sali (assorbimento o escrezione secondo i casi) la quale può anche temporaneamente oltrepassare le condizioni iniziali.

Gli Infusorî privi di canale digerente hanno la parete esterna impermeabile (per endosmosi) al Na Cl *disciolto nell'acqua.*

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna annuncia che alla seduta assistono i Soci stranieri R. Lepsius e P. Sabatier.

Lo stesso Vicepresidente dà la dolorosa notizia della morte del Socio straniero A. M. Cornu, e legge il seguente cenno necrologico del defunto Accademico.

Alfredo Maria Cornu nacque il 6 marzo 1841, studiò nell'École polytechnique e nell'École des Mines, ottenne il diploma d'ingegnere nel 1866, e fu nominato nell'anno 1871 professore di Fisica alla Scuola politecnica, carica che egli tenne fino alla sua morte.

Entrò nell'Accademia di Parigi nel 1878 e appartenne alla nostra Accademia fino dal 26 agosto 1896 in qualità di Socio straniero.

Esordì brillantemente nella carriera scientifica colla sua tesi di laurea, in cui trattò della riflessione cristallina, tentando di perfezionare la teoria di Fresnel col modificarne le condizioni e i limiti fra i due mezzi. Questa prima ricerca esercitò un'influenza decisiva su tutto l'indirizzo della sua vita scientifica, in cui si occupò principalmente di ottica, e rivelò presto il valore del suo ingegno.

Non mi sarebbe possibile seguire una ad una le molte sue ricerche; mi permetta però l'Accademia di raggrupparle e di dare un breve cenno almeno delle principali.

Lo studio delle radiazioni più rifrangibili lo occupò a parecchie riprese e di lui rimane uno studio accuratissimo dello spettro ultravioletto solare, in continuazione del celebre atlante dell'Angström. Interessanti ricerche laterali ebbe poi a compiere sull'assorbimento atmosferico dello spettro ultravioletto; così rimanendo sempre nel campo della Spettroscopia è a ricordarsi la sua ingegnosa e semplicissima disposizione dell'immagine solare oscillante sulla fenditura dello spettroscopio che permette di distinguere immediatamente le linee solari dalle telluriche.

Al Cornu la scienza va debitrice di studî molto eleganti sulle condizioni di acromatismo nei fenomeni d'interferenza, la soluzione del problema della fotometria per luce polarizzata, ricerche sui reticoli di diffrazione e sulle loro anomalie focali. Ed a proposito dei suoi studî sul fenomeno Zeeman, giova ricordare la scoperta che la D_1, normalmente alle linee di forza magnetica, si scompone in quattro linee, risultato che non ebbe forse ancora una spiegazione teorica soddisfacente.

Lavoro d'importanza capitale fu quello sulla velocità della luce, in cui perfezionò il metodo di Fizeau e con una bella serie di misure giunse a fissarne il valore in 300,400 chilometri al secondo, valore che si può ancora oggidì considerare come molto preciso.

Da questo argomento era naturale che egli volgesse la sua mente a problemi di geodesia e di astronomia, fra i quali ricordo le belle ricerche di fotografia astronomica, la costruzione di una mira lontana nell'osservatorio di Nizza e il suo apparecchio zenito-nadirale.

Voglio poi menzionare, fra le ricerche di fisica terrestre, la determinazione della densità della terra, eseguita in modo magistrale e che deve considerarsi come una delle migliori fin qui esistenti.

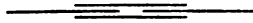
Non vi è quasi ramo di Fisica, che egli non abbia coltivato. In fatto di acustica devono ricordarsi le sue ricerche sugli intervalli musicali, nel caso di melodia e di armonia, e quelle sulle vibrazioni rotanti, che accompagnano le trasversali delle corde.

Il Cornu fu in tutta la sua vita grande maestro dell'arte sperimentale; se anche non ebbe concetti nuovi originali, la critica fine e incisiva dei metodi e delle disposizioni sperimentali gli assicureranno sempre un alto posto

nella scienza. Negli ultimi anni della sua vita, troncata all'improvviso, egli fu membro autorevole del Comitato internazionale di Pesi e Misure, per il quale la recente sua perdita rimarrà molto sensibile.

Fu anche grande maestro di conferenze popolari ed aveva un talento tutto speciale di mettere a portata di molti le teorie più elevate della sua scienza.

Morì all'età di poco più di 60 anni, e sto per dire, in pieno vigore della sua vita. Mandiamo all'illustre consorella di Parigi le condoglianze della nostra Accademia per la prematura perdita di un membro così importante.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 maggio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

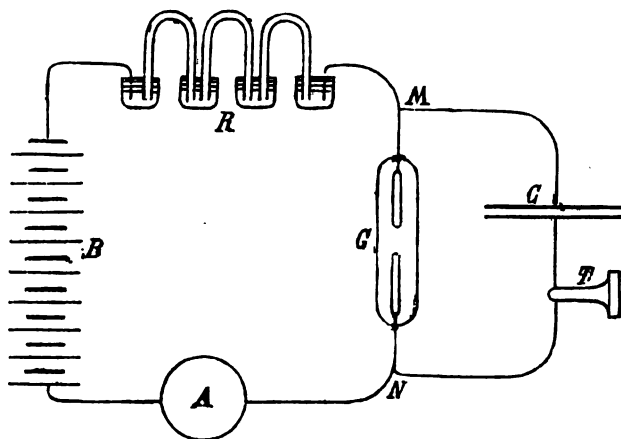
Astronomia. — *Considerazioni sull'insegnamento dell'Astronomia nelle Università italiane.* Nota del Socio G. Celoria.

I Regolamenti universitarî stabiliscono che l'insegnamento dell'Astronomia nella Facoltà di scienze sia dato in quelle Università alle quali è annessa una Specola. Questo suppone anzitutto che l'Astronomia non possa insegnarsi senza Osservatorio, ciò che non è; l'Osservatorio pure essendo utilissimo all'efficacia dell'insegnamento non è però necessario. Questo inoltre tende a limitare l'insegnamento alla sola Astronomia pratica, e, senza volerlo, finisce per dare all'Astronomia nelle Facoltà nostre il carattere di materia accessoria e quasi tollerata, iniziando in Italia rispetto agli studî astronomici un inevitabile periodo di decadenza.

Propongo che l'insegnamento dell'Astronomia sia dato nella Facoltà di scienze in tutte le Università, e che in tutte l'Astronomia e pratica e teorica sia dichiarata materia d'obbligo e fondamentale.

Io non so immaginare un Dottore in scienze che ignori i principî fondamentali dell'Astronomia e dei metodi di indagine astronomica. Se un tal dottore esiste, egli, pur non occupandosi ex-professo di Astronomia, ha certo una coltura generale scientificamente incompleta. L'Astronomia è scienza vasta e comprensiva; di molte scienze si vale, e a molte scienze, alla Chimica, alla Fisica, alle Matematiche, alla Meccanica, dà argomenti importanti di studio. L'Astronomia inoltre mirabilmente insegna a studiare con metodo critico e obbiettivo ogni sistema sia pur complesso di fatti, in modo incomparabile risveglia e svolge l'abito positivo della mente.

Fisica. — *Sulla produzione di suoni per mezzo delle scariche nei tubi a gas rarefatto o nelle fiamme.* Nota del Socio AUGUSTO RIGHI.

La disposizione sperimentale da me impiegata, e rappresentata dall'annesso diagramma, è assai simile a quella del Duddell ([1]) per l'esperienza dell'arco voltaico sonoro; ma il fenomeno acustico, al quale essa dà origine, ha una causa alquanto diversa.

Nella mia esperienza all'arco voltaico, dell'esperienza di Duddell, è sostituito un tubo ad aria rarefatta G con elettrodi d'alluminio, e nel circuito derivato MCN, oltre al condensatore C è inserito un telefono T. La batteria B è composta di 400 piccoli accumulatori, i quali, quando nel circuito $BRMNA$ sia inserita una forte resistenza R, costituita da tubi pieni di una soluzione di solfato di rame, danno una corrente di pochi milliampère, misurata da un milliamperometro A. Quanto al tubo G, esso ha 4 c. di diametro e contiene due elettrodi cilindrici lunghi 5 c. e grossi 0,6, arrotondati alle estremità, uno dei quali è fisso, mentre l'altro può, mediante piccole scosse date al tubo, porsi a diverse distanze dal suo compagno. Però una distanza di circa mezzo centimetro fra gli elettrodi è assai conveniente, dato che l'aria, che li circonda, abbia la pressione di circa un centimetro.

([1]) The Electrician, pag. 310, december 21, 1900.

Se si apre il circuito derivato e si chiude il circuito principale, si stabilisce in questo la debole corrente, mentre fra gli elettrodi appare la luminosità ben nota, formata da luce rossa sull'anodo e luce violetta, estendentesi a minor distanza, sul catodo. Se si chiude ora il circuito derivato, qualche volta nulla resta modificato, mentre altre volte si produce invece il fenomeno, che sto per descrivere; il quale poi con certezza quasi assoluta si produce, se si chiude prima il circuito del condensatore, poi quello degli accumulatori.

Operando in tal guisa alla luminosità silenziosa e tranquilla e, almeno apparentemente, continua, che esiste sugli elettrodi, si sostituisce una diversa forma di scarica, la quale è indubbiamente e regolarmente intermittente. L'aspetto ne è diverso secondo che la resistenza del circuito derivato, che nel caso della figura consiste principalmente nella resistenza del rocchetto del telefono, è molto piccola o no.

Se la detta resistenza è piccola (telefono con rocchetto a filo corto e grosso) veggonsi fra gli elettrodi del tubo delle vere scintille larghe e diffuse di colore rosso, accompagnate da un bagliore verdastro sul catodo. Ove il bagliore verde tocca il catodo, si suol osservare un punto bianco assai luminoso. Qualche volta la stessa apparenza si osserva anche sull'anodo.

Se invece la resistenza nel circuito derivato non è tanto piccola, la luminosità del tubo è meno differente, da quello che era, quando era aperto il circuito derivato. Si vede cioè la piccola colonna di luce rossa sull'anodo ed il bagliore violetto (o luce negativa) sul catodo, che però forma ora intorno al medesimo una specie di guaina assai estesa e di spessore uniforme. Ma ciò che principalmente distingue la scarica, quando è chiuso il circuito derivato, è la sua intermittenza, che è sensibile direttamente quando è lenta, e che si desume, quando sia rapida, dal suono, emesso dal telefono.

Quest'ultimo non è a rigore indispensabile giacchè, anche senza di esso, si ode un debole suono musicale accostando l'orecchio al tubo G. Il telefono giova a rendere questo suono più manifesto; ed infatti il suono, che da esso emana, quando è inserito nel circuito derivato, può essere tanto intenso, da essere udito in tutto un vasto ambiente. Questo suono ha in generale un timbro musicale; ma diviene rauco, se gli elettrodi del tubo non sono levigati e puliti.

L'altezza del suono così generato, dipende dalle varie condizioni della esperienza. Essa infatti cresce:

1. diminuendo la resistenza R;

2. aumentando il numero degli accumulatori della batteria B, giacchè non tutti i 400 occorrono sempre per l'esperienza;

3. diminuendo la capacità del condensatore C;

4. diminuendo la distanza fra i due elettrodi entro il tubo G;

5. diminuendo la pressione dell'aria nel tubo stesso.

È dunque possibile variare entro i più estesi limiti l'intermittenza della scarica. Per esempio, facendo R eguale a più decine di migliaia di Ohm, prendendo per C una capacità di qualche decimo di microfaraday, e adoperando il minimo numero possibile di accumulatori, le scariche si succedono tanto lente, da contarsene appena due o tre al secondo. Naturalmente con tale lenta intermittenza non si ode un suono continuo, ma solo un colpo secco nel telefono ad ogni scintilla nel tubo.

Variando nel senso dovuto la capacità, la resistenza ecc., si ottiene un suono più o meno acuto a piacere, ed anche in successione suoni di diverse e determinate altezze. Per esempio, basta staccare dalla batteria uno dei reofori e toccare con esso ora l'uno ora l'altro degli elementi da cui la batteria è costituita, per ottenere una successione melodica di suoni musicali, e realizzare così uno strumento musicale di nuovo genere.

Nello stesso modo che prima si era fuori dal limite dei suoni udibili, perchè la frequenza delle scariche era troppo piccola, si può oltrepassare l'altro limite e arrivare a frequenze tanto elevate, da far cessare nuovamente la sensazione sonora. Se infatti, ridotta la resistenza R a non essere che di qualche centinaia di Ohm, si prende come condensatore C il noto condensatore ad aria di Epino, i due dischi del quale sieno ad una distanza reciproca di circa mezzo millimetro, il telefono T (che in questo caso occorre abbia un rocchetto a lungo filo onde non dia suoni troppo deboli) fa udire un sibilo acutissimo. Basta allora allontanare leggermente l'una dall'altra le due armature del conduttore, o avvicinare appena l'uno all'altro i due elettrodi nel tubo ecc., perchè il suono salga tanto in altezza, da uscire dal limite superiore di udibilità. E, come accade in tal caso, se più persone prendono parte all'esperienza, mentre alcune più non odono alcun suono, altre provano ancora la molestia d'un suono estremamente acuto.

Il numero di vibrazioni per secondo del suono ottenuto è di gran lunga minore del numero d'oscillazioni elettriche per secondo del sistema formato colla capacità C e coll'autoinduzione esistente nel circuito derivato; perciò è esclusa affatto l'idea, che il detto suono abbia l'origine medesima di quello ottenuto da Duddell coll'arco voltaico. Si constata d'altronde, che l'altezza medesima è quasi indipendente dall'autoinduzione. Non si tratta dunque di una corrente alternativa, ma di una successione di scariche, di cui parmi si possa render conto nel modo seguente.

Nell'atto in cui si chiude il circuito, la differenza di potenziale fra gli elettrodi del tubo non raggiunge il valore massimo che con un certo ritardo, dovuto a ciò che si forma dapprima una corrente, che carica il condensatore. Ma tale corrente scema prontamente, la differenza di potenziale aumenta, e si forma una scarica del condensatore attraverso il tubo. Al cessare di questa il fenomeno si ripete indefinitamente, ed è chiaro che tale spiegazione, la quale potrà forse essere in seguito completata, rende ragione del modo nel quale la

frequenza delle scariche dipende dalla resistenza, capacità ecc. È poi verosimile che con graduali modificazioni delle varie parti dei circuiti si possa passare, dai suoni in tal modo generati, a quelli ottenuti dal Duddell, la cui altezza dipende dalla frequenza delle oscillazioni elettriche permanenti nel circuito derivato.

Poichè il circuito derivato è percorso da una corrente intermittente, esso potrà dare fenomeni d'induzione, analoghi a quelli osservati da Peuchert (¹) con disposizione simile a quella di Duddell. Basta infatti inserire nel circuito del condensatore il filo grosso di un grande rocchetto di Ruhmkorff, perchè si formino scintille fra i capi del filo indotto. Tali scintille possono essere lunghe oltre un centimetro, quando la corrente principale data dagli accumulatori è di pochi milliampère. Esse decrescono naturalmente in lunghezza, quando si aumenta la frequenza delle scariche nel tubo.

Fenomeni affatto simili a quelli descritti si ottengono sostituendo al tubo G la fiamma di un becco Bunsen. Una tale fiamma fu pure adoperata dal Ruhmer (²) in sostituzione dell'arco voltaico, nell'esperienza dell'arco parlante del Simon (³). Occorre però rendere abbastanza conduttrice la fiamma, deponendo su una delle lastrine di platino in essa immerse e funzionanti da elettrodi, un poco di cloruro di sodio. La fiamma emette da sola il suono, però con intensità minore, di quella del suono prodotto dal telefono T.

Le esperienze qui descritte sono state preparate ed eseguite in poco tempo; per così dire, improvvisate; se, quando potrò intraprenderne uno studio dettagliato, esse mi daranno, come è da prevedere, qualche risultato degno di menzione, ne farò oggetto di altra pubblicazione.

Matematica. — *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

In questa Nota mi propongo di stabilire coi metodi del Calcolo differenziale assoluto le formole fondamentali della teoria delle varietà di natura qualunque ad n dimensioni considerate come immerse in varietà ad $n+m$ dimensioni pure qualunque.

Queste formole pel caso di $m=1$ sono state date dal prof. Bianchi nella traduzione tedesca della sua *Geometria Differenziale*; con metodo semplice ed elegante, ma che forse male si estenderebbe al caso generale. — Per questo esse nella loro sostanza si trovano invece esposte in una Memoria

(¹) Elektr. Zeitschr. pag. 467, 1901.
(²) Physik. Zeitschr., februar 23, pag. 325, 1901.
(³) Wied. Ann., t. 64, pag. 233, 1898.

pubblicata dal sig. Voss nel volume XVI dei *Mathematische Annalen*; in modo tuttavia, che poco si presta alle applicazioni ed alle interpretazioni geometriche. — Perciò non mi sembra inopportuno il ritornare sull'argomento per presentare quelle formole sotto la forma più semplice consentita dalle notazioni proprie dei metodi, dei quali faccio uso, e per trarne alcune conseguenze relative alla curvatura di una varietà qualunque.

Per ciò, che riguarda, le notazioni ed i metodi del Calcolo differenziale Assoluto mi riferirò alla esposizione fattane dal prof. Levi-Civita e da me in una Memoria inserita nel volume LIV dei *Mathematische Annalen*, la quale, occorrendo, sarà qui citata colla lettera M seguita dai numeri corrispondenti al capitolo, al paragrafo e, eventualmente, alla formola da consultare.

1. Siano

$$\varphi \equiv \sum_1^n a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

$$\psi = \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, dy_u\, dy_v$$

due forme differenziali quadratiche positive. Perchè la varietà V_n definita dalla prima sia contenuta nella V_{n+m} definita dalla seconda è necessario e basta che si possano determinare $y_1, y_2, \ldots, y_{n+m}$ in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in modo da soddisfare alle equazioni

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, y_{u/r}\, y_{v/s} = a_{rs} \;(^1)$$

Derivando queste covariantemente secondo φ si ottengono delle equazioni, a cui equivalgono le

$$(1) \qquad \sum_1^{n+m}{}_u\, c_{u/r} \sum_1^{n+m}{}_v \left(c_{uv}\, y_{v/st} + \sum_1^{n+m}{}_w\, c_{vw,u}\, y_{v/s}\, y_{w/t}\right) = 0\,,$$

nelle quali i simboli $c_{vw,u}$ rappresentano i coefficienti di Christoffel di prima specie relativi alla forma ψ.

Si rappresenti con $\varepsilon_{\alpha\beta}$ lo zero o l'unità, secondo che gli indici α e β sono distinti o coincidono, e si determinino le espressioni $z_{\alpha/u}$ in modo da soddisfare alle equazioni

$$(2) \qquad \sum_1^{n+m}{}_u\, y_{u/r}\, z_{\alpha,u} = 0$$

$$(3) \qquad \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c^{(uv)}\, z_{\alpha/u}\, z_{\beta/v} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,,$$

designandosi con $c^{(uv)}$ i coefficienti della forma reciproca a ψ.

(1) Gli indici r, s, t, a cui non siano attribuiti particolari valori, si intenderanno sempre suscettibili di tutti i valori $1, 2, \ldots, n$; quelli u, v, w dei valori $1, 2, \ldots, n+m$ e quelli $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ dei valori $1, 2, \ldots, m$.

Le $z_{1/u}, z_{2/u}, \dots, z_{m/u}$ potranno riguardarsi (M, II, 1) come sistemi coordinati covarianti di m congruenze ortogonali di linee tracciate in V_{n+m} e normali a V_n. I sistemi coordinati controvarianti delle congruenze stesse avranno invece gli elementi

$$z_\alpha^{(u)} = \sum_{1}^{n+m}{}_v \, c^{(uv)} \, z_{\alpha/v} .$$

Introducendo delle indeterminate

$$b_{\alpha/rs} = b_{\alpha/sr}$$

potremo alle equazioni (1) sostituire le

$$\text{(II)} \qquad y_{u'/rs} = \sum_{1}^{m}{}_\alpha \, z_\alpha^{(u')} \, b_{\alpha/rs} - \sum_{1}^{n+m}{}_{uvw} \, c^{(uu')} \, c_{vw,u} \, y_{v/r} \, y_{w/s} .$$

2. Dalle (2) derivate covariantemente secondo φ, tenendo conto delle (II), seguono le

$$\sum_{1}^{n+m}{}_u \, y_{u/r} \Big(z_{\alpha/u/s} - \sum_{1}^{n+m}{}_{vw} \, z_\alpha^{(v)} \, c_{uw,v} \, y_{w/s} \Big) = - b_{\alpha/rs} ,$$

che equivalgono alle

$$\text{(4)} \qquad z_{\alpha/u/s} = \sum_{1}^{n+m}{}_{vw} \, z_\alpha^{(v)} \, c_{uw,v} \, y_{w/s} - \sum_{1}^{n+m}{}_v \, c_{uv} \sum_{1}^{n}{}_p \, b_{\alpha/ps} \, y_v^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_\beta \, \mu_{\alpha\beta/s} \, z_{\beta/u} ,$$

rappresentandosi con $\mu_{\alpha\beta/s}$ delle nuove indeterminate; le quali, come risulta derivando le (3), debbono essere legate dalle relazioni

$$\text{(5)} \qquad \mu_{\alpha\beta/s} + \mu_{\beta\alpha/s} = 0 .$$

Alle (4) equivalgono poi le

$$\text{(4')} \qquad z_{\alpha/s}^{(u')} = - \sum_{1}^{n+m}{}_{uvw} \, c^{(u'u)} \, z_\alpha^{(v)} \, c_{vw,u} \, y_{w/s} - \sum_{1}^{n}{}_p \, b_{\alpha/ps} \, y_{u'}^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_\beta \, \mu_{\alpha\beta/s} \, z_\beta^{(u')} .$$

Si derivino le (II) tenendo conto delle (4′) e si eliminino le derivate terze delle y, applicando note formole (M, I, 6, (23)). Si perverrà ad un sistema di formole, che si può scindere nei due gruppi seguenti:

$$\text{(III)} \quad \sum_{1}^{m}{}_\alpha \big(b_{\alpha/rt} \, b_{\alpha/ps} - b_{\alpha/rs} \, b_{\alpha/pt} \big) + \sum_{1}^{n+m}{}_{uu'vv'} \, c_{uu',vv'} \, y_{u/p} \, y_{u'/r} \, y_{v/s} \, y_{v'/t} = a_{pr,st} ;$$

$$\text{(IV)} \qquad b_{\alpha/rst} - b_{\alpha/rts} + \sum_{1}^{m}{}_\beta \big(\mu_{\alpha\beta/s} \, b_{\beta/rt} - \mu_{\alpha\beta/t} \, b_{\beta/rs} \big) +$$

$$+ \sum_{1}^{n+m}{}_{uu'vv'} \, c_{uu',vv'} \, z_\alpha^{(u)} \, y_{u'/r} \, y_{v/s} \, y_{v'/t} = 0 ,$$

nelle quali $a_{pr,st}$; $c_{uu',vv'}$ rappresentano i simboli di Riemann relativi alle forme φ e ψ.

Le formole (III) e (IV) costituiscono la generalizzazione, rispettivamente, della formola di Gauss e di quelle di Codazzi nella ordinaria teoria della superficie.

Se la varietà V_{n+m} è a curvatura costante K, le (III) e (IV) assumono rispettivamente la forma

$$\sum_1^m{}_\alpha (b_{\alpha/rt}\, b_{\alpha/ps} - b_{\alpha/rs}\, b_{\alpha/pt}) + \mathrm{K}\,(a_{ps}\, a_{rt} - a_{pt}\, a_{rs}) = a_{pr,st}$$

$$b_{\alpha/rst} - b_{\alpha/rts} + \sum_1^m{}_\beta\, (\mu_{\alpha\beta/s}\, b_{\beta/rt} - \mu_{\alpha\beta,t}\, b_{\beta/rs}) = 0\,.$$

E perchè V_n possa considerarsi contenuta in V_{n+m} sarà in questo caso necessario e sufficiente che si possano determinare le $b_{\alpha/rs}$ e le $\mu_{\alpha\beta/r}$ in modo da soddisfare a queste equazioni.

3. Alle formole (I), (II), (III) e (IV) si può estendere, qualunque sia m, la trasformazione già da me esposta pel caso $m=1$ (M, IV, 4).

Si assuma in V_n una ennupla ortogonale di riferimento $[1], [2], .., [n]$ e siano $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, ..., \lambda_{n/r}$ i sistemi coordinati covarianti delle congruenze, che la costituiscono. Si facciano poi le posizioni

$$\text{(A)} \qquad y_{u/r} = \sum_1^n{}_i\, \xi_i^{(u)}\, \lambda_{i/r}$$

$$\text{(6)} \qquad b_{\alpha/rs} = \sum_1^n{}_{hk}\, \omega_{\alpha hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s}$$

$$\text{(7)} \qquad \lambda_{i/rs} = \sum_1^n{}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s}\,.$$

Per le (A) le (I) assumeranno la forma

$$\sum_1^n{}_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s} \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = a_{rs}\,,$$

ovvero (M, II, 1, (4'))

$$\sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = \varepsilon_{hk} \;\text{[1]}$$

E poichè queste ci dicono semplicemente che $\xi_1^{(u)}, \xi_2^{(u)}, .., \xi_n^{(u)}$ sono i sistemi coordinati covarianti di n congruenze di linee contenute in V_{n+m} (le quali, come risulta dalle (A), pei punti di V_n coincidono rispettivamente colle

[1] Gli indici, i, h, k si intenderanno qui e in seguito suscettibili dei valori $1, 2, .., n$.

([1], [2], ..., [n]) potremo ad esse sostituire le (A), purchè in queste alle $\xi_i^{(u)}$ attribuiamo i significati ora stabiliti.

Le (II), tenuto conto delle (A) e delle (6) assumono la forma

$$\sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} y_{u'/rs} = \sum_1^m {}_\alpha\, z_\alpha^{(u')} \omega_{\alpha hk} - \sum_1^{n+m} {}_{uvw}\, c^{(uu')} \xi_h^{(v)} \xi_k^{(w)} c_{vw,u}\,;$$

mentre le (A) stesse derivate covariantemente secondo φ, tenendo conto delle (7), dànno

$$\sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} y_{u'/rs} = \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u')} \gamma_{ihk} + \frac{d\xi_h^{(u')}}{ds_k}\,.$$

Le (II) si trasformano dunque nelle

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\xi_h^{(u')}}{ds_k} = \sum_1^m {}_\alpha\, z_\alpha^{(u')} \omega_{\alpha hk} - \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u')} \gamma_{ihk} - \sum_1^{n+m} {}_{uvw}\, c^{(uu')} \xi_h^{(v)} \xi_k^{(w)} c_{vw,u}\,.$$

o nelle equivalenti

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \frac{d\xi_{h/u}}{ds_k} = \sum_1^m {}_\alpha\, \omega_{\alpha hk} z_{\alpha/u} - \sum_1^n {}_i\, \gamma_{ihk} \xi_{i/u} + \sum_1^{n+m} {}_{vw}\, c_{uv,w} \xi_h^{(w)} \xi_k^{(v)}\,.$$

In fine le (III) e (IV) assumono rispettivamente la forma

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \sum_1^m {}_\alpha \left(\omega_{\alpha ik}\, \omega_{\alpha jh} - \omega_{\alpha ij}\, \omega_{\alpha hk}\right) + \sum_1^{n+m} {}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, \xi_h^{(u)} \xi_i^{(u')} \xi_j^{(v)} \xi_k^{(v')} = \\ = \sum_1^n {}_{prst}\, a_{pr,st}\, \lambda_h^{(p)} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_k^{(t)}\,. \end{cases}$$

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \frac{d\omega_{\alpha ij}}{ds_l} - \frac{d\omega_{\alpha il}}{ds_j} + \sum_1^n {}_k \left\{\omega_{\alpha ik}(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \omega_{\alpha jk}\gamma_{kil} - \omega_{\alpha lk}\gamma_{kij}\right\} + \\ + \sum_1^m {}_\beta \left(\omega_{\beta il} \frac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_j} - \omega_{\beta ij} \frac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_l}\right) + \sum_1^{n+m} {}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, z_\alpha^{(u)} \xi_i^{(u')} \xi_j^{(v)} \xi_l^{(v')} = 0\,. \end{cases}$$

4. Essendo

$$\xi_{h/u} = \sum_1^{n+m} {}_v\, c_{uv}\, \xi_h^{(v)}\,,$$

se si indica con $\vartheta_{h/u}$ l'angolo, che la linea della congruenza [h] fa colla linea coordinata y_u tracciata in V_{n+m}, si hanno le

$$\text{(8)} \qquad \sqrt{c_{uu}} \cos \vartheta_{h/u} = \xi_{h/u}\,,$$

per le quali le (B') si trasformano nelle

$$-\sqrt{c_{uu}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h/u}}{ds_k}=-\cos\vartheta_{h/u}\frac{d\sqrt{c_{uu}}}{ds_k}+\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{hk}\,z_{\alpha/u}$$
$$-\sum_1^n{}_i\,\gamma_{ihk}\,\xi_{iu}+\sum_1^{n+m}{}_{vw}\,c_{uv,w}\,\xi_k^{(v)}\,\xi_h^{(w)}\,.$$

Si supponga la varietà V_{n+m} euclidea e che $y_1, y_2, .., y_{n+m}$ siano coordinate cartesiane ortogonali. — Le precedenti assumeranno la forma

$$\text{(9)}\qquad -\mathrm{sen}\,\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h/u}}{ds_k}=\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{\alpha hk}\,z_{\alpha/u}-\sum_1^n{}_i\,\gamma_{ihk}\,\xi_{i/u}\,.$$

Considerando poi un punto qualunque O di V_n e supponendo l'asse delle y_1 normale a V_n in O, in questo punto sarà

$$\vartheta_{h/1}=\frac{\pi}{2},\quad \xi_{i/1}=0,$$

e quindi le (9), per $u=1$, ci daranno

$$\text{(10)}\qquad -\frac{d\vartheta_{h/1}}{ds_k}=\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{\alpha hk}\,z_{\alpha/1}\,.$$

Poichè le $z_{1/1}, z_{2/1} \dots, z_{m/1}$ sono i coseni degli angoli, che l'asse delle y_1 fa con m direzioni uscenti da O ed in questo punto normali fra di loro ed a V_n, il secondo membro della (10) può riguardarsi come la proiezione sulla direzione y_1 di un vettore normale a V_n e che secondo le direzioni ricordate ha le componenti $\omega_{\alpha hk}$.

Per $k=h$ la (10) ci dice che questo vettore preso in direzione opposta e proiettato sopra una qualunque direzione $[\beta]$ normale a V_n rappresenta la curvatura della proiezione della linea $[h]$ sulla giacitura piana $[h\beta]$ determinata dalle due direzioni $[h]$ e $[\beta]$. — Per questa ragione il vettore di componenti $-\omega_{\alpha hh}$ può chiamarsi *curvatura normale relativa a* V_{n+m} della congruenza $[h]$ di linee tracciate in V_n.

Per $k \neq h$ il vettore di componenti $-\omega_{\alpha hk}$ proiettato sulla direzione $[\beta]$ rappresenta l'angolo, che fanno fra di loro le direzioni di due linee $[h]$, di cui una passi per O e l'altra pel punto P vicinissimo ad O sulla direzione $[k]$, proiettato sulla giacitura piana $[h\beta]$ e diviso per OP. — Tenendo conto delle relazioni

$$\omega_{\alpha hk}=\omega_{\alpha kh}\,,$$

che scendono dalle (6), si potrà dire che questo vettore rappresenta la *curvatura intermedia o mista relativa a* V_{n+m} delle due congruenze $[h]$ e $[k]$ di linee tracciate in V_n. — Si ha così un significato, per quanto so, non

ancora avvertito della torsione geodetica delle linee tracciate sulle ordinarie superficie.

Queste interpretazioni si estendono facilmente al caso, in cui la varietà V_{n+m} sia qualunque, avendo presente che ad essa per le considerazioni relative all'intorno di un determinato punto O possiamo sempre sostituire la varietà euclidea ad $n+m$ dimensioni tangente a V_{n+m} in O.

Se nelle (C) poniamo $k=i, h=j$, ne ricaviamo in particolare le

$$(C')\left\{\begin{aligned}&\sum_1^m{}_\alpha(\omega_{\alpha ii}\omega_{\alpha jj}-\omega_{\alpha ij}^2)+\frac{1}{4}\sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}c_{uu',vv'}(\xi_i^{(u)}\xi_j^{(u')}-\xi_i^{(u')}\xi_j^{(u)})(\xi_i^{(v)}\xi_j^{(v')}\\&-\xi_i^{(v')}\xi_j^{(v)})=\frac{1}{4}\sum_1^n{}_{pr,st}a_{pr,st}(\lambda_i^{(p)}\lambda_j^{(r)}-\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(p)})(\lambda_i^{(s)}\lambda_j^{(t)}-\lambda_i^{(t)}\lambda_j^{(s)}).\end{aligned}\right.$$

E poichè (M, IV, 4, (G)) $\omega_{\alpha ii}\,\omega_{\alpha jj}-\omega_{\alpha ij}^2$ è la espressione della curvatura totale della superficie geodetica di V_n passante per un punto qualunque O e determinata dalle due direzioni $[i]$ e $[j]$, considerata come appartenente alla varietà euclidea V_3 determinata da queste e dalla direzione $[\alpha]$, essa potrà dirsi *curvatura totale della giacitura* $[ij]$ *di* V_n *rispetto* alla direzione $[\alpha]$ normale a V_n. — Le formole (C') stabiliscono quindi il seguente teorema:

« Sia O un punto qualunque di una varietà V_n contenuta in una V_{n+m};
« e siano $[1], [2], \ldots, [m]$ m direzioni passanti per O ortogonali fra di loro
« due a due e normali a V_n. — La somma delle curvature totali di una
« superficie geodetica σ di V_n passante per O, comunque data, rispetto alle
« direzioni $[1], [2], \ldots, [m]$ è indipendente dalla scelta di queste ».

Designando poi questa col nome di *curvatura di* σ *relativa* a V_{n+m}, la (C') ci dice ancora che

« La curvatura di Gauss o curvatura assoluta di σ in ogni punto O è
« eguale alla curvatura di σ relativa a V_{n+m} aumentata della curvatura
« assoluta della superficie geodetica di V_{n+m} tangente a σ ».

Osserverò in fine che nel caso $n=3$, $m=1$ le formole (C) e (D) assumono rispettivamente la forma

$$\omega_{11}\,\omega_{22}-\omega_{12}^2+\sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_v=G$$

$$\frac{d\omega_{i1}}{dx_2}-\frac{d\omega_{i2}}{dx_1}+\sum_1^2{}_k\left\{\omega_{ik}(\gamma_{k12}-\gamma_{k21})+\omega_{1k}\,\gamma_{ki2}-\omega_{2k}\,\gamma_{ki1}\right\}$$

$$=(-1)^i\sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_{i+1/v}\,,\qquad(i=1,2)$$

rappresentandosi con G l'invariante di Gauss relativo alla forma φ, e posto

$$c \,.\, \gamma^{(uv)} = c_{u+1\, u+2\,,\, v+1\, v+2}\,,$$

colla convenzione di considerare come equivalenti gli indici congrui rispetto al modulo 3.

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota I di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

1. Il metodo esposto da Jacobi [1] per risolvere il problema del movimento di un sistema di n punti quando le forze applicate ammettano una funzione potenziale indipendente dal tempo, dà luogo, per il moto di un sol punto in un piano, alla considerazione di certi sistemi ortogonali, la cui particolarità consiste in ciò, che uno qualunque di essi ha una delle sue famiglie costituita da traiettorie del punto [2]. Precisamente, se U è la funzione potenziale e h la costante delle forze vive, ogni integrale della equazione

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2\,(\mathrm{U}+h)$$

eguagliato ad una costante rappresenta una famiglia di curve ortogonali ad un sistema di traiettorie del punto, per modo che da ogni integrale di quella equazione si deduce una famiglia di traiettorie del punto mobile. Se poi, insegna il metodo di Jacobi, indichiamo con $f(x\,,y\,,a)$ un integrale dell'equazione precedente contenente la costante arbitraria essenziale a, l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

fornisce tutte le traiettorie del punto che corrispondono ad un medesimo valore della costante delle forze vive h; e così si ottengono infiniti sistemi ortogonali, di cui una famiglia è formata di traiettorie, dipendenti dalla costante a e definiti dalle equazioni

$$(\alpha) \qquad f(x\,,y,\,a) = \text{cost.}, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

Si può ora domandare se fra questi sistemi ne esistano di quelli costi-

[1] *Vorlesungen ü. Dynamik*, 21. u. 22. Vorl.
[2] Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, livre V, chap. VI.

tuiti non da *una*, ma da *due* famiglie di traiettorie. È da una tale domanda che traggono origine questa breve Nota e un'altra che ad essa farà seguito. Da quanto verrò esponendo risulta che siffatti sistemi (necessariamente isotermi) non esistono nel movimento definito da una funzione potenziale affatto generica; per incontrarli bisogna assumere come funzione potenziale un integrale dell'equazione

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \lg U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lg U}{\partial y^2} = 0 \,,$$

e prendere la costante h eguale a zero (tolto il caso affatto ovvio in cui la forza applicata sia nulla).

Una volta riconosciuti, nei nn. 2 e 3, i movimenti ai quali dobbiamo limitare le nostre considerazioni, risolvo (n. 4) la questione di determinare effettivamente i sistemi, della natura che ho detto, corrispondenti a un dato movimento. Nel n. 5 mostro con un breve calcolo come nel caso attuale le due equazioni (α) non siano sostanzialmente distinte, secondo è da prevedersi. Dopo di avere, nella Nota II, fatto vedere che la determinazione dei sistemi in questione equivale alla ricerca delle geodetiche su una superficie sviluppabile (n. 6), applico, per fare un esempio, nei numeri seguenti la teoria svolta al caso delle forze centrali: almeno a quella classe di forze centrali la cui funzione potenziale soddisfa all'equazione (β).

2. Teorema. Se θ e θ_0 sono due integrali dell'equazione

$$(1) \qquad \Delta_1\theta \equiv \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2\,(U + h)$$

tali che le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$ siano ortogonali, il sistema di linee $(\theta\,, \theta_0)$ è isotermo.

Difatti, siccome le $\theta = \text{cost.}$ sono ortogonali ad una famiglia di traiettorie del punto, questa famiglia avrà per equazione differenziale

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dx - \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dy = 0\,;$$

ma le traiettorie ortogonali delle $\theta = \text{cost.}$ sono, d'altra parte, le linee $\theta_0 = \text{cost.}$, onde dovendo l'equazione precedente essere identica colla

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\theta_0}{\partial y}\,dy = 0\,,$$

dovrà aversi

$$(2) \qquad \frac{\partial\theta_0}{\partial x} = k\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial\theta_0}{\partial y} = -\,k\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\,,$$

indicando con k un fattore di proporzionalità. Da queste quadrando e sommando si deduce

$$\Delta_1\theta_0 = k^2\Delta_1\theta$$

e poichè è

$$\Delta_1\theta_0 = \Delta_1\theta = 2(\mathrm{U} + h),$$

ne viene

$$k^2 = 1 .$$

Le (2) si riducono dunque a

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x} = \pm\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\theta_0}{\partial y} = \mp\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

e queste dicono appunto che le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$ formano un sistema ortogonale isotermo.

Il teorema si può enunciare anche in questi termini: Se le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$, ortogonali fra loro, sono traiettorie del punto, il sistema ortogonale (θ, θ_0) è isotermo.

Viceversa: Se θ è un integrale della (1), ed ammette la funzione coniugata θ_0, anche θ_0 è un integrale della (1), e le linee $\theta = \text{cost.}$, $\theta_0 = \text{cost.}$ formano un sistema ortogonale (isotermo) di traiettorie del punto.

Raccogliendo in un solo enunciato il teorema precedente col suo inverso, possiamo dire: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee $\theta = \text{cost.}$ formino, insieme colle linee ad esse ortogonali, un sistema di traiettorie del punto mobile, è che la funzione $\theta(x, y)$ verifichi simultaneamente le due equazioni*

$$\Delta_1\theta = 2(\mathrm{U} + h), \quad \Delta_2\theta \equiv \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Quel sistema ortogonale è allora isòtermo.

3. La questione di determinare i movimenti, nei quali sono possibili sistemi ortogonali composti esclusivamente di traiettorie del punto, è dunque ridotta a trovare le condizioni affinchè le due equazioni (3) abbiano una soluzione comune.

Derivando ora la prima delle (3) rispetto a x oppure rispetto a y, e tenendo conto della seconda, si ottiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y};$$

queste, risolte rispetto a $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}$ danno:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2(U+h)}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial\theta^2}{\partial x\partial y} = \dfrac{1}{2(U+h)}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right), \end{cases}$$

e scrivendovi accanto l'altra

$$(4')\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{2(U+h)}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right),$$

potremo dire che le condizioni cercate non sono altro che le condizioni d'integrabilità del sistema (4), (4'). Queste condizioni sono

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2},$$

ed eseguendo i calcoli si trova che si riducono all'unica

$$(5)\quad (U+h)\Delta_2 U - \Delta_1 U = 0.$$

La U non dipende altro che dalle coordinate x e y, e non contiene affatto la costante h, per cui dovendo l'equazione essere soddisfatta identicamente, dovrà aversi, fintantochè h non è nulla,

$$U\Delta_2 U = \Delta_1 U = 0.$$

Queste due condizioni si riassumono poi nell'unica

$$U = \text{costante}.$$

Abbiamo dunque: *l'unico movimento in cui esistano sistemi ortogonali (isotermi) composti di sole traiettorie del punto, e nei quali la costante delle forze vive non sia nulla, è il movimento rettilineo uniforme.* Quei sistemi ortogonali sono, in tal caso, formati dalle rette parallele ad una stessa direzione e dalle loro perpendicolari.

4. Lasciando da parte questo caso così semplice e supponendo ora $h = 0$, l'equazione di condizione (5) si riduce a

$$(5')\quad U\Delta_2 U - \Delta_1 U = 0,$$

e ci rimane da passare alla effettiva determinazione dei corrispondenti sistemi ortogonali di traiettorie. Il procedimento che terremo ci farà ritrovare per U la condizione (5'), e ridurrà il problema delle traiettorie alle quadrature.

Questo problema, per quanto si è detto, consiste nel trovare le soluzioni comuni alle equazioni (3) con $h=0$, cioè le soluzioni del sistema

$$(3')\qquad \Delta_1\theta = 2\mathrm{U}\,,\quad \Delta_2\theta = 0\,.$$

Posto

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \theta_1\,,\quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \theta_2\,,$$

il sistema (3′) è equivalente a quest'altro:

$$(3'')\qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 = 2\mathrm{U}\,,\ \frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial\theta_1}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x} = 0\,.$$

Dalla prima di queste ricaviamo

$$\theta_2 = \pm\sqrt{2\mathrm{U} - \theta_1^2}\,,$$

e sostituendo nelle altre due otteniamo per θ_1 le equazioni

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial\theta_1}{\partial x} &= \mp\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial y}\sqrt{2\mathrm{U}-\theta_1^2} + \frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial x}\theta_1 \\ 2\frac{\partial\theta_1}{\partial y} &= \pm\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial x}\sqrt{2\mathrm{U}-\theta_1^2} + \frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial y}\theta_1\,. \end{aligned}\right.$$

Intanto la condizione di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}$$

dà, osservando che deve aver luogo identicamente,

$$(7)\qquad \Delta_2 \lg \mathrm{U} = 0\,,$$

e questa coincide precisamente coll'equazione (5′) [1].

Le (6) poi si integrano subito facendo la sostituzione

$$\theta_1 = \pm\sqrt{2\mathrm{U}}\,\varphi\,,$$

poichè con ciò si trasformano nelle altre

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial y}\sqrt{1-\varphi^2} &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial x}\sqrt{1-\varphi^2} &= 0\,, \end{aligned}$$

[1] L'equazione di condizione che s'è trovata per la U, si può interpretare dicendo che le linee $\mathrm{U}=$ cost. (equipotenziali) insieme colle loro traiettorie ortogonali (linee di forza) debbono formare un sistema isotermo.

dalle quali si deduce integrando:

$$\text{arc sen}\,\varphi = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}\,dx\right) + a\,,$$

a essendo una costante arbitraria. Si ha quindi

$$(8)\qquad \begin{cases} \theta_1 = \pm\sqrt{2U}\,\text{sen}\left[a + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}\,dx\right)\right] \\ \theta_2 = \pm\sqrt{2U}\,\cos\left[a + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}\,dx\right)\right], \end{cases}$$

e la funzione θ che si cerca vien data dalla formola

$$(9)\qquad \theta = \int(\theta_1\,dx + \theta_2\,dy)\,.$$

Le formole (8) e (9) risolvono il problema: s'intende che la U che vi figura dev'essere un integrale della (7).

5. La funzione θ data dalla (9) contiene la costante arbitraria a non additiva; quindi sono infiniti i sistemi isotermi, composti di sole traiettorie, corrispondenti ad una data funzione potenziale. Anzi si può dire che questi sistemi esauriscono tutte le traiettorie del punto. Difatti, per il modo come θ contiene la costante a, secondo la teoria di Jacobi queste ultime sono *tutte* rappresentate dall'equazione

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{cost.}\,,$$

ed i nostri sistemi isotermi sono appunto quelli costituiti dalle coppie di famiglie $\theta(x, y, a) = \text{cost.}$, $\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{cost.}$

A questo punto si rende palese una notevole particolarità dei movimenti che studiamo, in relazione col metodo di Jacobi. Siccome i sistemi isotermi che abbiamo segnalato sono formati esclusivamente di traiettorie del punto, ne viene che anche l'equazione $\theta(x, y, a) = \text{cost.}$ deve rappresentare tutte le traiettorie, e quindi si può sostituire all'altra $\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{cost.}$ Il procedimento generale che conduce alla determinazione delle traiettorie si semplifica dunque in quei casi in cui la funzione potenziale verifica la (7) ed è nulla la costante delle forze vive; poichè una volta calcolata la θ mediante le formule (8) e (9), si hanno senz'altro le traiettorie eguagliando θ ad una costante arbitraria.

Sarà bene mostrare direttamente sulle formole come la cosa accada. In sostanza bisogna far vedere che le due equazioni

$$\theta(x, y, a) = b, \quad \frac{\partial\theta}{\partial a} \equiv \theta'(x, y, a') = b'$$

rappresentano le medesime linee; ossia, che se L è una linea di equazione $\theta(x, y, a) = b$, dove a e b hanno certi valori determinati, dev'essere possibile attribuire ad a' e b' valori tali che l'equazione $\theta'(x, y, a') = b'$ rappresenti ancora la stessa linea: il che equivale a dire che si deve poter esprimere a' e b' in funzione di a e b in modo che le due equazioni

(10) $$\theta(x, y, a) = b, \quad \theta'(x, y, a') = b'$$

coincidano.

Ora ponendo per brevità

$$\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x} dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y} dx\right) = 2P,$$

le (8) si scrivono

(8′) $$\theta_1 = \pm\sqrt{2U}\,\text{sen}\,(a + P), \quad \theta_2 = \pm\sqrt{2U}\cos(a + P),$$

onde

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial a} = \theta_2, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial a} = -\theta_1;$$

avremo quindi dalla (9):

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \int\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial a} dx + \frac{\partial\theta_2}{\partial a} dy\right) = \int(\theta_2\, dx - \theta_1\, dy),$$

e che $\theta_2\, dx - \theta_1\, dy$ sia un differenziale esatto risulta dalla seconda delle (3″). Le equazioni (10), cioè

(10′) $$\begin{cases} \int\{\theta_1(x, y, a)\, dx + \theta_2(x, y, a)\, dy\} = b \\ \int\{\theta_2(x, y, a')\, dx - \theta_1(x, y, a')\, dy\} = b' \end{cases}$$

si riducono allora l'una all'altra mediante la sostituzione

(11) $$a' = a + (4k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad b' = -b,$$

con k intero qualunque; difatti si ha dalle (8′) e (11):

$$\theta_1(x, y, a') = \pm\sqrt{2U}\,\text{sen}\,(a' + P) = \pm\sqrt{2U}\cos(a + P) = \theta_2(x, y, a)$$
$$\theta_2(x, y, a') = \pm\sqrt{2U}\cos(a' + P) = \mp\sqrt{2U}\,\text{sen}\,(a + P) = -\theta_1(x, y, a),$$

per cui sostituendo nella seconda delle (10′) e leggendovi $-b$ in luogo di b', essa si identifica colla prima.

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota III di Alfonso Sella, presentata dal Socio Blaserna.

1. Nella Nota precedente (Rendiconti, XI, pag. 242) ho annunciato che lasciando a lungo l'aria esposta all'emanazione dell'ossido di torio in spazio chiuso e provocando poi in seno a quest'aria un effluvio elettrico fra punta e piano, si trova radioattiva quella porzione del piano che è colpito dall'effluvio e con contorni che corrispondono a quelli delle figure elettriche del Kundt.

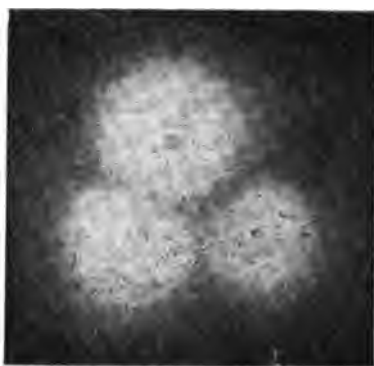
Mi sia ora permesso di fermarmi un momento sopra i processi seguiti per ottenere queste figure. Esse furono ottenute dal Kundt nel 1869 nel seguente modo. Ad una lamina metallica è affacciata una punta; si ricopre la lamina di polvere di licopodio e poi la si elettrizza tenendo la punta al suolo; soffiando via la polvere sulla lamina, rimane aderente un cerchio di polvere a contorni molto netti, sotto la punta, e qualunque sia il segno della elettrizzazione. Il Righi ha mostrato nei suoi lavori sulle ombre elettriche come queste figure si possono ottenere direttamente colla fotografia, ricoprendo la lamina con una lastra sensibile, ed Holtz ha osservato il cerchio del Kundt come fenomeno luminoso ricoprendo la lamina di una stoffa di seta. Recentemente il De Heen ha riottenuto le figure del Kundt avvicinando una fiamma, ovvero una punta, ad una superficie isolante elettrizzata e poi lasciandovi cadere sopra della polvere di zolfo.

Ma queste figure si possono ottenere immediatamente nel seguente modo: si provoca l'effluvio fra punta e piano in aria contenente minutissime particelle in sospensione, ottenute facendo ardere nelle vicinanze una fiamma fumosa od un nastro di magnesio. Le particelle vanno immediatamente a deporsi sulla lamina secondo le figure del Kundt. Questa disposizione è molto comoda per dimostrare tutte le circostanze, che influiscono sovra queste figure, come distanza della punta dal piano, segno elettrico della punta, e la deformazione subìta dai cerchi, quando alla lamina si affacciano più punte da essa equidistanti. Ma di tutto questo non è ora il caso di occuparci e ne ho parlato solo in via incidentale. Mi preme solo di rilevare il modo, col quale avviene questa deposizione delle particelle sospese nell'aria sulla lamina metallica.

Le ricerche di Nahrwold, Aitken, Lodge, R. v. Helmholtz, Vandeyver hanno dimostrato la floculazione quasi istantanea delle polveri e dei fumi sospesi nell'aria e la sparizione della nebbia in vicinanza di conduttori ad alto potenziale. Il metodo di ottenere le figure del Kundt, che sopra ho riferito,

mostra adesso dove vanno a battere le particelle sospese nell'aria; esse, elettrizzate dall'effluvio partente dai conduttori, vanno a fissarsi sui corpi investiti dal soffio elettrico.

2. Ritorniamo ora alla esperienza, che ho riferito in principio. Presento nell'unita figura la riproduzione di una fotografia ottenuta prendendo una lamina, attivata con tre punte in aria esposta a lungo alle emanazioni dell'ossido di torio, ricoprendola con carta nera opaca e poi sovrapponendo ad essa una lastra sensibile. La figura è identica a quella che si osserva direttamente sulla lastra, quando si fa avvenire l'effluvio in aria contenente particelle sospese e si può ben dire *figura del Kundt radioattiva*. Essa si ot-

tiene con punte sia negative, sia positive; e questo mostra che la piccola carica positiva propria delle particelle dell'emanazione torica, dimostrata dal fatto che in campi elettrici deboli esse si muovono nel senso delle linee di forza, non entra in giuoco; ma che si deve immaginare che esse particelle attive stando a lungo nell'aria in un recipiente chiuso si attaccano ad aggregati molecolari piuttosto considerevoli, i quali si comportano poi come le particelle di fumo sospese.

Se le cose stanno così, è presumibile che mettendo due sistemi di lamina e punta nel medesimo spazio chiuso, provocando per brevi istanti l'effluvio in un sistema, l'aria, per così dire, si purificherà immediatamente ed un effluvio successivo nel secondo sistema non potrà più produrre alcuna attivazione. L'esperienza ha confermato pienamente questa veduta. In una medesima cassa della capacità di circa 300 litri, dalle due parti della bacinella contenente l'ossido torico e ad una stessa distanza posi due lamine colle rispettive punte affacciate; quattro fili adduttori uscivano dalla cassa. Lasciata la cassa chiusa per 24 ore, eccitai una prima lamina per un minuto e poi subito dopo la seconda. La prima lamina si trovò fortemente attiva e la se-

conda mostrò una traccia di attivazione, quale viene assunta da una lamina lasciata a sè in un ambiente contenente emanazioni toriche.

E lo stesso fatto della immediata purificazione dell'aria per un effluvio risulta anche da questo, che per attivare una lamina basta una durata brevissima dell'effluvio, un quarto d'ora non producendo un effetto maggiore di un minuto.

E si comprende ora, perchè l'effluvio, che si ottiene ponendo punta e piano in comunicazione coi poli di un trasformatore Tesla, non attivi la lastra, come ho riferito nella Nota precedente. Infatti si conosce (Lehmann) che in queste condizioni non si produce vento elettrico.

3. Un'altra conseguenza probabile della struttura grossolana, per così dire, delle particelle attive sarebbe che esse si possono raccogliere per altre vie, oltre l'elettrica, come p. es. filtrando l'aria attraverso l'ovatta. Si rinchiuse l'ossido di torio in una cassa munita di due fori e poi per uno di questi si produsse un'aspirazione mediante un tubo collegato con un aspiratore ad acqua ed interponendo nel tubo un batuffolo di ovatta leggermente compressa; proseguendo l'aspirazione sino a che tutta l'aria contenuta nella cassa (come al solito in riposo da 24 ore) fosse rinnovata. Cimentando poscia il filtro di ovatta all'apparecchio di misura, constatai che l'ovatta aveva acquistato intense proprietà radioattive. E l'aria filtrata perde d'altra parte le proprietà, che ho ritrovato per l'aria stata a lungo in riposo in presenza di emanazioni toriche. Così quell'aria filtrata portata in una seconda cassa, dove funzioni un effluvio fra punta e piano, non genera più alcuna attività nella lamina, mentre che ciò avviene se l'aria non è stata filtrata ed in eguale misura quasi, come se la lamina fosse attivata nella cassa principale. E così disponendo di seguito due filtri nello stesso percorso, il secondo non presenta più traccie di attività.

Facendo gorgogliare l'aria estratta dalla cassa principale in acqua, questa arresta una parte delle particelle attive. Questo si constata evaporando a secco l'acqua in una capsula metallica e poi cimentando la capsula, che si ritrova radioattiva. L'impoverimento dell'aria gorgogliata si dimostra poi mediante un effluvio prodotto nella seconda cassa. L'attivazione dell'ovatta è dello stesso genere di quella provocata su lamine metalliche dal processo elettrico e questo risulta dal modo con cui varia col tempo. Aria fresca che passa sopra l'ossido di torio e che trascina con sè l'emanazione torica non viene alterata filtrando attraverso l'ovatta o gorgogliando nell'acqua, secondo quanto è stato osservato dal Rutherford. Tutto questo mostra quali profonde modificazioni subisca l'emanazione torica mantenuta lungo tempo in recipienti chiusi.

4. Le esperienze precedenti si riferiscono tutte ad aria esposta a lungo ad emanazioni toriche, ma mi hanno servito — stante la maggiore intensità

degli effetti — di guida e di schiarimento per lo studio dell'aria atmosferica ordinaria. Vengo ora alle esperienze istituite con quest' ultima.

Provocando un effluvio fra punta e piano per pochi minuti in una cantina chiusa da lungo tempo — operavo nella stanza a temperatura costante dell' Istituto Fisico di Roma, la quale non ha altra apertura all' infuori della porta — si ottiene una forte attivazione della lamina. L'effluvio si può provocare con una macchinetta ad influenza, ma più comodamente, stante la facilità con cui la macchina si diseccita in un ambiente alquanto umido, con un rocchetto Ruhmkorff di dimensioni medie e colla seguente disposizione. Il polo negativo del rocchetto è a terra, l' altro in comunicazione con un filo che termina a punta; affacciato a questa si trova un disco metallico in comunicazione coll' armatura interna di una boccia di Leida di dimensioni medie, la cui armatura esterna è al suolo. Dall' armatura interna parte una resistenza liquida costituita da un lungo tubo capillare di vetro ripieno di acqua distillata, al cui altro estremo è collegata la lamina da attivarsi; finalmente affacciate a questa lamina si trovano le punte collegate col suolo.

Attivata una prima lamina, se si passa ad elettrizzare una seconda e poi successivamente una terza, si nota una attivazione sempre decrescente. La spiegazione scaturisce subito dalle esperienze, che ho riferito più sopra; l'aria della stanza va successivamente purificandosi dalle particelle attive in essa sospese.

Poi passai ad una filtrazione dell' aria. Nel mezzo della stanza arrivava dall' esterno un lungo tubo, alla cui estremità era posto un filtro di ovatta. Dal di fuori si poteva produrre un'aspirazione costringendo l'aria della stanza a filtrare attraverso l'ovatta; dopo alcune ore di aspirazione l'ovatta cimentata all'apparecchio di misura diede segni molto netti di attivazione. L' ovatta, lasciata a sè, perde rapidamente le sue proprietà attive, molto più che non quando ha filtrato dell'aria contenente le emanazioni toriche. Questa differenza, che si ritrova costantemente, quando si paragonano corpi attivati con aria atmosferica ordinaria o con aria artificialmente provveduta di emanazioni toriche è molto caratteristica e prova che, malgrado tutte le analogie, esiste una differenza profonda fra l' attivazione dovuta all' emanazione torica e quella prodotta dalle particelle attive contenute nell' aria atmosferica.

5. Ho anche istituito delle esperienze per vedere il comportamento di aria stata esposta a lungo all' emanazione torica portata poi in un ambiente non contenente ossido di torio e poi lasciata a sè; e per questo ho fatto uso, come al 3, di due casse collegate con un tubo, nella prima delle quali era l' ossido torico e nella seconda la lamina colle punte affacciate. Se ora si produce l' effluvio nella seconda cassa ad intervalli diversi dopo di averla riempita di aria estratta dalla prima (si intende riempiendola ad ogni esperienza), si può giudicare delle modificazioni subite da quest'aria col tempo.

La proprietà di attivare la lastra si mantiene quasi costante nelle prime tre ore; è ridotta circa alla metà dopo 6 ore, e dopo 16 al sesto.

6. Ho voluto anche ricercare se si può fissare le particelle attive su di un isolante investito dal soffio elettrico. A tale uopo adottai la seguente disposizione. Alle punte al suolo era affacciata una lastra di vetro, la cui superficie posteriore era ricoperta nella parte centrale da stagnola, che veniva elettrizzata. L'effluvio dalle punte si produce meno bene in queste condizioni, non avvenendo lo scambio elettrico, e perciò non è a raccomandarsi l'uso di una macchina elettrostatica, che si diseccita facilmente. Meglio è adoperare il rocchetto colla disposizione descritta al 4.

Per cimentare adesso la lastra isolante all'apparecchio di misura descritto nella Nota precedente, si dovette ricorrere all'artificio di ricoprire la faccia della lastra stata esposta all'effluvio con un foglio di stagnola. Così si aveva una superficie conduttrice; però i raggi emanati dalla lastra di vetro attivata dovevano prima attraversare la stagnola, di cui peraltro conoscevo per esperienze preliminari il potere assorbente. La lastra di vetro mostrò un'attivazione molto minore di quella ottenuta a condizioni eguali da una lastra metallica, ma sempre molto notevole, e la minore attivazione può anche spiegarsi in parte colla minore energia o concentrazione del soffio.

7. Ricorderò ora una prova in cui ho tentato di attivare una lastra, col solito processo elettrico, in aria chiusa, in cui avevo posto del fosforo umido ossidantesi, che notoriamente rende l'aria fortemente conduttrice. L'esperienza diede risultato negativo.

8. Riferirò in fine i risultati preliminari di alcune esperienze ancora in corso, istituite per decidere se si ottiene una radioattività sugli elettrodi, quando si elettrolizza una soluzione di nitrato torico. A tale scopo presi il liquido detto commercialmente « liquido Auer » che è una soluzione concentrata di nitrato di torio con poco nitrato di cerio, e lo acidificai fortemente con acido nitrico. Facendo passare una corrente debole in modo che si noti appena uno svolgimento di bollicine agli elettrodi, si trova fortemente attivo l'elettrodo negativo. È da osservarsi che con corrente intensa ed a caldo si ottiene un deposito metallico agli elettrodi, la cui natura sta ora studiando il dott. Montemartini.

Noto che la radioattività così ottenuta va decrescendo col tempo, come quelle prodotte coi processi precedenti; la quale circostanza gioverà a caratterizzarne la natura.

Nessun risultato ottenni elettrolizzando una soluzione acida di nitrato di uranio.

Fisica. — *Su due nuovi fenomeni magneto-ottici osservati normalmente alle linee di forza.* Nota preliminare di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

Pensando alla natura intima del fenomeno scoperto nel 1875 dal dott. Kerr, alla birifrangenza cioè generata da un campo elettrostatico agente su di un dielettrico solido o liquido, la possibilità di un analogo fenomeno in un campo magnetico scaturisce immediatamente. Nelle esperienze di Kerr si tratta di forze elettrostatiche agenti, parallelamente alla direzione del campo, sulle particelle ultime di un mezzo materiale isolante, forze che, distruggendo la isotropia del mezzo, generano i fenomeni di birifrangenza. Considerando invece un campo magnetico che investa una sostanza sensibilmente magnetica, si deve riconoscere che, anche in tal caso, debbano esistere delle forze tra le minime particelle di essa, le quali, se la materia è sufficientemente deformabile od orientabile nella sua ultima struttura, possano generare birifrangenza, normalmente alle linee di forza del campo.

Veramente dai notevoli lavori di Voigt, risulterebbe che in questa direzione, tutte le sostanze, dotate di forte potere rotatorio magnetico, dovrebbero divenire birifrangenti. E anzi, lo stesso Voigt ha trovato la birifrangenza magnetica nei vapori di sodio, e l'ha cercata inutilmente nel flint. Inoltre Cornu, da pochi giorni mancato ai vivi, accennava a fenomeni caratteristici che si dovrebbero osservare normalmente alle linee di forza di un campo magnetico.

Prescindendo dalle idee teoriche e dalle esperienze dei due eminenti fisici citati, ho intrapreso da qualche tempo delle ricerche sperimentali, unicamente guidato dall'intento di verificare la giustezza o meno dell'idea più sopra esposta.

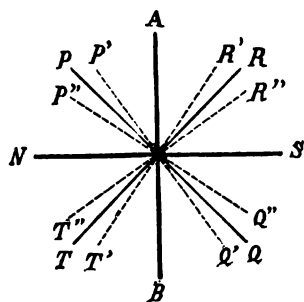
È mio scopo di accennare in questa breve Nota, sorvolando sui numerosi tentativi infruttuosi che precedettero, alla reale constatazione da me fatta di casi di netta birifrangenza di speciali sostanze magnetiche in soluzioni acquose, e di un secondo fenomeno, del tutto nuovo anche per la sua natura, presentato dalle stesse soluzioni.

La *birifrangenza magnetica* è presentata in piccolissima misura dal *cloruro ferroso* in soluzione non molto concentrata, ed in grado notevolissimo da talune varietà di *ferro dializzato* od *ossido ferrico in soluzione colloidale*. Alcuni campioni di quest'ultimo liquido, così incerto nella sua struttura molecolare, diluiti in tant'acqua da sembrare pressochè incolori, contenuti in vaschette trasparenti lunghe 7 cm., e sotto l'azione di campi magnetici di 18000 unità circa, presentano un potere birifrangente uguale

a circa $^1/_4$ di lunghezza d'onda nel giallo, sicchè *luce polarizzata linearmente, dopo aver traversato il liquido, resta trasformata in luce polarizzata circolarmente.* Il fenomeno è per altri campioni di quella sostanza, nullo o quasi, e per altri è misto al secondo fenomeno di cui parlo più sotto. Quando si ha da fare realmente con una netta birifrangenza, la si può compensare talvolta comprimendo un pezzo di vetro parallelamente alle linee di forza (*birifrangenza positiva*), e in altri casi stirando il vetro (*birifrangenza negativa*).

Continuando lo studio della birifrangenza, mi sono imbattuto in un altro fenomeno, il quale è generalmente presentato da speciali soluzioni di *cloruro ferrico che hanno agito su idrati di ferro.*

Esso consiste in una rotazione del piano di polarizzazione della luce, quando questo piano non è parallelo o normale alle linee di forza. Tali rotazioni sono indipendenti dal senso del campo, talchè sono da distinguersi, anche per tal riguardo, dalle rotazioni Faraday. Le indicherò sotto il nome di *rotazioni bimagnetiche*, per ricordare che probabilmente, oltre all'azione magnetica del campo e a speciali proprietà molecolari della sostanza attiva, anche le proprietà magnetiche di questa sono cause del fenomeno.

Per chiarire sin d'ora la natura di questo fenomeno, sia NS la direzione del campo magnetico. Se la luce, propagandosi normalmente al piano

della figura, ha il suo piano di polarizzazione su NS o su AB, non si osserva alcun fenomeno, eccitando il campo; ma se quel piano è su RT o su PQ, esso rota portandosi nei due casi, rispettivamente in $R'T'$ e $P'Q'$. Voglio chiamare questo fenomeno *positivo*, per distinguerlo da altri casi in cui, campioni di liquidi attivi fanno rotare i piani predetti in $R''T''$ e $P''Q''$ (*rotazione bimagnetica negativa*). Il fenomeno è massimo per le posizioni PQ ed RT, a 45° sulle linee di forza.

La birifrangenza magnetica e la rotazione bimagnetica, sieno esse positive o negative, sono quattro fenomeni che si presentano in condizioni speciali del liquido magnetico su cui si sperimenta. Ho già proceduto alla individualizzazione di liquidi che hanno distintamente qualcuna di quelle proprietà;

ma il problema, già difficile da questo riguardo, si complica perchè sembra che talvolta più di uno dei fenomeni accennati si presentino contemporaneamente.

Mi riservo, dunque, di dire prossimamente i risultati più concreti delle mie esperienze.

Fisica. — *Sulla influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Socio Blaserna.

Poche e contraddittorie sono le ricerche sperimentali dirette, fin ad ora compiute, per determinare l'influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione di un liquido (1). Già Nollet e Cavallo trovarono che l'elettrizzazione di una superficie liquida ne accelera la evaporazione, mentre Van Marum e Pfaff non credettero poterle attribuire questa proprietà. Ricerche più complete furono poi compiute dal Peltier e dal Mascart (2), elettrizzando fortemente un corpo di fronte ad una bacinella ripiena del liquido da studiare e misurando poi la velocità di evaporazione: misure compiute in numero molto grande e cercando di evitare tutte le possibili influenze esterne, diedero come risultato che l'evaporazione in quelle condizioni è circa doppia di quella che si ha quando il corpo di fronte alla bacinella è scarico.

Lecher (3), ripetendo le esperienze del Mascart, trovò confermati i fatti da lui osservati, ma, indagandone la ragione, giunse alla conclusione che la più grande velocità di evaporazione osservata dal Mascart non era che una conseguenza del vento elettrico producentesi intorno ai corpi portati ad elevato potenziale.

Crookes (4) e Wirtz (5) elettrizzarono direttamente il liquido, posto entro bacinelle isolate, mediante un rocchetto d'induzione o una macchina Holtz; e misurarono la quantità di liquido evaporantesi, ma giunsero a risultati contraddittorî. Il Crookes trovò che non vi è alcuna differenza nella velocità di evaporazione fra il liquido scarico e lo stesso carico positivamente, mentre il liquido carico negativamente evaporava più in fretta. Il Wirtz invece dalle sue numerose misure, sulle quali però nella Memoria, quale è nei Wiedemann's Annalen, non è riportato alcun dato numerico, credette poter concludere che l'elettrizzazione di un liquido, qualunque sia il suo segno, ne ritarda l'eva-

(1) Per velocità di evaporazione intenderemo la quantità di liquido evaporata nell'unità di tempo.

(2) Comptes Rendus, 86, pag. 575, 1878.

(3) Wien. Ber. 96 (2), pag. 103.

(4) Proc. Roy. Soc. 50, pag. 88, 1891.

(5) Wied. Ann. 37, pag. 516, 1887.

porazione, e che un' elettrizzazione positiva la ritarda di più che non una negativa.

Come si vede, nel campo sperimentale le conclusioni sono molto contradditorie ed incerte; ho voluto quindi tentar di cercare il modo di porre in evidenza quest' effetto, malgrado la sua piccolezza, evitando, per quanto fosse possibile, tutte le cause d' errore che possono influire sull' andamento del fenomeno e ci sono riuscito nel modo seguente.

Invece di far evaporare l' acqua o il liquido da studiare da una bacinella e ricorrere alla bilancia per determinare le quantità di liquido evaporate, il che avrebbe richiesto disposizioni sperimentali o manipolazioni che avrebbero potuto introdurre cause d' errore non lievi, ho pensato di misurare mediante un catetometro la diminuzione del diametro verticale di una goccia del liquido posta all' estremità di un' asticella metallica in comunicazione colla sorgente di elettricità.

La disposizione sperimentale risulta senz'altro chiara dalla figura annessa: la goccia G si depositava con un contagoccie su una specie di piccola scodella incavata all' estremità di un' asticciuola di ottone *a* del diametro di circa 2 millimetri attraversante un tappo di paraffina N; la goccia veniva così ad occupare il centro di una scatola metallica cilindrica S, munita di chiusura a mercurio T, e posta in comunicazione col suolo.

Onde operare sempre alle medesime condizioni ed evitare la variabilità dello stato igrometrico dell' ambiente in cui veniva a trovarsi la goccia, me-

diante un aspiratore ad acqua si faceva passare una lentissima corrente d'aria sulla goccia nel modo il più possibilmente simmetrico; per disseccare questa aria la si faceva gorgogliare prima in una boccia contenente acido solforico puro, quindi passare per una serie di 8 tubi ripieni di cloruro di calcio puro e secco, e per un tubo contenente del sodio metallico; per privare poi quest'aria del pulviscolo si faceva passare da ultimo per un tubo contenente della bambagia secca e ben pressata.

Il pericolo di un eventuale arrivo di umidità dall'aspiratore in S veniva ovviato mediante un altro tubo a cloruro di calcio inserito fra S e l'aspiratore.

Attraverso una finestra con vetro masticiato A si osservava la goccia illuminata sull'altra parte mediante una fiamma a gas posta dietro la finestra B, e si determinava di quanto diminuiva il diametro verticale della goccia durante mezz'ora mediante un catetometro il cui cannocchiale, munito di speciale obbiettivo e di un micrometro oculare a filo mobile, permetteva di valutare variazioni di detto diametro di $^1/_{200}$ di millimetro. La velocità del flusso d'aria secca investente la goccia veniva mantenuta costante regolando l'aspiratore mediante apposito rubinetto, finchè attraverso l'acido solforico della prima boccia non passava un determinato numero di bolle per minuto secondo. L'invariabilità della posizione mutua del cannocchiale del catetometro e dell'asticella *a* veniva controllata regolarmente, determinando prima d'ogni misura col catetometro la posizione dell'orlo superiore dell'asticella *a*. L'elettrizzazione si faceva mediante una macchina ad acqua del Thomson, il cui funzionamento veniva sorvegliato mediante un elettrometro posto in comunicazione con *a*.

Le misure vennero fatte alternativamente colla goccia carica e colla goccia scarica; i risultati ottenuti sono compendiati nelle seguenti tabelle, ove i numeri riportati rappresentano in duecentesimi di millimetro, la diminuzione manifestatasi in un certo tempo nel diametro verticale della goccia.

Liquido: acqua comune.
Portata della corrente d'aria secca: 50 cm.^{3} al 1′.
Temperatura: 11°.
Diametro della goccia: 2 millimetri circa.
Durata dell'esperienza: 30′.
Elettrizzazione negativa a — 3000 Volta circa.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Goccia carica	29,5	28,6	30	29	29,5	30,6
» scarica	32	31,9	33	32,1	31,8	32,8
» carica	29,5	29	30,5	29,6	29,8	30,0

Liquido: acqua distillata; il resto come sopra.

	I.	II.		III.
Goccia carica	27,5	25	goccia scarica. . . .	30,2
» scarica	30,1	29	» carica	28,5
» carica	28,1	25	» scarica. . . .	30,1

Ho voluto quindi provare un liquido che evaporasse molto più lentamente, e ho scelto l'anetolo coi seguenti risultati:

Liquido: anetolo.
Portata della corrente d'aria secca: 60 cm.^{3} al 1'.
Elettrizzazione negativa a — 3000 Volta circa.
Temperatura: 11°.
Diametro della goccia: 2 millimetri circa.
Durata dell'esperienza: 60'.

	I.	II.
Goccia carica	28	29,2
» scarica	32,8	32,6
» carica	27	26

È dunque certo che l'elettrizzazione ritarda l'evaporazione debolmente, ma in modo sensibile.

Ora, ricorrendo ad un ragionamento analogo a quello col quale W. Thomson [1] riuscì a dimostrare l'influenza delle forze capillari sulla tensione del vapore sovrastante ad una superficie liquida, si può dimostrare che la tensione del vapore sovrastante ad una superficie liquida elettrizzata evaporantesi è, a parità di temperatura, più piccola di quella che esisterebbe se la superficie non fosse elettrizzata, di una quantità eguale a $2\pi\sigma^2 \frac{\delta}{d}$ [2] δ essendo la densità del vapore, d quella del liquido, σ la densità elettrica superficiale [3], il che dunque importa una diminuzione nella velocità d'evaporazione conforme ai risultati sperimentali.

[1] Proc. of the Roy. Soc. Edinburgh., febr. 7, 1870.

[2] F. de Phys. 1884 (2), 3, pag. 443.

[3] Considerando il caso di una goccia e confrontando questa variazione nella tensione del vapore dovuta alla sola elettrizzazione con quella: $\frac{2T}{\varrho}\frac{\delta}{d}$ dovuta alla capillarità (T = tensione superficiale e ϱ = raggio di curvatura della goccia), si arriva facilmente a trovare quale dovrebbe essere il raggio di una goccia affinchè le due azioni dell'elettrizzazione, che tende a diminuire la evaporazione, e della capillarità che tende ad accelerarla, si compensassero; si ha così:

$$\varrho^2 = \frac{e^2}{16\pi T^2},$$

e essendo la carica elettrica della goccia; formola identica a quella trovata da J. J. Thomson e riportata nel suo libro: *Die Entladung der Elektricität durch Gase*, pag. 10.

Noi possiamo però ora domandarci quale sarebbe, secondo le considerazioni teoriche cui ho accennato, la diminuzione della tensione del vapore acqueo sovrastante ad una goccia d'acqua delle dimensioni da me usate, e nelle condizioni verificantisi nelle mie esperienze. Si arriva allora al seguente risultato: la diminuzione della tensione del vapore d'acqua sovrastante ad una goccia di 2 mm. di diametro, caricata a 3000 Volta raggiunge al massimo il valore di $3 . 10^{-6}$ atmosfere, diminuzione straordinariamente piccola d'ordine inferiore alle comuni variazioni barometriche che si producono da un momento all'altro, e alla quale non si può far risalire la diminuzione di evaporazione osservata. Resta quindi il dubbio che l'elettrizzazione agisca più direttamente alla velocità di evaporazione e in modo non ancora conosciuto.

Ho infine tentato di vedere se vi fosse una differenza di comportamento fra le due elettricità, questione che presenta molto interesse essendo accertato che quando un gas elettrizzato arrivando in un ambiente contenente del vapore d'acqua condensa questo in nebbia, la grandezza delle goccioline di questa dipendono dal segno dell'elettrizzazione del gas, ed è maggiore quando il gas è carico negativamente. Ciò parrebbe indicare, osserva il Thomson [1], che una goccia d'acqua carica positivamente evapora più in fretta che una goccia delle medesime dimensioni carica negativamente.

Esperienze ripetute con ogni cura, alternandole in tutti i modi, non hanno però permesso di scorgere alcuna differenza di comportamento fra le due elettricità, e la velocità d'evaporazione nei due casi si è mantenuta, nelle condizioni almeno in cui sperimentavo, molto approssimativamente la stessa.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota I del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In un'altra Nota, pubblicata in questi Rendiconti, stabilivo le equazioni differenziali che reggono il moto di un pendolo sferico [2]. Cercando poi di risolvere con maggior generalità ed esattezza il problema fondamentale della sismografia, da me già risoluto nella Nota citata ed in un'altra successiva (seduta del 17 marzo), venni condotto a considerare il pendolo sferico come caso particolarissimo d'un sistema meccanico assai più generale, cioè d'una *catena di corpi rigidi*: e quindi le equazioni trovate come caso particolare d'un altro sistema d'equazioni, alle quali si può arrivare con metodo identico e con grande facilità, grazie alla perfetta simmetria di formole che la stessa generalità del problema consente.

[1] *Die Entladung der Elektricität durch Gase*, pag. 10, Leipzig 1900.
[2] *Sulla determinazione dei moti sismici.* Seduta del 3 marzo 1901, vol. X, pagg. 144-148.

In questa prima Nota stabilirò le equazioni dinamiche relative al caso generale; in un'altra successiva applicherò i risultati ottenuti ad un caso speciale, che mi pare importante per la teoria degli strumenti sismici, e ritroverò, a guisa di corollario, la soluzione del problema testè citato.

1. Si immagini un sistèma di n corpi rigidi

$$C_r \ (r = 1, 2, \ldots, n),$$

tale che ciascuno di essi è legato *almeno per un punto* al precedente [1]. Fissato poi in ciascuno di essi un sistema d'assi cartesiani ortogonali, il quale serve a individuarne i punti, si può prescindere dal concetto fisico dei *corpi* e considerare in loro vece i corrispondenti sistemi di assi cartesiani. Sarà conveniente prendere ad arbitrio l'origine del primo sistema, e per origine di ogni altro il punto o uno dei punti per i quali esso è fissato al precedente; in tal modo nel sistema C_r sono messi in evidenza due punti: la sua origine, di coordinate nulle, e un punto di coordinate a_r, b_r, c_r, coincidente coll'origine del sistema successivo. Convenendo di rappresentare con P_{ri} un punto generico del sistema C_r, stabilisco di attribuire sempre l'indice $i = 0$ all'origine, l'indice $i = 1$ al punto che coincide coll'origine del sistema successivo, e l'indice $i = 2$ al baricentro, quando sarà necessario considerarlo.

In tal modo abbiamo intanto:

$$(1) \qquad P_{r1} \equiv P_{r+1\,0} \ ; \ [r = 1, 2, \ldots, n-1]$$

$$\left.\begin{aligned} &(1') && x_{r0} = y_{r0} = z_{r0} = 0 \,; \\ &(1'') && x_{r1} = a_r \,,\ y_{r1} = b_r \,,\ z_{r1} = c_r \,; \\ &(1''') && x_{r2} = \frac{\sum_{C_r} {}_i\, m_{ri}\, x_{ri}}{M_r} \,, \text{ etc., } (^2) \\ & && \text{essendo} \\ &(1^{(iv)}) && M_r = \sum_{C_r} {}_i\, m_{ri} \,, \end{aligned}\right\} r = 1, \ldots n$$

e rappresentando col simbolo $\sum_{C_r} {}_i$ la somma estesa a tutti i punti materiali P_{ri} del corpo C_r.

2. Riferendo questa catena di corpi a un sistema cartesiano immobile $\Omega(\xi\, \eta\, \zeta)$, chiamerò *coordinate assolute, rotazioni assolute*, etc. d'un punto o d'un corpo, le coordinate e le rotazioni rispetto al sistema immobile, e rappresenterò con $\xi_{ri}, \eta_{ri}, \zeta_{ri}$ le coordinate assolute di P_{ri}.

[1] S'intende che l'*ordine* dei corpi costituenti la catena è definito dall'indice r.

[2] Questa sigla *etc.*, messa dopo un'equazione o un'espressione qualunque, sostituisce per brevità le equazioni od espressioni dedotte da quella scritta mediante permutazioni circolari nelle terne di lettere $(x\,y\,z)$, $(a\,b\,c)$, $(\pi\,\chi\,\varrho)$.... etc.

Il più generale movimento della catena consiste della *rotazione* di ciascun corpo C_r intorno ad un asse istantaneo o permanente passante per la sua origine P_{r0}, e di una *traslazione* variabile da corpo a corpo, che può essere definita dalle coordinate assolute della rispettiva origine, che ha cioè per componenti secondo gli assi fissi: ξ_{r0}, η_{r0}, ζ_{r0}. Allora, se tutte le rotazioni sono infinitesime ([1]), in modo da potersi decomporre ciascuna in tre rotazioni infinitesime e successive π_r, χ_r, ϱ_r intorno agli assi delle ξ, η, ζ, e se gli assi solidali col corpo C_r sono scelti in modo che per $\pi_r = \chi_r = \varrho_r = 0$ essi risultano rispettivamente paralleli agli assi fissi, trascurando le seconde potenze delle rotazioni elementari, si trova che la posizione assoluta d'un punto P_{ri} è definita dalle equazioni:

$$(2) \qquad \xi_{ri} - \xi_{r0} = x_{ri} + (\pi x_i)_r \,, \text{ etc.},$$

avendo fatta per brevità la posizione generica

$$(A) \qquad (\pi x_i)_r = \chi_r z_{ri} - \varrho_r y_{ri} \,, \text{ etc.}$$

Per calcolare il valore di ξ_{r0} notiamo che la (2) vale per qualunque valore degli indici r, i: dunque in particolare ponendo $r = s$, $i = 1$, ricordando la (1″), e osservando che, per la (1), è

$$\xi_{s1} = \xi_{s+1\,0} \,,$$

si avrà:

$$\xi_{s+1\,0} = \xi_{s0} + a_s + (\pi a)_s :$$

sommando i due membri di questa eguaglianza da $s = 1$ a $s = r - 1$, e notando che in tal modo vengono eliminate $\xi_{20}, \xi_{30}, \ldots, \xi_{r-1\,0}$, si ottiene

$$(3) \qquad \xi_{r0} = \xi_{10} + \sum_1^{r-1}{}_s\, a_s + \sum_1^{r-1}{}_s\, (\pi a)_s \,.$$

Vediamo intanto che di tutte le traslazioni si può ritenere arbitraria soltanto quella del primo sistema: convenendo di rappresentare le sue componenti con ξ, η, ζ, cioè omettendo gli indici nella combinazione $r = 1$, $i = 0$, si ottiene infine dalla (2) e dalla (3):

$$(4) \qquad \xi_{ri} = \xi + \sum_1^{r-1}{}_s\, a_s + x_{ri} + \sum_1^{r-1}{}_s\, (\pi a)_s + (\pi x_i)_r \,, \text{ etc.}$$

$$r = 1, 2, \ldots, n - 1, n$$

$$(4') \qquad \xi_{1i} = \xi + x_i + (\pi x_i)_1 \,, \text{ etc.}$$

([1]) Come si può facilmente arguire, non uso questa parola *infinitesimo* nel suo significato classico di grandezza variabile evanescente, ma bensì per « grandezza della quale sia trascurabile ogni potenza superiore alla prima ».

Per calcolare gli spostamenti virtuali parto dall'espressione generale

$$\delta\xi_{ri} = \delta\xi_{r0} + \delta\chi_r(\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) - \delta\varrho_r(\eta_{ri} - \eta_{r0}) \text{ , etc.}$$

da questa, deducendo il valore di $\delta\xi_{r0}$ nell'identico modo che ci condusse dalla (2) alla (3), si ottiene infine:

$$(5) \quad \begin{aligned} \delta\xi_{ri} = \delta\xi + \sum_1^{r-1}{}_s\, \delta\chi_s(\zeta_{s1} - \zeta_{s0}) + \delta\chi_r(\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) \\ - \sum_1^{r-1}{}_s\, \delta\varrho_s(\eta_{s1} - \eta_{s0}) - \delta\varrho_r(\eta_{ri} - \eta_{r0}) \text{ , etc.} \end{aligned}$$

3. Applichiamo le formole fin qui trovate all'equazione simbolica dei lavori virtuali

$$\sum_1^n{}_r \sum_{C_r}{}_i (\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri})\,\delta\xi_{ri} + \text{etc.} = 0 \text{ ;}$$

nella quale, come al solito, con Ξ_{ri}, H_{ri}, Z_{ri} rappresento la proiezione sugli assi fissi della risultante di tutte le forze applicate nel punto P_{ri}, di massa m_{ri}.

Posto per brevità

$$(B) \quad X_r = \sum_{C_r}{}_i (\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \text{ , etc.,}$$

e sostituendo a $\delta\xi_{ri}$ la sua espressione (5), la somma testè scritta prende la forma:

$$(6) \quad \begin{aligned} \delta\xi \sum_1^n{}_r X_r + \sum_1^n{}_r \Big[X_r \sum_1^{r-1}{}_s \delta\chi_s(\zeta_{s1} - \zeta_{s0}) + \delta\chi_r \sum_{C_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0})\,(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \Big] \\ - \sum_1^n{}_r \Big[X_r \sum_1^{r-1}{}_s \delta\varrho_s(\eta_{s1} - \eta_{s0}) + \delta\varrho_r \sum_{C_r}{}_i (\eta_{ri} - \eta_{r0})\,(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \Big] \end{aligned}$$

Di queste due somme doppie basta considerare soltanto la prima, giacchè l'altra si ottiene da quella scambiando χ con ϱ e ζ con η; ponendo per brevità

$$(C) \quad \begin{cases} A_{sr} = (\zeta_{s1} - \zeta_{s0})\, X_r \\ A'_{rr} = \sum_{C_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0})\,(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \text{ ,} \end{cases}$$

essa si può scrivere sotto la forma

$$\sum_1^n {}_r \left[\sum_1^{r-1} {}_s \delta\chi_s \, A_{sr} + \delta\chi_r \, A'_{rr} \right] =$$

$$= \sum_1^n {}_r \left[\delta\chi_1 \, A_{1r} + \delta\chi_2 \, A_{2r} + \cdots + \delta\chi_{r-1} \, A_{r-1\,r} + \delta\chi_r \, A'_{rr} \right]$$

$$= \delta\chi_1 \, A'_{11}$$

$$+ \delta\chi_1 \, A_{12} + \delta\chi_2 \, A'_{22}$$

$$+ \delta\chi_1 \, A_{13} + \delta\chi_2 \, A_{23} + \delta\chi_3 \, A'_{33}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \delta\chi_1 \, A_{1n} + \delta\chi_2 \, A_{2n} + \delta\chi_3 \, A_{3n} + \cdots + \delta\chi_{n-1} \, A_{n-1\,n} + \delta\chi_n \, A'_{nn} :$$

donde, sommando per colonne,

$$= \sum_1^{n-1} {}_r \delta\chi_r \left(A'_{rr} + \sum_{r+1}^{n} {}_s A_{rs} \right) + \delta\chi_n \, A'_{nn} \, .$$

Sostituendo infine ai simboli A , A′ i loro valori (C), e ripetendo lo stesso calcolo per la seconda somma doppia che comparisce nella espressione (6), questa si trasforma nella seguente:

$$\delta\xi \sum_1^n {}_r X_r + \sum_1^{n-1} {}_r \delta\chi_r \left[\sum_{C_r} {}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) (\Xi_{ri} - m_{ri} \, \xi''_{ri}) + (\zeta_{r1} - \zeta_{r0}) \sum_{r+1}^{n} {}_s X_s \right]$$

$$+ \delta\chi_n \sum_{C_n} {}_i (\zeta_{ni} - \zeta_{n0}) (\Xi_{ni} - m_{ni} \, \xi''_{ni})$$

$$- \sum_1^{n-1} {}_r \delta\varrho_r \left[\sum_{C_r} {}_i (\eta_{ri} - \eta_{r0}) (\Xi_{ri} - m_{ri} \, \xi''_{ri}) + (\eta_{r1} - \eta_{r0}) \sum_{r+1}^{n} {}_s X_s \right]$$

$$- \delta\varrho_n \sum_{C_n} {}_i (\eta_{ni} - \eta_{n0}) (\Xi_{ni} - m_{ni} \, \xi''_{ni}) \, .$$

I termini omessi dell' equazione simbolica dei lavori virtuali si possono ottenere da questa espressione permutando circolarmente tutte le terne di lettere: eseguendo quest' operazione e raccogliendo poi a fattori comuni tutte le variazioni arbitrarie, si arriva infine all' equazione

$$\text{(7)} \qquad A\delta\xi + B\delta\eta + C\delta\zeta + \sum_1^n {}_r (H_r \, \delta\pi_r + K_r \, \delta\chi_r + L_r \, \delta\varrho_r) = 0 \, ,$$

avendo fatte le posizioni

$$\text{(D)} \qquad A = \sum_1^n {}_r X_r = \sum_1^n {}_r \sum_{C_r} {}_i (\Xi_{ri} - m_{ri} \, \xi''_{ri}) \, , \ \text{etc.}$$

$$\text{(E)}\quad \begin{aligned} H_r = &\sum_{C_r}{}_i(\eta_{ri}-\eta_{r0})(Z_{ri}-m_{ri}\zeta''_{ri})+(\eta_{r1}-\eta_{r0})\sum_{r+1}^{n}{}_s\sum_{C_s}{}_i(Z_{si}-m_{si}\zeta''_{si}) \\ &-\sum_{C_r}{}_i(\zeta_{ri}-\zeta_{r0})(H_{ri}-m_{ri}\eta''_{ri})-(\zeta_{r1}-\zeta_{r0})\sum_{r+1}^{n}{}_s\sum_{C_s}{}_i(H_{si}-m_{si}\eta''_{si}), \text{etc.}; \end{aligned}$$

$$(r=1\,,2\,,\ldots\,,n-1)$$

$$\text{(E')}\quad H_n=\sum_{C_n}{}_i(\eta_{ni}-\eta_{n0})(Z_{ni}-m_{ni}\zeta''_{ni})-\sum_{C_n}{}_i(\zeta_{ni}-\zeta_{n0})(H_{ni}-m_{ni}\eta''_{ni}) \text{ etc.}$$

È da notare subito che queste equazioni furono dedotte senza fare alcuna restrizione sull'ordine di grandezza delle traslazioni $\xi\,,\eta\,,\zeta$, sulla orientazione dei varî corpi rispetto alla traslazione, sulla natura delle forze nè sulla loro direzione rispetto agli assi fissi.

4. Se si volesse ora passare alle equazioni effettive del moto, bisognerebbe stabilire completamente i legami che esistono fra i varî corpi rigidi costituenti la catena. Nel caso che le traslazioni del primo corpo siano arbitrarie e che ciascuno sia legato al precedente per un punto solo, il sistema ha $3n+3$ gradi di libertà, corrispondenti alle equazioni

$$A=B=C=H_r=K_r=L_r=0:$$

in qualsiasi altro caso il numero delle equazioni diventa minore o per la soppressione di alcuna di esse (p. e. nel caso di traslazioni del primo corpo nulle o determinate), o per la sostituzione ad alcune di esse di certe loro combinazioni lineari (p. e. nel caso che uno dei corpi ruoti intorno ad un asse permanente) [1].

5. La forma definitiva delle funzioni H, K, L risulta molto complicata, anche tenendo conto che le rotazioni sono infinitesime e facendo delle ipotesi speciali circa gli assi fissi nei corpi.

[1] Infatti suppongasi che i corpi C_r, C_{r+1} abbiano una retta costantemente in comune: allora il moto di C_{r+1} è perfettamente definito quando sia data la sua rotazione ω intorno a questa retta, perchè se essa ha rispetto agli assi fissi i coseni di direzione λ,μ,ν avremo $\pi_{r+1}=\lambda\omega$, $\chi_{r+1}=\mu\omega$, $\varrho_{r+1}=\nu\omega$: d'altra parte se i suoi coseni di direzione rispetto agli assi (C_r) sono $l\,,m\,,n$ (costanti), valgono le relazioni:

$$\lambda=l+\chi_r n-\varrho_r m \text{ etc.};$$

e quindi

$$\delta\pi_{r+1}=\lambda\delta\omega+\omega\delta\lambda=\lambda\delta\omega+\omega(n\,\delta\chi_r-m\,\delta\varrho_r) \text{ etc.}$$

Sostituendo questi valori nella (7), si trovano, in luogo delle 6 equazioni indipendenti

$$H_r=H_{r+1}=K_r=K_{r+1}=L_r=L_{r+1}=0,$$

le 4 equazioni:

$$H_r+\omega(m\,L_{r+1}-n\,K_{r+1})=K_r+\omega(n\,H_{r+1}-l\,L_{r+1})=L_r+\omega(l\,K_{r+1}-m\,H_{r+1})=0$$
$$\lambda\,H_{r+1}+\mu\,K_{r+1}+\nu\,L_{r+1}=0,$$

nelle quali a $\pi_{r+1}\,,\chi_{r+1}\,,\varrho_{r+1}$ si intendono sostituiti i valori testè trovati.

Perciò, senza procedere per ora ad un ulteriore sviluppo, chiuderò la trattazione del caso generale facendo l'ipotesi che il primo corpo sia fissato almeno per il punto P_{10} al terreno, e quindi possa sentire l'influenza d'un eventuale movimento sismico.

A tal fine fissato nell'elemento di crosta solida terrestre, che comprende il punto di sospensione, un sistema d'assi cartesiani $S(X\,Y\,Z)$ $[S \equiv P_{10}]$, tale da coincidere col sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ quando il terreno è in quiete, definisco il moto sismico mediante le traslazioni ξ, η, ζ e mediante tre rotazioni infinitesime α, β, γ, con le quali si passa dal sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ al sistema $S(X\,Y\,Z)$: chiamando poi λ_r, μ_r, ν_r le componenti della *rotazione apparente* del corpo C_r cioè le sue rotazioni (infinitesime) intorno agli assi X, Y, Z, valgono, a meno di quantità trascurabili, le eguaglianze

$$\text{(F)} \qquad \pi_r = \alpha + \lambda_r \,, \text{ etc.}$$

In tal modo, notando che le variabili $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ hanno in ogni istante un valore determinato, cioè che le loro variazioni arbitrarie sono costantemente nulle, si trova che l'equazione (7) si riduce alla forma

$$\text{(8)} \qquad \sum_1^n{}_r\, H_r\,\delta\lambda_r + K_r\,\delta\mu_r + L_r\,\delta\nu_r) = 0\,.$$

È naturale che il valore dei coefficienti H_r, K_r, L_r è sempre dato dalle equazioni (E), (E'), alle quali si devono intendere associate le (2) e le (4) per il calcolo dei binomi $(\xi_{ri} - \xi_{r0})$, ... e delle accelerazioni ξ''_{ri}, ... Volendo poi scindere gli elementi del moto sismico dagli elementi del modo apparente dei singoli corpi, basterà sostituire nelle (2) e nelle (4) in luogo di π_r, χ_r, ϱ_r i loro valori dati dalle (F).

Chimica. — *Sulla distinzione fra polimorfismo ed isomeria chimica.* Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio G. Ciamician.

La questione indicata nel titolo di questa breve Nota non formò finora oggetto di studî molto estesi nonostante l'interesse teorico che essa presenta. Essa viene ora rimessa di nuovo in campo da una recente pregevole pubblicazione di R. Wegscheider [1]. Questo autore comincia a porsi anzitutto la domanda se la distinzione fra i due concetti di polimorfismo (od isomeria fisica) ed isomeria chimica sia veramente giustificata. In base alla teoria atomica molecolare si possono dare dei due ordini di fenomeni definizioni soddisfacenti: attribuendo cioè l'isomeria ad una diversa costituzione o con-

[1] Wiener Monatshefte f. Chemie CXXII, 917 (1901).

figurazione della molecola, il polimorfismo ad una diversa distribuzione delle molecole nella particella cristallina.

Però, giustamente osserva Wegscheider, la diversità di queste definizioni basantesi su di una ipotesi non sarebbe sufficiente per far ritenere giustificata ed opportuna la distinzione in questione, se ad essa non corrispondessero nel fatto reali differenze di proprietà e di comportamento.

La distinzione secondo quanto è generalmente ammesso, deve consistere in questo: i corpi isomeri chimicamente possono esistere come tali con proprietà diverse tanto allo stato solido, che a quello liquido (fuso o disciolto) ed a quello gassoso; pei corpi polimorfi la diversità fra le due modificazioni si limita allo stato cristallino. Si capisce però agevolmente che mentre la questione della diversità o meno dei liquidi o delle soluzioni fornite dalle due modificazioni, può spesso esser deciso in senso positivo, il deciderlo negativamente con sicurezza non è possibile mai, poichè vi hanno isomeri che si trasformano l'uno nell'altro con tale rapidità da non lasciar tempo a constatare con misure fisiche la diversità dei liquidi che forniscono.

Wegscheider esamina però altre serie di fenomeni, giungendo alla conclusione che la distinzione del polimorfismo dall'isomeria è giustificata e conveniente; propone quindi alcuni criterî che possono servire a distinguere in pratica i due casi. In generale però questi criterî permettono, come quello suaccennato, una decisione sicura in un solo senso, cioè per l'esistenza di isomeria; il polimorfismo può esser dimostrato in modo sicuro od assai verosimile in un solo caso, quando cioè esso corrisponda al tipo dell'enantiotropia, e vi sia cioè un punto fisso di trasformazione fra le due forme; nel caso frequente di due corpi polimorfi monotropi nessuna decisione è possibile.

Ora sembra a me che il Wegscheider non abbia posto abbastanza in rilievo uno dei principali caratteri distintivi fra isomeria e polimorfismo, ed abbia perciò trascurato un criterio più preciso e sensibile di quelli da lui proposti. Ad esso si arriva basandosi sulla teoria delle fasi che è qui come sempre in questo genere di questioni, una guida preziosa ed infallibile.

La distinzione fra polimorfismo ed isomeria è questa: dei due corpi polimorfi uno solo ha un punto di fusione stabile; il punto di fusione dell'altro corrisponde ad uno stato di equilibrio instabile che la presenza della più piccola traccia della prima modificazione può far sparire. Invece due corpi isomeri hanno ciascuno un punto di fusione stabile nel senso della teoria delle fasi. Wegscheider indica come uno dei criterî per concludere all'esistenza di isomeria il seguente: « che il corpo *più stabile* in vicinanza del punto di fusione, abbia il punto di fusione più basso ». Ciò è infatti giustissimo, ma è facile vedere come il concetto della maggiore o minore stabilità qui invocato sia più vago e ad ogni modo assolutamente diverso da quello della stabilità od instabilità di una fase solida in equilibrio con una fase liquida. Di due corpi polimorfi uno solo è capace di esistenza *stabile* in presenza

della fase liquida e precisamente quello che fonde più alto; l'altro è *instabile* e può esistere solo in assoluta assenza del primo; di tale stabilità ed instabilità si può dare una definizione termodinamica rigorosa: è stabile quella modificazione per cui alla temperatura data è minore il valore della fuzione ζ di Willard Gibbs. Di due corpi isomeri invece ve ne è uno *più* ed uno *meno stabile*; tale differenza di stabilità può essere maggiore o minore, e non può essere definita in modo preciso e rigoroso.

Da ciò che venne sin qui detto risulta in modo assai chiaro quale sia il criterio per decidere se due corpi siano polimorfi od isomeri. Se sono isomeri ciascuno di essi aggiunto all'altro si dovrà comportare come un corpo estraneo qualsiasi, cioè abbassando il punto di congelamento o di fusione del solvente. Si dovrà quindi anche per due corpi isomeri avere il solito sistema di due curve discendenti ed incrociantisi nel punto crioidratico, dove le due sorta di cristalli coesistono.

Che questo si possa osservare anche nel caso di isomeri facilmente trasformabili gli uni negli altri come certi isomeri geometrici, ed anche fra isomeri nelle cui miscele liquide si formi uno stato di equilibrio come i corpi tautomeri o desmotropi, venne già dimostrato da una serie di studî teorici o di osservazioni sperimentali che mi sembra siano sfuggiti al Wegscheider. Così il Bakhuis Roozeboom (1) diede la teoria completa delle curve di congelamento per le miscele di corpi tautomeri, ed il Bancroft ed alcuni suoi scolari (2) determinarono le curve di congelamento per le miscele di taluni stereoisomeri assai facilmente trasformabili l'uno nell'altro, come: α e β acetaldossima, α e β benzaldossima, α e β anisaldossima. Anche prima Garelli e Montanari (3) avevano dimostrato che sciogliendo acido isocrotonico nel crotonico si ottengono abbassamenti del punto di congelamento che sono perfettamente normali secondo la legge di van 't Hoff. Citerò infine un'osservazione fatta da me; ognuno sa come sia rapida e difficile da evitare la trasformazione degli eteri maleici nei corrispondenti fumarici; tuttavia anche nelle loro miscele possono esistere equilibrî eterogenei perfettamente stabili. In una preparazione di etere dimetilico dell'acido maleico fatta in occasione di precedenti ricerche, mi si formò una certa quantità dell'isomero fumarico che anche per distillazione non potei separare. Il miscuglio dei due eteri fu chiuso in tubetto saldato alla lampada e si conserva da circa tre anni; dalla massa si separarono alcuni cristalli dell'etere fumarico (che fonde a 102°, mentre il maleico si gela solo a circa —20°); questi cristalli si sciolgono per riscaldamento, si riformano e si accrescono col raffreddamento; l'etere fumarico ha dunque una solubilità determinata nell'altro isomero.

(1) Zeitschr. f. physik. Ch. XXVIII. 289 (1899).

(2) Bancroft, Journ. of physical Chem., II, 143, 245; Carveth, ibidem, III, 457; Cameron, ibidem, II, 376, 409.

(3) Gazz. chim. ital. 1894, II, 260.

Quando si tratti di isomeri che si trasformino l'uno nell'altro rapidamente sarà difficile od impossibile il tracciare quantitativamente delle curve di congelamento; *sarà però possibile il realizzare e l'osservare punti di fusione intermedî a quelli dei due isomeri od inferiori ad entrambi.*

Ben diverso è naturalmente ciò che accade aggiungendo ad un corpo polimorfo fuso una certa quantità dell'altra forma. Evidentemente da qualunque delle due si parta e qualunque quantità dell'altra si aggiunga, si avrà sempre un solo punto di fusione, quello più elevato della modificazione più stabile, o, se tutte le particelle cristalline di esso sono distrutte, si potrà avere quello della modificazione instabile. Così supponiamo di partire dalla forma labile del benzofenone che fonde a 26° e dopo averlo fuso di aggiungervi una quantità qualunque della forma stabile (p. fus. 48°); quest'ultima anzichè abbassare il punto di congelamento dell'altra, provocherà una cristallizzazione completa della massa ed un inalzamento del termometro a 48°. Partendo invece dalla modificazione stabile ed aggiungendovi l'altra, il suo punto di fusione non verrà affatto mutato; se però distruggeremo col riscaldamento ogni traccia di particelle cristalline e raffredderemo lentamente, potremo riavere il punto di congelamento della forma labile. *Questi due soli punti sono possibili; punti di fusione intermedî ai due od inferiori ad entrambi, e un punto crioidratico a cui le due sorta di cristalli possano coesistere sono qui assolutamente impossibili.*

Il criterio qui indicato oltre ad essere il più rigoroso, è anche di una esecuzione così semplice (bastano poche determinazioni di punto di fusione) che esso potrà esser applicato facilmente alla risoluzione di varî interessanti problemi di chimica organica non ancora ben chiariti: ciò che mi propongo di fare.

Patologia vegetale. — *La peronospora del frumento* (*Sclerospora graminicola*) *nel Ferrarese* [1]. Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Corrispondente Cuboni.

Dalle osservazioni che ero riuscito a riunire intorno alla peronospora del frumento negli anni 1900-01 poteva apparire che questo parassita fosse cagione di danni praticamente apprezzabili soltanto in poche località di cui avevo cercato di definire le caratteristiche più salienti, subordinando la possibilità di infezione peronosporica nei seminati al ristagno prolungato di acqua negli stessi, durante il periodo vegetativo del frumento, a patto però che nel territorio inondato od in prossimità di questo e soggetti ad inon-

[1] *Relazioni e studî della Cattedra ambulante di agricoltura per la provincia di Ferrara.*

dazioni esistessero dei canneti che albergassero i germi ibernanti od oospore del parassita. Questo, che è il quadro clinico della malattia quale potei desumere dalla configurazione delle località ove per la prima volta ho avvertito la calamità del frumento in questione, se può ritenersi tipico della bassa valle del Tevere, al di là di Roma, non è il solo che accada di osservare in pratica. In un precedente mio lavoro ho indicato che, nel giugno dello scorso anno, in alcune accuratissime coltivazioni di frumento del Ferrarese ben distanti da qualsiasi canneto eventualmente infetto e precisamente a Marrara ed a Vigarano, avevo riscontrato alcuni cespi di frumento, sporadicamente colpiti dalla infezione, resa allora manifesta dalle deformazioni della spica tanto caratteristiche da render quasi superflua la ricerca della cagione di esse mediante l'esame microscopico. Tale constatazione di fatto ribadiva il concetto già espresso, che non può non tornar gradito a chi attenda con amore all' esercizio dell' industria agraria, e cioè che la scoperta di questa manifestazione patologica del frumento si riduce a dare una spiegazione positiva logica, di un fenomeno sino allora insoluto, ma preesistente da tempo e sfuggito all' osservazione metodica o frainteso, per cui non si tratta di un malanno nuovo, come fu ad es. la peronospora all' indomani della sua introduzione nei vigneti europei.

Le osservazioni raccolte in questi ultimi mesi negli estesi seminati di frumento del Ferrarese ed una qualche località del Bolognese così duramente provati dalla tristissima stagione autunno-vernina scorsa, mi hanno dato agio di constatare quanto l'infezione peronosporica del frumento sia diffusa malgrado che faccia difetto una delle condizioni suenunciate, che sulle prime avevo indicato fra quelle che sembravano indispensabili, e cioè la presenza di canneti infetti. Da queste recenti osservazioni chiaramente appare che la conservazione del parassita possa essere affidata ai germi od oospore che si formano anche in altre graminacee spontanee crescenti ininterrottamente durante l'anno, quasi ovunque cosicchè torna sempre maggiormente indicato il raffronto tra la perpetuazione di questo parassita e ciò che accade praticamente per la ruggine del frumento.

Premetto che fin dallo scorso luglio l'egregio prof. Massalongo compiacevasi trasmettermi esemplari di *Setaria sp.* raccolti nel Veronese, sui quali si osservavano le caratteristiche fruttificazioni conidiali di *Sclerospora graminicola*, così egregiamente riprodotte dal Fischer. Nel medesimo tempo osservai una infezione nella *Setaria viridis*, estesissima nell'orto agrario e nei dintorni di Ferrara; i conidiofori ricoprivano di uno spesso strato bianco ceraceo le foglie così da simulare all'osservazione macroscopica un intenso sviluppo di nebbia (*Erysiphe graminis*). Avendo seguito metodicamente il comportamento del parassita sopra piante crescenti spontanee lungo le mura della città, dall'agosto in poi, ebbi agio di rilevare che le foglie e le infiorescenze delle piante infette di *Setaria* andarono man mano assumendo lo sviluppo

ipertrofico e le deformazioni caratteristiche dell'infezione peronosporica, mentre scompariva qualsiasi traccia di fruttificazione conidiale e soltanto l'esame microscopico rivelava la presenza del micelio e delle oospore del parassita in seno ai tessuti.

Questa estesissima infezione nella *Setaria* mi indusse ad esaminare più davvicino le condizioni dei seminati di frumento non appena le condizioni dell'ambiente concessero alla vegetazione di rimettersi in attività, specialmente in non pochi punti della Provincia dove, malgrado che nello scorso inverno vi fosse stato appena qualche ristagno d'acqua nelle scoline o tutt'al più qualche leggero straripamento da queste, durato per poco, all'infrigidimento del suolo veniva dai pratici agricoltori attribuito il deperimento delle piante crescenti lungo le testate degli appezzamenti stessi.

A me parve esagerata l'importanza attribuita all'azione diretta ed esclusiva del ristagno dell'acqua quale determinante del deperimento che avviene in siffatte condizioni; la ragione prima per cui i frumenti sommersi muoiono è la deficienza d'ossigeno, l'asfissia pura e semplice. Ciò appare evidente quando si mettano a raffronto le conseguenze della sommersione e del semplice allagamento nei terreni alti o terre vecchie rispetto ai terreni vallivi: in questi, tanto più sollecitamente per quanto più sia accentuato il tenore in materia organica (cuora e mezza cuora, fino ad essere quasi torba), un ristagno anche brevissimo dell'acqua determina la morte delle piante, poichè le fermentazioni che accadono quando detti terreni siano saturi o ricoperti d'acqua, sono eminentemente riduttrici [1] e l'ossigeno esistente sciolto nelle acque interstiziali o che derivi dalla riduzione dei nitrati, è avidamente assorbito così che l'ambiente che attornia la pianta sommersa diventa sollecitamente asfittico.

Nelle terre alte o terre vecchie normalmente costituite la resistenza alla sommersione è assai più accentuata perchè difficilmente il terreno stesso diventa sede di fermentazioni riduttrici: il Vilmorin ha segnalato nel 1887 una varietà di frumento aristato, proveniente dal dipartimento di Sâone et Loire chiamato sopra luogo frumento *di riviera*, perchè esso aveva la preziosa dote di poter restare sommerso per quindici giorni ed anche tre settimane di continuo senza soffrirne. L'opinione prevalente fra gli agricoltori e suespressa non trova, di certo, appoggio in queste osservazioni di fatto, onde ho assoggettato ad esame microscopico numerosi campioni di piantine deperenti raccolte qua e là in provincia, ed ho potuto costantemente accertarmi che il deperimento intensissimo che esse manifestano e da cui non è più possibile

(1) Ciò rilevasi dalla presenza di idrogeno solforato e di metano, nelle acque superficiali e di scolo dei pozzi e di veli di solfo che, unitamente a tracce di idrocarburi, rendono iridescenti le acque stesse stagnanti nelle scoline.

di farle riavere mediante le solite pratiche colturali primaverili, sia esclusivamente dovuto al parassitismo della *Sclerospora graminicola*.

I pratici ben riconoscono queste piante patite che oltre a dimostrare un sensibile arresto di sviluppo rispetto al rimanente, per cui esse formano *bolla* lungo le testate, sono intensamente clorotiche a tal segno che si dicono volgarmente *imbiancate*. Esse talliscono in modo eccezionale e presentano delle anomalie nelle foglie che ho già descritte in precedenti mie pubblicazioni.

Da quanto sono venuto succintamente esponendo, parmi di poter dedurre alcune conclusioni di un certo interesse pratico: prima di tutto è meglio risparmiare la spesa del nitrato e delle zappettature che si intendesse di applicare alle testate onde la vegetazione delle piante deperite potesse pareggiarsi col rimanente. In secondo luogo, nel fare il lavoro di scerbatura o *curatura* è necessario estirpare i cespi peronosporati, che è facilissimo di discernere senza fallo, e distruggerli metodicamente. Non occorre aggiungere che il provvedimento preventivo di maggior efficacia dal punto di vista pratico, è sempre la sistemazione accurata degli scoli onde far sì che « lo smaltimento delle acque stesse sia sollecito ed impediti i ristagni che comunque avvengano sono sempre funesti alla vegetazione ».

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sui Protozoi delle infusioni.* Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

Mi sono occupato in una Nota precedente a questa di questioni osmotiche riguardanti l'adattamento degli Infusorii a vivere in ambienti diversamente concentrati da quello in cui si trovavano. Riferisco qui un'altra serie di ricerche, avente per scopo lo studio della possibilità a nascere in ambienti diversi da quello abituale. Gli animali che ne sono stati oggetto sono Flagellati ed Infusorii delle infusioni.

Mi si permetta, prima di entrare nell'esposizione delle mie esperienze, di riportare alcuni risultati di altri autori, che si riferiscono in parte anche alle questioni che ho studiato nella Nota precedente, ma che riunisco qui per ragioni di spazio.

Non sembri inutile occuparsi di questioni osmotiche riguardanti i Protozoi, dopo lunghi lavori di varî autori, nei quali tali questioni sono trattate.

Giacchè sia le ricerche del Jennings, che quelle del Kunstler (1), e in massima parte quelle del Massart (2) riguardano specialmente questioni di

(1) Kunstler J. *Influence du milieu et des variations chez les Protozoaires*. C. R. Tome 126, pag. 765-767, 1898.

(2) Massart J. *Récherches sur les organismes inférieurs*. II. *La sensibilité à la concentration chez les êtres unicellulaires marins*. Bull. Acad. Belg. Tome 22, pag. 148-167, 6 figg. 1891.

chemiotassi, tonotassi ecc., rimanendo per lo più al di fuori della questione della permeabilità osmotica della parete esterna. Massart ha però fatto alcune interessanti esperienze sulle cisti delle vorticelle ecc., le quali hanno stretta attinenza con tali problemi. Egli ha mostrato che, quando su esse si fanno agire delle soluzioni concentrate, la parete esterna rimane immutata, come la parete cellulosica delle cellule vegetali, e si osservano dei fenomeni di plasmolisi. L'autore però ha potuto dimostrare anche il passaggio del nitrato di potassio nell'interno delle cisti, servendosi del reattivo di Molisch. Ma in questo caso non si è in condizioni di esperienza tali da poter ritenere il fenomeno del passaggio del sale come normale; i sali di potassio, spesso molto dannosi per le cellule viventi, possono alterare la parete esterna delle cisti, in modo da renderla più permeabile. Noi non possiamo mai considerare come *fisiologico* il passaggio di un sale attraverso ad una membrana, quando questo sale è di per sè capace (o si può sospettare che sia capace) di alterare il protoplasma vivente, o lo diventa per condizioni anormali di pressione osmotica.

Non dico tutto ciò per togliere valore all'esperienza del Massart; ma solo per affermare questo: che dal passaggio del nitrato di potassio non si può mai inferire che possa passare un altro sale, anche composto di ioni i quali più facilmente di quelli del nitrato di potassio traversino membrane inorganiche poco permeabili. È per la non possibilità di questa illazione che insisto in modo particolare sul fatto delle condizioni non fisiologiche di un'esperienza fatta col nitrato di potassio.

Atusky Yasuda (1) ha trovato in varie specie di Cigliati e Flagellati una diversa adattabilità a soluzioni tra loro isotoniche di sostanze differenti; questo risultato mi pare assai notevole per la questione della permeabilità delle membrane, almeno come indizio. Giacchè se i sali sperimentati non penetrassero nell'interno dell'Infusorio o del Flagellato, mal si intenderebbe come soluzioni tra loro isotoniche di corpi differenti potessero agire in modo diverso, ostacolando in modo diverso la vita di questi Protozoi; e d'altra parte mette in evidenza ancora una volta come si debba aver prudenza nel ritenere che un effetto dannoso di un sale in soluzione anisotonica sia la conseguenza soltanto della anisotonicità e non piuttosto, e spesso in maggior grado, anche della sua azione chimica sul protoplasma.

Ma un poco più lungamente ci dobbiamo fermare a discutere alcune esperienze e considerazioni del Balbiani (2). Egli studia più che altro l'adattabilità maggiore o minore dei varî Protozoi a soluzioni anisotoniche; non

(1) Yasuda Atusky, *On the accomodation of some Infusoria to the solutions of certain substances in various concentrations.* Annot.-Z. Japon. Tokyo, vol. I, pag. 23-29, 1897.

(2) Balbiani E. G. *Études sur l'action des sels sur les Infusoires.* Arch. Anat. micr. Paris, tome 2, pag. 518-600, 1899.

mancano tuttavia accenni a questioni di permeabilità, accenni che vale la pena di riferire e di discutere.

Egli considera la soluzione di Na Cl 0,3 % come isotonica al contenuto interno del *Paramaecium aurita*. Che cosa egli voglia dire, io non capisco affatto. Riferisco il suo passo (pag. 547): « Cette conclusion est confirmée par ce fait, que non seulement les Paramécies de toutes provenances peuvent vivre pendant un temps indéfini dans cette solution à 0,30 p. 100, mais s'y multiplier aussi énergiquement que dans l'eau pure... Les animalcules s'y trouvent naturellement adaptés en vertu des lois physiques de l'osmose, et n'ont aucun effort physiologique à faire pour s'equilibrer avec leur nouveau milieu: la vie des Paramécies dans ce milieu n'est donc pas un phénomene d'accoutumance proprement dit, comme dans les milieux à plus forte concentration saline ». L'autore insomma considera isotonica questa soluzione per il Paramecio, perchè non lo uccide nè disturba la sua prolificazione! La contraddizione è manifesta con ciò che egli dice altrove, in molti luoghi, p. es. quando a pag. 539 accenna a ristringimenti e dilatazioni osmotiche per passaggio di acqua; con tutto ciò insomma che è ormai acquisito alla scienza relativamente alla permeabilità all'acqua delle membrane cellulari. Giacchè, dato questo, ne segue di conseguenza necessaria che il Paramecio deve essere in equilibrio osmotico coll'ambiente in cui vive; e quindi non ha senso parlare di una soluzione isotonica con i liquidi del Paramecio, in generale, mentre si sa, e l'autore lo sa meglio di me, che il Paramecio può vivere e vive in ambienti varî per tonicità. Non siamo per il Paramecio nel caso di quegli animali che hanno un ambiente interno a pressione osmotica invariabile, in qualunque ambiente esterno l'animale si trova immerso.

L'autore ha confuso il concetto di « isotonicità » con quello di « tonicità *optimum* » per la vita del Paramecio, o forse con quello di ultimo limite di concentrazione la quale non danneggia la vita del Paramecio. Del resto per quanto io non abbia fatto esperienze sul Paramecio, quelle fatte su altri Infusorii, e che ho esposto nella Nota precedente, mi autorizzano ad affermare come molto probabile che un Paramecio condotto a vivere, per graduale adattamento, in una soluzione di Na Cl assai più concentrata di quella al 0,3 %, morrebbe in pochi secondi scoppiando, quando venisse ricondotto in questa.

Balbiani non conferma il passaggio del nitrato di potassio nell'interno delle cisti (*Colpoda cucullus*). Facendo con questa stessa specie esperienze di disseccamento delle cisti in soluzioni di nitrato di potassio e di cloruro di sodio, trova l'autore che le cisti non muoiono e possono dar luogo nuovamente a Infusorii liberi, tostochè vengano opportunamente ribagnate. La ragione che spiega questa loro resistenza alle soluzioni concentrate dei sali su ricordati, è, secondo l'autore, questa, che la ciste è impermeabile ai sali, permeabile all'acqua, mentre l'Infusorio libero è permeabile anche alle sostanze disciolte (pag. 583). Vi è qui un seguito di errori di logica: infatti, l'Infusorio libero muore nelle

soluzioni concentrate per ristringimento e perdita d'acqua, cioè proprio perchè la sua membrana è semipermeabile, e non lascia passare i sali (o solo in tracce). Quando li lascia passare, si hanno i fenomeni di adattamento e di sopravvivenza, come ho mostrato nell'altra Nota. E se per le cisti fosse vero ciò che l'autore afferma, quando esse, provenendo da una soluzione diluitissima, p. e., di NaCl, resistono al disseccamento, dovrebbero perdere quasi completamente tutta l'acqua, per arrivare coi succhi interni alla stessa concentrazione molecolare della soluzione satura di NaCl; per tale condizione di saturità passa infatti necessariamente l'ambiente per disseccarsi. Ora, mi sembra, non è punto probabile nè questo disseccamento interno quasi completo, nè che la sostanza vivente possa impunemente essere condotta ad una concentrazione molecolare corrispondente a quella di una soluzione satura di NaCl. Noi non possiamo fare delle affermazioni recise a questo proposito; ma se dobbiamo o vogliamo fare *a priori* delle supposizioni, non è forse molto più semplice immaginare che la parete esterna della ciste finisca col diventare impermeabile tanto ai sali quanto all'acqua?

Passando ora a riferire le mie esperienze, le riporto suntando le mie note giornaliere:

16 aprile. Si preparano quattro infusi, ciascuno con 50 granelli di pepe nero e 50 cm. c. di liquido. Si adoperano per i varî infusi (*a*, *b*, *c*, *d*) i seguenti liquidi:

a) acqua distillata: *b*) NaCl 5 °|₀₀; *c*) NaCl 1 °|₀; *d*) NaCl 2 °|₀.

18 aprile. Si cominciano a vedere nell'infuso *a* dei piccolissimi flagellati, del genere *Oikomonas*.

20 aprile. Aumentati molto in *a*; anche in *b* qualcheduno.

Nei giorni seguenti vanno aumentando, e compaiono poi anche nelle altre infusioni. Nella porzione *d*, però, nascono molto tardivamente, verso la fine del mese. Nascono anche dei *Colpidium colpoda*.

Vengono fatte varie prove, prendendo piccole quantità dei varî infusi, e mischiandole con altre soluzioni. Si possono trasportare gli *Oikomonas* dalla concentrazione 0 (o quasi) o 5 °|₀₀, fino al 2 °|₀, senza che si notino variazioni nè subito, nè nei giorni seguenti all'operazione; e così dal 2 °|₀ all' 1 °|₀, o dall'1 °|₀ al 2,5 °|₀₀; se si trasportano dal 2 °|₀, al 5 °|₀₀ o si fanno altri passaggi molto grandi, qualche volta tutti gli Infusorî si incistidano. Ma si deve notare che ciò accade qualche volta anche in piccole porzioni di liquido degli infusi, poste per confronto in vetrini da orologio, senza aggiunta di altre soluzioni (dentro ad una camera umida).

Verso la fine del mese di aprile, in *a* non vi son più *Oikomonas*, i quali si sono tutti incistidati; ed a molti è accaduto lo stesso anche in *b*.

Si lasciano evaporare lentamente tutti gli infusi. A poco a poco si incistidano tutti gli *Oikomonas*.

9 giugno. Gli infusi *a* e *c* sono completamente disseccati da qualche giorno. Si aggiunge circa 50 cm. c. di liquido in ambedue. In *a* di NaCl al 3 °|₀, e in *c* di una soluzione di NaCl tale che, tenuto conto del sale contenuto nel recipiente dopo il disseccamento del liquido del primitivo infuso, tutto il liquido arrivi ugualmente alla concentrazione di 3 °|₀ NaCl.

12 giugno. Si cominciano a vedere in *c* degli *Oikomonas*, che aumentano il giorno dopo.

14 giugno. Questi *Oikomonas* diminuiscono e dopo un altro giorno o due sono tutti incistidati.

In *a* nè in questi giorni nè mai, fino ai primi di luglio, sono nati *Oikomonas*.

Varî tentativi, fatti in epoche differenti, di far nascere *Oikomonas* in infusi di pepe al 3 °/₀ eran sempre riusciti vani.

Si consideri dunque, in primo luogo, come si tratti qui di una specie che nasce indifferentemente in infusi fatti con acqua distillata o con soluzioni, anche assai forti, di NaCl (2 °/₀); e, quello che è più notevole, che si può trasportare da un ambiente all'altro, senza che, coi più forti ingrandimenti, si possano vedere fenomeni di contrazione o rigonfiamento. Le soluzioni di NaCl non agiscono, insomma, osmoticamente su questi animali. E allora, due supposizioni sono possibili: o la loro parete esterna è impermeabile tanto all'acqua che al sale, o è permeabile tanto all'una che all'altro. Nel primo caso è evidente che il trasporto da un ambiente all'altro non può avere nessun effetto; come accade per esempio a noi che, se facciamo un bagno di mare, non perdiamo tutta l'acqua che uscirebbe per l'osmosi, se l'acqua potesse uscire attraverso alla nostra pelle. Nel secondo caso l'equilibrio osmotico si ristabilisce subito, passando da un ambiente all'altro, senza fenomeni di variazione di volume, per l'ingresso o la fuoriuscita del sale. Noi non abbiamo prove di fatto per decidere la questione. Ma dov'è in questi animali una parete esterna che, all'aspetto, mostri o una certa grossezza o una certa consistenza, in modo da resistere al passaggio dell'acqua? Questi animali, anzi, facilmente si disfanno, appena premuti un poco col vetrino copri-oggetti. È vero che potrebbe questa condizione di impermeabilità risiedere in condizioni speciali di tensione superficiale, ma, fino a che questo od altro speciale meccanismo avente lo stesso effetto non sia dimostrato, dobbiamo ritenere, mi sembra, come cosa più probabile, anzi molto probabile, che esista qua una permeabilità all'acqua e ai sali (NaCl). Forse altri protozoi presentano condizioni intermedie, come per esempio i *Chilodon*, i quali sono sensibili alle soluzioni anisotoniche ma non però molto, sì che si acquista il concetto che essi siano un poco permeabili al NaCl, che questo passi, ma difficilmente.

Dobbiamo dunque discendere tanto in basso per trovare degli esseri viventi i quali non abbiano nelle proprie membrane questa proprietà di impedire ai sali il passaggio, mentre si lasciano traversare dall'acqua!

Ma un altro curioso resultato ci dà questa esperienza. Vi è un limite anche per questi Flagellati alla possibilità di nascere in infusi fatti con soluzioni concentrate. Così, normalmente, in NaCl 3 °/₀ non nascono mai, e tardivamente anche in NaCl 2 °/₀. Ebbene, quando ho fatto l'infuso al 3 °/₀, in quel recipiente ove si era disseccato un primitivo infuso all'1 °/₀, gli *Oikomonas* nacquero! Nel primitivo infuso gli *Oikomonas* avevano vissuto finchè il liquido, disseccandosi, era arrivato circa alla metà del volume primitivo

(concentrazione di NaCl 2 %), poi si erano incistidati. Ora, questa nuova nascita esprime evidentemente il fatto che i germi degli *Oikomonas* non sono tutti uguali, ma tanto più salati quanto più era salato l'ambiente in cui gli *Oikomonas* erano vissuti. Nel caso dell'esperienza i germi erano forse già alla concentrazione del 3 %, o poco meno, e per questo poterono svilupparsi in NaCl 3 %, mentre non si possono sviluppare i germi di *Oikomonas* vissuti in acqua distillata. Cattiva condizione di vita però per gli *Oikomonas* questa forte concentrazione, giacchè alla nascita seguì dopo poco l'incistidamento.

Nulla di strano in tutti questi fatti; ma io li ho riferiti perchè essi mostrano come possa avvenire un progressivo adattamento a soluzioni sempre più concentrate, attraverso a successive generazioni. Perchè se si pensa che gli *Oikomonas* viventi negli altri infusi in generale non resistevano alla concentrazione del 3 %, se vi venivano repentinamente portati (senza però mostrare raggrinzimento), si vede come il protoplasma vivente, possa, quando passa attraverso alla forma di germe (o di ciste) e poi di nuovo di organismo adulto, adattarsi molto più facilmente a nuove condizioni di vita.

Parassitologia. — *Sulla trasmissibilità della peste bubbonica ai pipistrelli.* Nota preventiva di B. Gosio, presentata dal Socio Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna dà annuncio della morte del Socio straniero Emanuele Lazzaro Fuchs; ed il Segretario Cerruti legge il seguente cenno necrologico del defunto Accademico.

« Emanuele Lazzaro Fuchs, nato il dì 5 maggio 1832 a Moschin nella Posnania e morto il dì 26 aprile a Berlino, apparteneva alla nostra Accademia quale Socio straniero dal 16 dicembre 1883.

« I casi della sua vita, esclusivamente dedicata alla scienza ed all'insegnamento, si raccolgono in poche parole. Addottorato in filosofia a Berlino nel 1858; insegnante in una scuola industriale di quella città dal 1864 al 1869; dal 1869 al 1874 professore nell'Università di Greifswald e successivamente nelle Università di Gottinga durante l'anno scolastico 1874-75, di Heidelberg dal 1875 al 1884, di Berlino dal 1884 in poi.

« Esordì nell'arringo scientifico con una dissertazione intorno alle linee di curvatura e con alcune ricerche attinenti alla dottrina dei numeri; ma, lasciato ben presto sì fatto campo di studi, nel 1865 pubblicava in un programma scolastico la sua prima e tanto celebrata Memoria intorno alla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili, nella qual Memoria mal si saprebbe decidere cosa sia da ammirare più o la profondità dell'indagine o il valore de' risultati acquisiti alla scienza o la semplicità ed eleganza dell'esposizione. Da questo primo lavoro e da' cinquanta e più altri che gli fecero seguito e che direttamente o indirettamente si collegano col medesimo soggetto, derivarono non solo il razionale e definitivo assetto di uno de' più importanti capitoli del calcolo integrale, ma anche delle scoverte da annoverarsi fra le più geniali e memorabili nell'alta analisi matematica che si sieno compiute negli ultimi decenni, scoverte alle quali il nome del Fuchs rimane indissolubilmente legato ».

Su proposta del Segretario Cerruti, la Classe approva unanime che siano inviate speciali condoglianze, a nome della R. Accademia dei Lincei, tanto alla famiglia del defunto Socio straniero Fuchs, quanto alla R. Accademia delle scienze di Berlino.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle inviate dai Soci Celoria, Lapparent e Lockyer. Richiama inoltre l'attenzione della Classe su di un volume contenente le *Ricerche di biologia pubblicate per il XXV anniversario cattedratico di Pietro Albertoni dai suoi discepoli*, e sopra gli Atti dell'Associazione britannica per il progresso delle scienze e del Congresso internazionale degl'ingegneri, che tennero le loro riunioni a Glasgow nel 1901.

Il Vicepresidente Blaserna presenta, a nome del Socio Tacchini, le pubblicazioni sottoindicate del Comandante Cattolica, direttore dell'Istituto idrografico della R. Marina in Genova, dandone la seguente notizia:

I. *Trattato di idrografia*. Parte. I[a]. *Nozioni di geodesia e topografia*. Libro di testo per la R. Accademia navale.

II. *Fari e segnali marittimi. Nozioni sulla costruzione e funzione dei segnali, con un cenno critico sull'amministrazione dei Fari in Italia.*

III. *Dei metodi seguiti dal R. Ufficio idrografico nel disegno e riproduzione delle carte idrografiche.*

La nostra letteratura nautica data da pochissimo tempo; nelle nostre scuole di marina, una diecina d'anni fa si insegnava soltanto con testi fran-

cesi. L'astronomia nautica si studiava sul Caillet, l'idrografia sul Dubois e la manovra navale sul Bonnefoux. Se questo si verificava per gli studî, che sono la base della coltura, si può immaginare come a più forte ragione mancassero nella nostra lingua le opere, che trattano argomenti speciali, ma pure di grande importanza, come sarebbe, ad esempio, il segnalamento delle coste, in relazione alla navigazione.

Colle due prime opere il Cattolica si è proposto di colmare qualcuna delle più importanti lacune, tuttora esistenti.

Il volume contenente le nozioni di Geodesia e Topografia è il primo dei tre, che costituiranno un trattato di Idrografia, cioè un'esposizione teorico-pratica completa dei metodi e degli istrumenti impiegati per il rilievo di un esteso tratto di costa.

Riguardo al volume dei Fari e segnali marittimi, è certo che esso risponde ad un bisogno non meno sentito dalla gente di mare, nel campo pratico.

Con lo sviluppo della navigazione a vapore, vale a dire col moltiplicarsi dei piroscafi e coll'aumentare continuo delle loro dimensioni e velocità, si sono accresciuti straordinariamente i pericoli, e perciò è da apprezzarsi maggiormente l'opera di coloro, come il Cattolica, che intendono migliorare la funzione del segnalamento.

Infine è importante quanto il Cattolica scrive sulla nostra amministrazione dei Fari, affermando la necessità di una riforma del suo ordinamento, se si vuole che essa risponda efficacemente al suo ufficio.

Il Socio Mosso presenta il fascicolo I del volume XXXVI delle *Archives italiennes de Biologie*, il quale contiene i Rendiconti del quinto Congresso internazionale dei Fisiologi tenutosi a Torino nel settembre scorso. Nell'ultima adunanza del Congresso essendosi fatto un voto che riguarda l'Accademia dei Lincei, il Socio Mosso prima di leggerlo fa precedere alcune notizie che servano a spiegarlo.

Per iniziativa di S. M. la Regina Madre venne ora ampliato l'Osservatorio che porta il suo nome augusto sulla vetta del Monte Rosa. Mentre che prima sulla punta Gnifetti a 4560 metri, vi erano appena tre camere, delle quali una sola serviva alle ricerche scientifiche, ora si costrussero altre quattro stanze, due delle quali più grandi, sovrapposte, con un terrazzo, serviranno alle osservazioni meteorologiche ed agli studî di fisica terrestre, ed una alle ricerche fisiologiche. I fondi per questa impresa ardita vennero offerti da S. M. la Regina Madre che fu la prima a concepire il progetto di dare all'Italia un laboratorio scientifico a grandi altezze, da S. A. R. il Duca degli Abruzzi, dal Club alpino italiano, e dal Ministero di Agricoltura e Commercio. In quest'anno tutto l'edificio sarà ultimato e rivestito di rame.

Il Ministro dell' Istruzione on. Nasi non potendo intervenire all' inaugurazione del Congresso internazionale dei fisiologi, come ne aveva manifestato il desiderio, accordò in tale circostanza lire tremila per arredare la stanza destinata agli studî fisiologici ed il prof. Mosso metteva i suoi apparecchi per le indagini fisiologiche sull'uomo a disposizione dei naturalisti italiani e stranieri che volessero intraprendere delle spedizioni scientifiche sul Monte Rosa.

Il Ministro di Agricoltura e Commercio on. Baccelli stanziò nel bilancio di quest'anno la somma di lire quattromila per l' acquisto degli strumenti registratori che dovranno servire alla meteorologia ed alla fisica terrestre, e venne pure fissata la somma per lo stipendio di un assistente e di un inserviente incaricati del servizio meteorologico di questo Osservatorio nell' altitudine di 4560 metri.

Durante il Congresso di Torino venne fatta una esposizione internazionale di strumenti fisiologici molto bene riuscita, alla quale presero parte i costruttori più celebri di apparecchi scientifici: molti avendo avuto notizia dell' iniziativa presa dal Ministro Nasi in favore degli studî fisiologici a grandi altezze, offrirono dei loro strumenti per questo nuovo laboratorio alpino; e varî fisiologici mandarono i loro apparecchi. La grande facilità colla quale dal versante italiano si può giungere sulla vetta del Monte Rosa, permetterà di dare nuovo impulso allo studio dell' uomo nelle alpi e la piccola capanna Regina Margherita che aveva già acquistato un nome nella scienza colle spedizioni fatte da Mosso, da Giacosa e da Zuntz di Berlino insieme al prof. Loewy ed ai suoi colleghi, diventerà un centro fecondo di nuove indagini fisiologiche.

Il prof. Sir Michael Foster, segretario della Società Reale di Londra, e il prof. Bowditch dell' Università di Boston, nella seduta di chiusura del Congresso di fisiologia fecero la proposta « che il Congresso internazionale dei fisiologi riunito a Torino chiedesse all'Associazione internazionale delle Accademie, di considerare il laboratorio fisiologico del monte Rosa come una istituzione internazionale e la pregasse di prenderlo in considerazione per i grandi vantaggi che esso può recare alla scienza.

Questa proposta che venne accolta con voto unanime viene ora presentata all'Accademia dei Lincei dal prof. Mosso che era il presidente del Congresso. La prima adunanza dell'Associazione internazionale delle Accademie avrà luogo in Londra; il voto del Congresso internazionale dei fisiologi deve essere prima accolto favorevolmente dall'Accademia dei Lincei che rappresenta l' Italia nell'Associazione internazionale delle Accademie.

Il Vicepresidente Blaserna dichiara che egli da varî anni prestò ben volentieri l'opera sua perchè la punta Gnifetti fosse munita di un Osservatorio di fisica terrestre e di scienze affini. Egli è lieto di poter aggiungere che nulla osta a che il voto del Congresso internazionale di fisiologia possa

essere esaudito; vale a dire che una stanza di quell'Osservatorio sia destinata a ricerche fisiologiche. In tal modo un terrazzo coperto servirà per la meteorologia, due altre stanze sottostanti serviranno alla fisica terrestre. Vi saranno inoltre: una stanza destinata alla fisiologia; una destinata ad abitazione dell'Assistente incaricato di rimanere lassù durante la stagione calda; una stanza destinata per alloggio agli ospiti che vorranno recarsi colà per fare delle ricerche; una stanza destinata a cucina; e finalmente due locali da servire come ricovero per i membri del Club Alpino.

Il Vicepresidente dice di essere ben lieto di poter presentare all'Accademia il voto del Congresso di Torino, e propone quindi che questo Osservatorio, costruito tutto per cura degli Italiani, sia raccomandato all'Associazione internazionale delle Accademie nella sua prossima riunione.

La Classe approva all'unanimità la proposta del Vicepresidente.

COMITATO SEGRETO

La Classe dichiara, in seguito all' iniziativa presa dalla Classe di scienze morali, storiche e filologiche, che ogni Socio ha il diritto di inserire negli Atti accademici tutte quelle osservazioni che egli crede di poter fare nell' interesse della scienza in fatto di Regolamenti Universitari; ma in pari tempo essa opina che non sia il caso di sottoporre queste osservazioni ad una deliberazione dell'Accademia, perchè in fatto di verità o di opportunità scientifiche non vi sono maggioranze o minoranze che possano decidere una questione.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; le Società zoologiche di Londra e di Amsterdam; le Società geologiche di Manchester, di Calcutta e di Sydney; la Biblioteca Vaticana di Roma.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto ed Orto botanico di Palermo; il R. Istituto geodetico di Potsdam; l'Osservatorio Haynald di Kalocsa.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 maggio 1902.

Cattolica P. L. — Dei metodi seguiti dal R. Ufficio Idrografico nel disegno e nella riproduzione delle carte idrografiche. Firenze, 1899. 8°.

Id. — Fari e segnali marittimi. Genova, 1902. 4°.

Id. — Trattato di idrografia. P. I. Nozioni di geodesia e topografia. Genova, 1902. 8°.

Celoria G. — Studî e ricerche specialmente italiane sulle variazioni delle latitudini terrestri. Milano, 1901. 8°.

Compte-rendu du 5e Congrès international de physiologie, Turin 17-21 sept. 1902, publié par le Secrétaire local Dr. Z. Treves. Turin, 1901. 8°.

D'Achiardi G. — Descrizione di alcune rocce della Colonia Eritrea, raccolte dal dott. G. Bartolommei Gioli. Pisa, 1902. 8°.

Daniel J. — Dictionnaire des matières explosives. Paris, 1902. 8°.

De Angelis D'Ossat G. — Fauna liasica di Castel del Monte (Umbria). Roma, 1902. 8°.

Id. — Un pozzo trivellato presso Napoli. Roma, 1902. 8°.

In memoria di Giulio Bizzozero nel primo anniversario della sua morte, la famiglia. Torino, 1902. 4°.

International Engineering Congress, Glasgow 1901. Meeting held at the University Glasgow on the 3th-5th Sept. 1901. Proceedings of the Section I and II. London, 1902. 8°.

Lapparent A. de — Atomes et Molécules. Louvain, 1902. 8°.

Lockyer N. — The chemical origins of the lines in Nova Persei. London, 1902. 8°.

Id. — Total Eclipse of the Sun, May 28, 1900. London, 1902. 4°.

Longo B. — Contribuzione alla conoscenza della vegetazione del bacino del fiume Lao. Roma, 1902. 4°.

Mc Lean A. — Local industries of Glasgow and the West of Scotland. London, 1902. 8°.

Maggiora A. — L'opera igienica di Bernardino Ramazzini. Modena, 1902. 8°.

Pierantoni L. F. — Dimostrazione del postulato di Euclide. Chieti, 1902. 8°.

Raulin V. — Variation séculaire du magnétisme terrestre. Paris, 1902. 8°.

Relazione dimostrativa dello stato e dello andamento dei lavori catastali dal 1° luglio 1900 al 30 giugno 1901. Roma, 1902. 8°.

Ribaga C. — Gamasidi planticoli. Portici, 1902. 8°.

Ricerche di biologia pubblicate per il XXV anniversario cattedratico di Pietro Albertoni dai suoi discepoli. Siena 1876 — Bologna 1901. Bologna, 1901. 4°.

Sars G. O. — An Account of the Crustacea of Norway. Vol. IV. Copepoda Calanoida. Part 5-6. Bergen, 1902. 8°.

Schreiber P. — Gewitter-Registrator. Calocsa 1901. 8°.

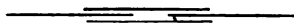
Valli V. — Rivendichiamo all' Italia la priorità della scoperta dell' inoculazione del virus rabido e del pus antipestilenziale. Roma, 1901. 8°.

Verri A. — Sorgenti, estuario e canale del fiume Sarno. Roma, 1902. 4°.

Id. — Un capitolo della geografia fisica dell' Umbria. Roma, 1901. 8°.

Vinassa de Regny P. — Paleontologia. Milano, 1902. 16°.

Worel K. — Ueber directe Photographie in natürlichen Farben auf Papier. Wien, 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 maggio 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Anatomia. — *Sopra gli organi escretori delle Salpidi.* Nota del Socio TODARO.

Gli organi escretori o renali delle Salpidi sono rimasti sconosciuti fino ai nostri giorni. L'anno scorso, nella seduta 11 aprile del III Congresso Zoologico Italiano tenuto in Napoli [1], io dimostrai le numerose e voluminose concrezioni uriche, che si trovano nel mesenchima attorno all'esofago e allo stomaco degli individui adulti della prole solitaria e della prole aggregata della *Helicosalpa virgola* (*), delle quali avevo ottenuto la prova non dubbia dell'acido urico con la reazione caratteristica della murexide.

Contemporaneamente W. Dahlgrün, nella comunicazione preliminare [2] sopra la struttura degli organi escretori dei Tunicati e nella Memoria pubblicata sopra lo stesso argomento [3], ha fatto conoscere che nel mesenchima, che occupa lo spazio tra l'esofago e lo stomaco da un lato ed il retto dall'altro degli individui adulti di ambedue le forme, solitaria ed aggregata, della

(1) F. Todaro, *L'organo renale delle Salpe.* Monitore zoologico italiano, anno XII, N. 7, 1901.

(*) Divido la famiglia delle *Salpidae* Forbes in tre generi: *Helicosalpa* mihi; *Cyclosalpa* Blainv.; *Salpa* Forsk.

(2) W. Dahlgrün, *Untersuchungen über den Bau der Excretionsorgane der Tunicaten.* Zoologischer Anzeiger, Bd. XXIV, N. 638, 1901.

(3) W. Dahlgrün, *Untersuchungen über den Bau der Excretionsorgane der Tunicaten.* Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. 58, Heft 2, 1901.

Salpa democratica e della *S. fusiformis*, si trovano cellule ovali contenenti granulazioni uriche, che egli perciò definì come vere cellule renali, derivate dalle cellule del mesenchima. Quindi sostenne che l'insieme di queste cellule forma il rene delle Salpidi, il quale sarebbe semplice come quello delle Synascidie e delle Cionadi, in cui, secondo lo stesso autore, sarebbe rappresentato da cellule renali isolate: nell'un caso e nell'altro perdurerebbero per tutta la vita dell'animale, e per conseguenza crescerebbero di numero man mano che altre cellule mesenchimatiche si caricano di granulazioni uriche. Egli paragona la funzione di queste cellule a quella della vescica renale delle Molgulidi e delle vescicole renali delle Phallusie, nelle quali C. Kupffer (1) ha stabilito che la secrezione non viene espulsa, ma depositata in sostanza densa entro vescicole chiuse. Però la comparazione non regge: nelle Molgulidi e nelle Phallusie le cellule epiteliali della parete della vescicola non accumulano, ma segregano i prodotti del ricambio materiale, il quale per la mancanza d' un condotto escretore rimane nella cavità della stessa vescicola ove si addensa; mentre le così dette cellule renali isolate del Dahlgrün non segregano, ma accumulano tali prodotti nel loro protoplasma senza, secondo lui, soggiacere ad altre mutazioni.

Invece io dimostrai al Congresso di Napoli che le concrezioni uriche si disgregano in finissime granulazioni, le quali, insieme all'acqua dell'emolinfa delle lacune vascolari, vengono a formare l'urina che si elimina per la via dell'esofago. Questo fatto mi ha condotto a scoprire gli organi renali delle Salpidi nel maggior numero delle specie che vivono nel Mediterraneo, organi che sono sfuggiti totalmente alle indagini del Dahlgrün.

Pubblicherò quanto prima le mie ricerche; per ora mi limito a comunicare all'Accademia soltanto i risultati principali.

Il mesenchima della regione viscerale delle Salpidi, e credo forse di tutti i Tunicati, ha la proprietà di formare gli endotelî ed il sangue, vale a dire, durante tutta la vita dell' individuo, le cellule del mesenchima di questa regione si moltiplicano e si trasformano in endotelî, in globuli sanguigni ed in linfociti, che sono cellule prive di membrana, come le cellule del mesenchima dalle quali derivano (*).

(1) C. Kupffer, *Zur Entwckelung der einfachen Ascidien*. Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. VIII, 1872.

(*) Gli endotelî ed il sangue hanno anche altre fonti d'origine: durante la vita embrionale si formano nella placenta fetale e nell'oeleoblasto della prole solitaria, e nello stoloblasto della prole aggregata. Nelle specie del gen. *Helicosalpa* ed in quelle del gen. *Cyclosalpa*, il cosidetto organo allungato, che perdura per tutta la vita ai lati del corpo della Salpa, come già io ho dimostrato, è pure una glandula emopojetica (vedi Todaro, *Sopra lo sviluppo e l'anatomia delle Salpe*. Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. II, serie 2ª, 1875).

I globuli sanguigni sono gli elementi più numerosi e si presentano sotto due fasi: in origine sono piccole cellule rotonde prive di membrana, con un nucleo relativamente grande; quindi, crescendo, perdono il nucleo e presentano l'aspetto di morula, a motivo della ripartizione del loro protoplasma in piccoli campi poligonali.

I linfociti sono grandi cellule rotonde od ovali senza membrana, con citoplasma chiaro e leggermente granuloso; hanno un piccolo nucleo rotondo, e corrispondono ai così detti fagociti.

Nel mesenchima, che sta intorno agli organi renali e specialmente in corrispondenza dell'esofago e dello stomaco, il citoplasma, tanto de' globuli sanguigni quanto dei linfociti, si carica di sostanze uriche.

Nel corpo del linfocito si vede in principio una minuta granulazione, che col carminio si colora in rosso rubino. Via via che questa granulazione aumenta, sparisce il nucleo, ed il corpo protoplasmatico, notevolmente ingrandito, si colora tutto intensamente in rosso rubino.

I globuli sanguigni (fig 1), in questa parte del mesenchima (mesenchima renale), perdono il nucleo non appena formati, e si presentano in principio come piccoli corpi sferici, che si colorano leggermente in rosso col carminio. Sono talora isolati, circondati da una zona chiara, ma per lo più stanno riuniti insieme in tre, quattro, cinque o più globuli dentro le lacune vascolari. In questi piccoli globuli cominciano a comparire le concrezioni uriche, omogenee, sferiche od ovali, alcune delle quali hanno il colore bianco-cretaceo, altre bruno-giallognolo. Le prime col carminio, o colla doppia colorazione di ematossilina acida e carminio boracico, si colorano intensamente in rosso rubino; nelle seconde il colorito bruno-giallognolo rimane quasi invariato. Oltre di questi piccoli globuli sanguigni, non è raro vedere, in qualche lacuna del mesenchima che circonda l'esofago, un corpo sferico isolato, carico di concrezioni uriche, il quale conserva la grandezza e la forma del globulo sanguigno nella fase di morula.

I globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, si comportano diversamente secondo le specie: scarsissimi nelle specie del genere *Cyclosalpa*; scarsi nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis*; sono invece abbondanti nella forma aggregata della *Salpa Tilesii* e della *Salpa confoederata*, ma sopratutto abbondano in tutte e due le forme dell' *Helicosalpa virgola*.

In queste tre ultime specie si vedono i globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, formare grossi conglobati o corpi di forma ora ovoidale, ora sferica. Questi corpi nella *Salpa Tilesii* lasciano nettamente vedere i globuli che concorrono a formarli; poichè le granulazioni uriche, brune e rosse, stanno nel corpo dei globuli come sferule di grandezza variabile, per lo più piccole, isolate e non molto abbondanti. Viceversa, nella prole aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 1, *Cu*) e in ambedue le forme della *Helicosalpa virgola*, i globuli del sangue accumulano tanta sostanza urica, che questa si mostra fusa in massa, e non si veggono più i limiti netti tra un globulo

e l'altro. Tutto il conglobato si presenta come un corpo, o sferico, od ovale, circondato da uno strato chiaro di sostanza organica, ed intersecato da linee bianchicce della stessa sostanza, che rappresentano i primitivi limiti di adesione dei globuli fra loro.

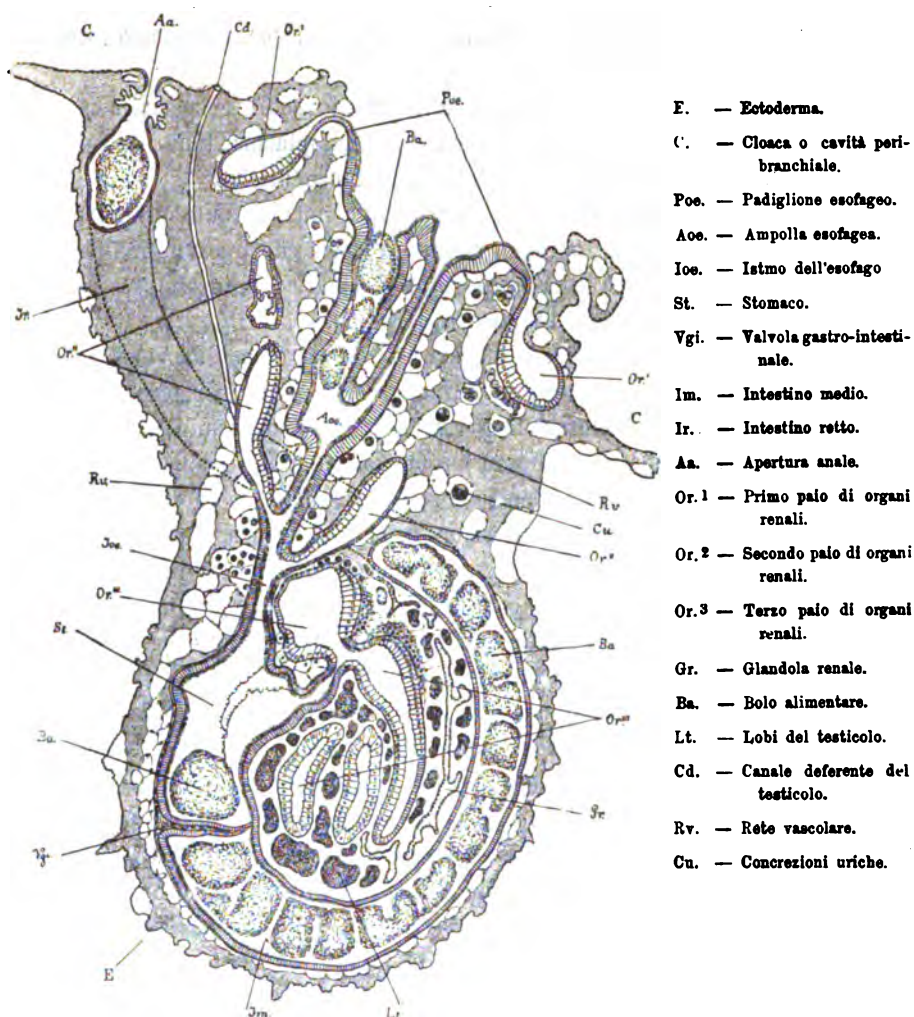



Fig. 1. — Schema dell'apparecchio uro-digerente e del testicolo della *Salpa confoederata*. *(prol. ag.)*.

Non tutti questi corpi presentano uniformemente il colorito bruno-giallognolo; ma in alcuni si distinguono dei settori bianco-cretacei o rosso-rubini; ciò sta in rapporto con i globuli diversi, che sono entrati nella loro composizione. Nell'*Helicosalpa virgola* questi corpi, tanto nella prole solitaria come

nella prole aggregata, sono così voluminosi che fanno prominenza sulla superficie; e negli individui adulti, sono tanto abbondanti ai lati dell'esofago, che danno un carattere particolare al mesenchima renale, il quale, con una lente anche di mediocre ingrandimento, si vede avere la forma presso a poco triango-

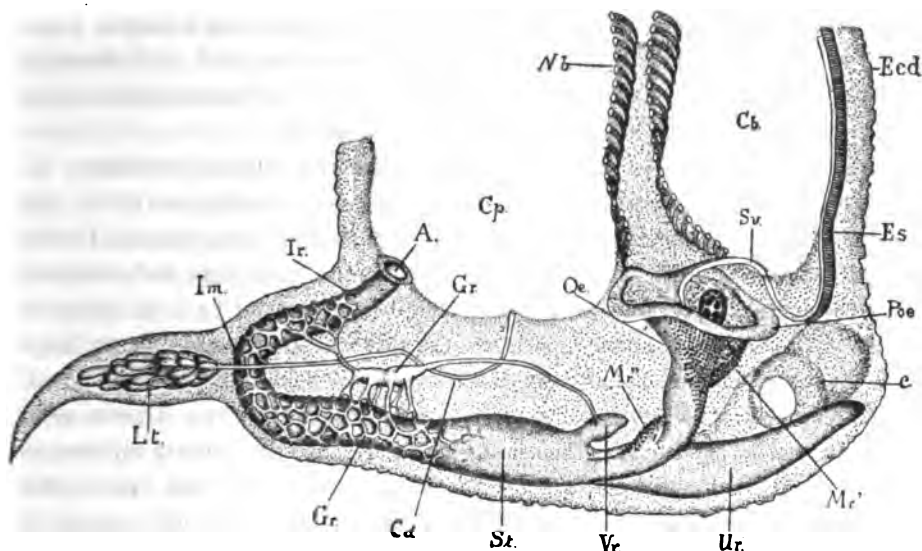



Fig. 2. — Regione viscerale della *Salpa virgola* (*prol. ag.*), veduta a debole ingrandimento.

Nb. Nastro branchiale. — Sv. Solco ventrale. — Es. Endostilo. — Oe. Esofago. — St. Stomaco. — Im. Intestino medio. — Ir. Intestino retto. — A. Ano. — Lt. Lobi del testicolo. — Cd. Canale deferente. — Gr. Glandola renale. — Vr. Vescichetta o ampolla renale. — De. Dutto escretore. — Ur. Utricolo renale. — Cb. Cavità branchiale. — Cp. Cavità peribranchiale o cloaca. — Ecd. Ectoderma. — c. Cuore. — Mr.' Mesenchima renale destro. — Mr.'' Mesenchima renale sinistro.

lare col vertice rivolto indietro e prolungato fino allo stomaco (fig. 2, *Mr'*, *Mr''*). In questo mesenchima i corpi o conglobati urici, si presentano come i pezzi di un mosaico. Essi sono composti di uno stroma di sostanza organica, derivata dal protoplasma dei globuli sanguigni, e delle concrezioni uriche in essa contenute.

I globuli sanguigni, contenenti le concrezioni uriche, che si veggono nelle lacune vascolari del mesenchima renale, non tutti nascono *in situ*, ma molti provengono dalle parti lontane, e servono a trasportare i prodotti del ricambio materiale agli organi escretori. Difatto la sostanza organica dei corpi che risultano dalla fusione di questi globuli e quella dei linfociti, si va lentamente assottigliando e riassorbendo; quindi le concrezioni uriche si disgregano in finissime granulazioni, che, trasportate dall' idrolinfa del sangue, traversano il mesenchima e penetrano nell'epitelio degli organi renali, dal quale sono eliminate nel modo che dirò.

Nella regione viscerale (fig. 1, *Or'*, *or''*, *or'''*) si trovano, circondati dal mesenchima, tre paia di organi escretori o renali, diversamente sviluppati secondo la specie ed anche secondo la prole nella stessa specie. Questi organi hanno diversa relazione con l'esofago e lo stomaco, e si possono, secondo la posizione che occupano, distinguere in primo, secondo e terzo paio. Ma sia direttamente, sia indirettamente l'orina segregata da loro viene ad essere versata nella cloaca, donde è emessa all'esterno. Avvegnachè nelle Salpidi l'esofago e lo stomaco hanno un doppio ufficio: conducono cioè nell' intestino il bolo alimentare formatosi nell'endostilo, e servono a versare nella cloaca l'urina percolata nella loro cavità dagli organi renali.

L' esofago (figg. 1 e 2) ha la forma ad imbuto, aperto largamente innanzi; quindi possiamo distinguere in esso tre parti: il padiglione (*Poe*), che circonda l'apertura anteriore; l'ampolla (*Aoe*), che segue al padiglione; l'istmo (*Ioe*), che va ad aprirsi nello stomaco (*st*). Questo è distinto dall' intestino per un leggiero strozzamento. Nella *Salpa confoederata* (*Vgi*), in corrispondenza di questo strozzamento, si trova una valvola rappresentata da un largo lembo, che abbassandosi permette il passaggio del bolo alimentare, ed innalzandosi impedisce la penetrazione nell' intestino dell' urina che si versa nello stomaco, donde, per la via dell'esofago e della cloaca, viene emessa all'esterno.

L' esofago presenta nella parete dorsale dell' ampolla una cresta longitudinale, che la divide in due canali: uno largo e l'altro ristretto; nel primo ho veduto impegnato il bolo alimentare (fig. 1, *Ba*); il secondo sembra destinato al passaggio dell'urina, che dall' esofago si riversa nella cloaca. Invero l'apertura anteriore dell'esofago è circondata da una larga ripiegatura ovale, che presenta la forma di un padiglione (figg. 1, 2, *Poe*), posto trasversalmente sopra le due radici del nastro branchiale, che separano l'una dall'altra, nella loro parete posteriore, la cavità branchiale, e la cavità peribranchiale, le quali, come è noto, comunicano largamente ai lati del nastro branchiale. Il padiglione dell'esofago adunque è dorsalmente posto, cioè nella cavità peribranchiale o cloaca; esso (fig. 2, *Sv*) riceve il solco ventrale della faringe o cavità branchiale, il quale, al di là dell' estremità posteriore dell' endostilo (*es*), si prolunga ricurvato all' innanzi, e risalendo dorsalmente sul padiglione, con cammino a spira si porta nella parete posteriore dell'ampolla esofagea, ove si continua coll' estremità superiore del canale, che conduce il bolo alimentare.

La parete di tutto il tubo alimentare è composta di due membrane: una interna rappresentata da un solo strato di epitelio; ed una esterna, che si colora in rosso, e che è stata descritta come formata di semplice cellulosa, ma invece contiene molte fibre muscolari liscie.

L'epitelio del padiglione esofageo è pavimentoso, come quello della faringe e della cloaca. L'epitelio pavimentoso si continua nella parete ventrale dell'ampolla; mentre in quella dorsale è cilindrico e vibratile, come l'epitelio delle pliche, che limitano l'endostilo o meglio il solco ventrale della cavità

branchiale. Nell'istmo dell'esofago, nello stomaco e nell'intestino, l'epitelio è sempre cilindrico e vibratile, meno nel retto ove è cubico o semplicemente pavimentoso.

Tutto l'epitelio del tubo digestivo è secernente. Il liquido segregato dalle cellule epiteliali dell'intestino agisce sopra il bolo alimentare; ma l'epitelio dell'esofago segrega molto muco, che si colora intensamente con l'ematossilina acida ed il carminio boracico, e lascia vedere difficilmente le lunghe ciglia vibratili di cui è provvisto. Queste però si mostrano chiaramente, riunite ai granuli basali della cellula, nelle sezioni colorite con l'ematossilina ferrica secondo il metodo Heidenhain.

Delle tre paia di organi renali, di cui abbiamo parlato sopra, il primo (fig. 1, *Or'*) è rappresentato da due vesciche; una a destra e l'altra a sinistra, che stanno nel mesenchima ai lati dell'inizio dell'esofago. Queste due vesciche, nella sezione, hanno la forma di un fiasco coricato col collo ripiegato in alto, il quale si apre, con una stretta fissura, ai lati del padiglione esofageo e quindi direttamente nella cloaca.

I due organi renali, uno destro e l'altro sinistro, che rappresentano il secondo paio (fig. 1, *Or''*), sono compressi, e sboccano nell'istmo esofageo, che circondano a spira. Si terminano a fondo cieco, e variano di grandezza e di forma l'uno dall'altro: quello di sinistra è sempre molto più grande di quello di destra. Inoltre la forma e la grandezza di questi due organi variano da una specie all'altra: piccoli nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis*; sono viceversa grandi nelle altre specie, specialmente il sinistro che, nella *Salpa confoederata*, *Salpa Tilesii*, *Salpa zonaria*, *Salpa maxima*, ecc., si prolunga molto, innanzi ed indietro.

I due organi renali posteriori, che fanno il terzo paio (fig. 1, *Or'''*), sboccano in un infossamento dello stomaco che sta ai lati della sua apertura superiore o esofagea, il quale infossamento è a forma di imbuto ciliare capovolto, più o meno pronunciato secondo la specie. Questi due organi sono diversamente sviluppati, non solo tra una specie e l'altra, ma anche tra una prole e l'altra della stessa specie. Nella prole solitaria delle specie appartenenti al genere *Helicosalpa* ed al gen. *Cyclosalpa*, ove sono stati veduti fin dai primi tempi senza essere stati riconosciuti come reni, hanno entrambe la forma di un utricolo o di un'appendice cecale a dito di guanto, e sono presso a poco di uguale grandezza. Viceversa nella prole aggregata di tutte le specie di questi due generi, l'appendice destra si riduce ad una semplice ampolla. In questa viene a sboccare (fig. 2, *Gr*) il lungo condotto escretore d'una glandola tubulare, disposta a rete attorno l'intestino medio, la quale forma parte integrante del terzo paio degli organi renali. Ma questa glandula si sviluppa indipendentemente dagli organi renali.

Tutti gli organi renali, che ho descritto, si sviluppano contemporaneamente al tubo alimentare per estroflessioni dell'entoderma; mentre la glandula in discorso si sviluppa più tardi dalle cellule epiteliali, che si trovano isolate

all' intorno dell' intestino medio, sotto della sua tunica o membrana propria. Molto tempo dopo che dall' entoderma si sono formati gli organi renali, ed il tubo alimentare si è differenziato in esofago, stomaco ed intestino, le predette cellule epiteliali isolate si moltiplicano e formano altrettanti gruppi cellulari, i quali prima solidi divengono poi cavi, trasformandosi così in vescicole epiteliali. Queste vescicole, mano mano che si allungano, si toccano per la loro estremità, ove si fondono e comunicano tra loro; così vengono a costituire la rete tubulare, che rappresenta questa glandula. Le vescicole, che stanno in prossimità dello stomaco, sono più grandi e, riunendosi, formano il condotto escretore di questa glandula, della quale ho seguito tutte le fasi dello sviluppo, fino all'unione del suo dutto con l'ampolla renale, nella prole aggregata della *Salpa democratica.*

Nella forma aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 1, *Or'''*), come in tutte le specie del gen. *Salpa*, i due organi renali, che formano il paio posteriore, si trovano nel mesenchima, che occupa lo spazio fra lo stomaco e l' intestino medio, unitamente alla glandula, il condotto escretore della quale (fig. 1, *Gr*) decorre nella concavità dell' intestino, e sbocca nell'organo renale dorsale che si presenta come una vescica, mentre l'organo ventrale è sviluppato in un lunghissimo tubulo convoluto a forma di coclea, che, in tutte le specie del genere *Salpa* (*Salpae carioenteratae*), occupa il centro del cosidetto nucleo viscerale.

Nel mesenchima, interposto fra le spire del tubulo convoluto l'intestino medio e lo stomaco si trovano sparsi i lobi del testicolo, i quali, sotto l'estremità posteriore dell' esofago, vengono a formare il canale deferente. Questo, decorrendo in avanti fra il retto e l'esofago, si viene ad aprire nella cloaca (fig. 1, *Lt*, *cd*).

La figura schematica (fig. 1), che qui ho posto per indicare la posizione ed i rapporti degli organi renali, è stata ricostruita sopra le sezioni longitudinali, orizzontali e sagittali, della regione viscerale della prole aggregata della *Salpa confoederata* Forsk., nello stato adulto. Ma sebbene la posizione di questi organi non cambia nelle altre specie, pur tuttavia tanto la grandezza quanto i rapporti loro mutano da un genere all'altro e, più o meno, anche fra una specie e l'altra dello stesso genere. Quindi bisognerà trattarne particolarmente, come farò nella Memoria. Ora mi limito soltanto a dire alcune parole intorno la struttura di questi organi.

Da quanto innanzi ho detto risulta che i reni delle Salpidi sono organi cavi, i quali contengono l' urina, che viene segregata dalle pareti loro e quindi versata nella cloaca, o direttamente, o indirettamente per la via dello stomaco e dell'esofago.

La parete di questi organi è composta di una membrana propria (tunica esterna) e di un epitelio. La membrana propria è molle, sottile, amorfa, e si colora con l' ematossilina acida e col carminio. L' epitelio è composto di

un solo strato di cellule, il quale a livello dell'apertura dell'organo si continua con l'epitelio della superficie su cui sbocca. Quindi, a livello dell'apertura, è pavimentoso, come quello della cloaca, negli organi renali anteriori, o del primo paio; è vibratile, come quello dell'esofago e dello stomaco, negli organi renali del secondo e terzo paio.

In tutti gli organi renali, l'epitelio propriamente glandulare si distingue in pavimentoso e cilindrico.

Negli organi del primo paio (fig. 1, *or'*), l'epitelio pavimentoso si trova lungo la parete esterna, ove riveste una procedenza di mesenchima ricco di lacune vascolari. Quest'epitelio non ha altro ufficio che quello di segregare l'acqua, come l'epitelio pavimentoso dei glomeruli del Malpighi del rene dei vertebrati. L'epitelio cilindrico occupa invece tutta la parete interna di questi organi, e presenta i caratteri dell'epitelio dei tubuli contorti del rene dei vertebrati.

Queste due diverse specie di epitelio si trovano ugualmente negli organi renali del secondo e terzo paio (fig. 1, *or''*, *or'''*); ma in questi organi l'epitelio cilindrico, che segrega i principî specifici dell'urina, è molto esteso, riducendosi l'epitelio pavimentoso ad un tratto, che si trova nella parete esterna di essi verso l'estremità distale chiusa a fondo cieco.

Nella glandola renale (fig. 2, *gr*), la quale, come ho detto sopra, nella forma aggregata delle specie del gen. *Helicosalpa* e del gen. *Cyclosalpa* è connessa con l'ampolla del terzo paio, e nella *Salpa confoederata* (fig. 1, *gr*) si apre nel sacco dorsale del terzo paio degli organi renali, l'epitelio è pavimentoso da per tutto: le cellule sono cubiche o piatte, hanno un nucleo rotondo e granuloso, ed il protoplasma chiaro. Nei piccoli tubuli, che formano questa glandola, e nel suo condotto escretore si trova sempre un liquido chiaro; quindi essa segrega l'acqua come l'epitelio pavimentoso del primo e secondo paio e per conseguenza come i glomeruli del Malpighi.

Le cellule dell'epitelio cilindrico, che negli organi renali delle Salpidi hanno l'ufficio di eliminare dall'organismo i prodotti del ricambio materiale, sono molto alte, e in esse, come nelle cellule dei tuboli contorti dei vertebrati, si possono distinguere due porzioni, una basale e l'altra assiale, fra le quali è interposto il nucleo, il quale è vescicoloso, e contiene uno scarso reticolo di linina e alcuni granuli di cromatina variamente disposti.

Queste cellule non hanno membrana nè orlo cuticulare, ed il corpo protoplasmatico loro varia di tessitura, secondo le fasi della sua attività secretiva. Nelle sottili sezioni (7-10 micromillimetri), colorite con la doppia colorazione di ematossilina acida e carminio boracico, si osserva che il corpo di queste cellule contiene le fine granulazioni uriche caratteristiche, colorite alcune in nero o bruno giallognolo, altre in rosso rubino, perfettamente simili alle granulazioni che si trovano nel sottostante mesenchima, e che, come

innanzi si è detto, derivano dalla disgregazione delle masse di concrezioni uriche, che occupano le lacune vascolari del mesenchima renale.

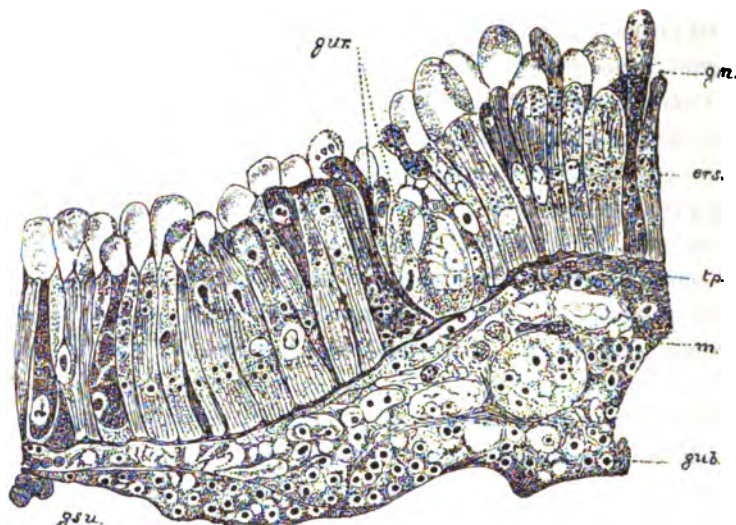



Fig. 3. — Epitelio cilindrico della parte prossimale all'apertura del 3° paio degli organi renali della *Salpa confoederata (prol. ag.)*.

ers. Epitelio renale secernente. — *tp*. Tunica propria. — *m*. Mesenchima. — *gsu*. Globuli sanguigni con concrezioni uriche. — *gm*. Globi mucosi. — *gub*. Granuli urici bruno-giallognoli. — *gur*. Granuli urici rossi.

Nella prole aggregata della *Salpa confoederata* (fig. 3) e dell'*Helicosalpa virgola* (fig. 4), è facile vedere le granulazioni uriche in tutto l'epitelio

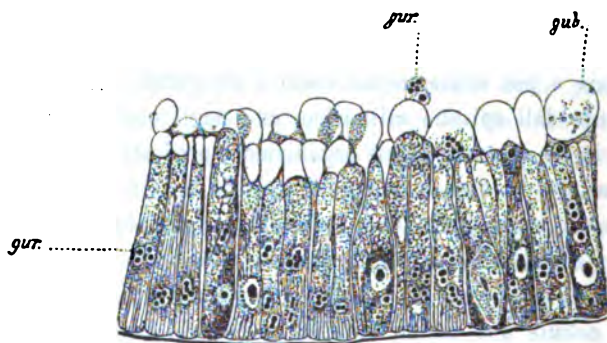



Fig. 4. — Epitelio cilindrico dell'utricolo del 3° paio degli organi renali della *Helico salpa virgola (prol. ag.)*.

gur. Granuli urici rosso-rubino. — *gub*. Granuli urici bruno-giallognoli.

cilindrico renale, ma specialmente in quello degli organi renali del terzo paio, ed in modo più distinto in prossimità allo sbocco di questi ultimi organi, ove le cellule dell'epitelio cilindrico si trovano in tutte le fasi della loro funzione

secretiva, e le granulazioni uriche si mostrano evidenti e caratteristiche, tanto nell'epitelio, quanto nel sottostante mesenchima. Nella *Helicosalpa virgola* tali granulazioni si colorano in rosso rubino, ad eccezione di alcune molto rare che conservano il colorito nero o bruno giallognolo. Viceversa nella *Salpa confoederata* prevalgono le granulazioni bruno-giallognole.

Adunque si vede nel modo più chiaro che i prodotti urici sono eliminati dall'economia animale, mercè la secrezione mucosa delle cellule renali.

Nella prima fase il corpo protoplasmatico di queste cellule si colora da per tutto intensamente, e presenta la struttura reticolare, nelle cui maglie, più o meno strette, si trova il muco segregato. Vi sono in questo muco disseminate qua e là le granulazioni uriche, penetrate dal mesenchima sottostante.

Ma a poco a poco il muco aumenta. e viene ad accumularsi successivamente tutto nella porzione assiale, trascinando con sè le granulazioni uriche. In questa seconda fase la porzione basale si mostra striata longitudinalmente, e nell'estremità libera della porzione assiale delle cellule si veggono i grossi globi di muco, contenenti le granulazioni uriche.

Questi globi mucosi, quando giungono nell'estremità libera delle cellule, sono circondati da un sottile strato di protoplasma, il quale forma una specie di vescicola che, scoppiando, dà luogo alla fuoriuscita del muco contenente le granulazioni uriche. Così mentre il muco si spande a forma di strato sopra l'epitelio, le concrezioni uriche vengono a prender parte principale nella formazione della urina.

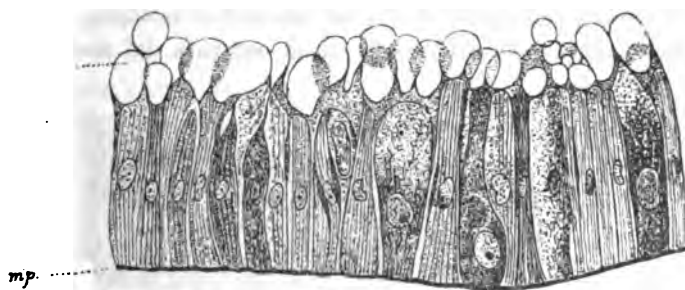



Fig. 5. — Epitelio cilindrico dell'utricolo del 3° paio degli organi renali della *Cyclosalpa piumata (prol. ag.)*.

mp. membrana propria.

Anche negli organi renali posteriori della *Cyclosalpa pinnata* (fig. 5) l'epitelio cilindrico ha le sue cellule in tutte le fasi della funzione renale, e quindi presenta le stesse variazioni di struttura come quelle ora descritte nelle specie sopradette; ma le granulazioni uriche sono poco apprezzabili, poichè, come notammo (pag. 407), in questa specie, ed in tutte le altre del gen. *Cyclosalpa*, le concrezioni uriche sono scarsissime ed estremamente fine,

e quindi nelle cellule dell'epitelio cilindrico appaiono solo come una scarsa e fina punteggiatura nera nel fondo bianco che presentano i globi di muco.

Negli organi renali, che sboccano nell'istmo dell'esofago e formano il secondo paio, le cellule dell'epitelio cilindrico, nella prole aggregata della *Helicosalpa virgola* (fig. 6), hanno la porzione basale striata longitudinalmente.

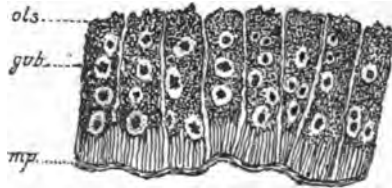



Fig. 6. — Epitelio cilindrico della parte prossimale allo sbocco del 2° paio degli organi renali della *Helicosalpa Virgola (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *gub*. Nuclei composti di granuli urici. — *ols*. Orlo libero sfrangiato.

Viceversa il protoplasma della loro porzione assiale è reticolato. In questo protoplasma vi sono vari grossi cumuli di muco, nel cui centro si trovano aggruppate le concrezioni uriche che formano un nucleo di colorito nero. Ma in queste cellule il muco non si concentra tutto; rimane invece sparso nel reticolo protoplasmatico della porzione assiale, che cade più tardi tutta in un *detritus*, il quale si mescola con l'urina contenuta nella cavità dell'organo, come si vede nel tratto epiteliale che segue a quello qui descritto.

Nella *Salpa confoederata* le cellule dell'epitelio cilindrico degli organi renali anteriori, che sboccano ai lati del padiglione esofageo, sono striate longitudinalmente, meno nella base che viene occupata dal nucleo (fig. 7).

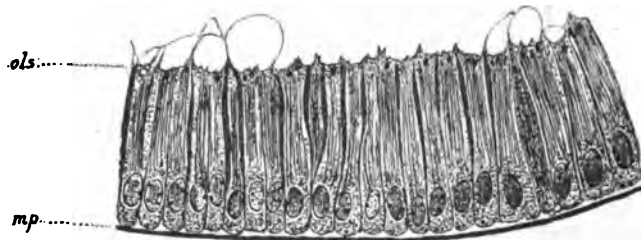



Fig. 7. — Epitelio cilindrico della parete interna (mediale) della vescicola del primo paio degli organi renali della *Salpa confoederata (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *ols*. Orlo libero sfrangiato.

L'epitelio cilindrico del tubulo convoluto del terzo paio di organi renali della prole aggregata della *Salpa Tilesii* (fig. 8) è quello che più si avvicina nella sua struttura all'epitelio dei tubuli contorti dei vertebrati. Le cellule sono regolarmente cilindriche e quasi tutte della stessa grandezza; sono striate in tutta la loro lunghezza, dall'estremità basale all'estre-

mità libera, ove ogni stria termina in un punto nodale sotto l'orlo sfrangiato. Questo ricorda l'orlo a spazzola delle cellule dei tuboli contorti del rene dei vertebrati; ma esso non è fatto di ciglia, bensì di sfrangiature protoplasmatiche, derivate dallo scoppio delle vescicole ripiene di muco.

Nel tubolo convoluto del terzo paio d'organi renali della prole aggregata della *Salpa zonaria* e della *Salpa maxima* la struttura dell'epitelio è simile a quella della *Salpa Tilesii*. Nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis* si presentano alcune particolarità che mi riservo descrivere più tardi.

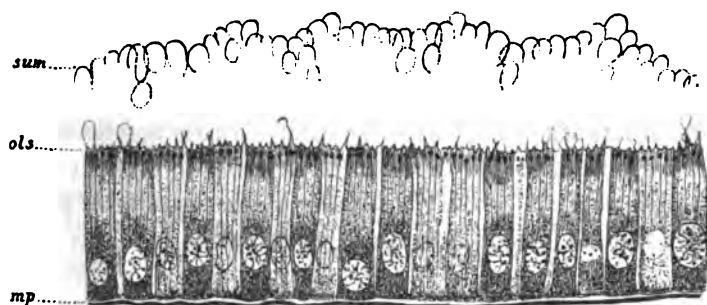



Fig. 8. — Epitelio cilindrico del tubolo convoluto del 3° paio degli organi renali della *Salpa Tilesii (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *ols*. Margine sfrangiato. — *sum*. Secreto uro-mucoso.

Intanto da quanto qui brevemente ho comunicato si può concludere che nelle Salpidi si ha la prova diretta dell'eliminazione dei principî specifici dell'urina per mezzo delle cellule dell'epitelio cilindrico degli organi renali, e si acquista la conoscenza del meccanismo, col quale il corpo protoplasmatico di queste cellule compie tale funzione.

Matematica. — *Sulle serie di fattoriali*. Nota II del Socio S. Pincherle.

In una Nota presentata all'Accademia nella seduta del 16 febbraio del corrente anno (1), ho preso a considerare le serie procedenti per funzioni della forma

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)},$$

e ne ho dato le condizioni di convergenza dipendentemente dalle variabili

(1) Quella Nota verrà qui citata con I, seguìto dal numero del paragrafo.

x ed y, con qualche maggiore precisione di quanto si faccia ordinariamente [1].

Era necessario di fare precedere quelle considerazioni alle altre, di cui intendo ora occuparmi, di sviluppabilità di una funzione in serie di tal forma. Sono più particolarmente degne d'interesse (per le loro applicazioni, in special modo al calcolo delle differenze finite e allo studio delle relazioni fra le funzioni generatrici e le loro determinanti) le serie procedenti secondo le funzioni

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots n},$$

o secondo le

$$\eta_n(x) = \frac{1.2.3\dots(n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Queste ultime sono quelle serie che hanno formato oggetto delle recentissime comunicazioni del sig. Nielsen all'Accademia di Parigi [2], già citate nella precedente nota; le prime, che formano l'argomento della presente Nota, danno pure luogo ad alcune interessanti osservazioni.

1. Di una data successione

$$(1) \qquad c_0, c_1, c_2, \dots c_n, \dots$$

si dirà *caratteristica* il massimo limite k (I, § 1) di

$$\frac{\log |c_n|}{\log n} \text{ [3]};$$

la serie $\Sigma c_n n^{-\rho}$ è assolutamente convergente per $R(\rho) > k+1$ [4]; essa non è convergente per $R(\rho) < k$.

Assumendo i numeri (1) a coefficienti della serie di fattoriali

$$(2) \qquad \sum c_n \binom{x}{n},$$

si possono presentare i seguenti casi:

[1] Il sig. Bendixson (Acta Math., T. II, pag. 24), ha già avuto occasione di distinguere, per serie procedenti secondo prodotti di fattori lineari, il campo di convergenza semplice da quello di convergenza assoluto.

[2] Comptes Rendus, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902. Sul medesimo argomento v. anche J. C. Kluyver nei medesimi Comptes Rendus, 10 mars 1902 e nel Nieuw Archief voor Wiskunde di Amsterdam: « Over de ontivikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks » (S. II, T. IV, 1900).

[3] La caratteristica di (1), aumentata di un'unità, dà ciò che il sig. Hadamard (J. de Mathém., S. IV, T. VIII, 1892, pag. 170 e seg.; e *La série de Taylor*, nella raccolta *Scienzia*, Paris, C. Naud, 1901, pag. 459), chiama *ordine* della serie $\Sigma c_n z^n$ lungo il cerchio $|z| = 1$.

[4] $R(x)$ indica sempre la parte reale di x.

O si ha $k = -\infty$; la (2) appartiene allora alla prima classe (I, § 3); essa converge assolutamente ed uniformemente per tutti i valori finiti di x e rappresenta in tutto il piano una funzione intera.

O k è finito; in tal caso la (2) converge assolutamente ed uniformemente per $R(x) > k$ e rappresenta per tali valori di x [1] un ramo ad un valore $\sigma(x)$ di funzione analitica monogena. La serie si riduce ad un numero finito di termini per $x = 0$ o per x intero positivo e rappresenta quindi, in ognuno di tali punti, un numero determinato; tuttavia questi punti non si ascriveranno al campo di convergenza della serie (2), ed i valori che essa assume nei punti stessi possono benissimo non essere quelli della funzione $\sigma(x)$ rappresentata dalla serie (2) nel suo campo di convergenza $R(x) > k$, anche se la funzione $\sigma(x)$ esiste nel campo $R(x) \leq k$.

O infine si ha $k = +\infty$: la (2) non ha campo di convergenza e non rappresenta quindi alcuna funzione analitica di x. Essa ha significato solo per $x = 0$ e per x intero positivo.

2. Qualunque sia quello dei tre casi ora considerati in cui si trova la serie (2), facendovi $x = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ si otterrà sempre una successione determinata

$$b_0\,, b_1\,, b_2\,, \ldots b_n\,, \ldots \tag{3}$$

dove b_n è data da

$$b_n = c_0 + n c_1 + \binom{n}{2} c_2 + \cdots + c_n. \tag{4}$$

Inversamente, risolvendo le (4) rispetto a c_n, si otterrà immediatamente la successione (1), data che sia la (3), per mezzo della formula

$$c_n = b_n - n\, b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} - \cdots + (-1)^n b_0\,, \tag{5}$$

che, mediante la notazione usuale del calcolo delle differenze finite, può anche scriversi

$$c_n = \Delta^n b_0\,.$$

Sia ora data una funzione analitica $f(x)$ regolare per ogni valore $R(x) \geq 0$, e si formi la successione

$$\Delta^n f(0)\,.$$

Se questa ammette una caratteristica k che non sia $+\infty$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(0) \binom{x}{n}$$

[1] Che si diranno costituire il campo di convergenza della serie.

convergerà assolutamente ed uniformemente per $R(x) > k$, e la differenza

$$f(x) - \sum \Delta^n f(0) \binom{x}{n} \tag{6}$$

rappresenterà, per ogni $R(x)$ maggiore del maggiore fra i numeri 0 e k, una funzione analitica regolare, nulla nei punti

$$x = E(k) + 1, \qquad E(k) + 2, \ldots,$$

essendo $E(k)$ il massimo intero contenuto in k.

L'espressione (6) è nulla per $x = 0, 1, 2, \ldots E(k)$, anche se è $E(k) \geq 0$, sebbene per $R(x) \leq k$ essa espressione (6) non rappresenti una funzione analitica.

Può accadere che la differenza (6) sia identicamente nulla: in tal caso la funzione $f(x)$ sarà sviluppabile in serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, e se ne conclude intanto che è

« condizione necessaria a che una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie « di fattoriali, che la caratteristica di $\Delta^n f(0)$ non sia $+\infty$. »

Si può aggiungere ancora che

« condizione necessaria a che una funzione $f(x)$ trascendente intera sia « rappresentabile in tutto il piano da una serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, è che la « caratteristica di $\Delta^n f(0)$ sia $-\infty$. »

3. Le considerazioni precedenti conducono naturalmente a chiedere se possono esistere sviluppi dello zero in serie di fattoriali, e di conseguenza, se per una stessa funzione possono esistere più sviluppi di tale forma. L'esistenza di sviluppi dello zero è stata dimostrata dal Frobenius [1] per le serie procedenti secondo funzioni della forma

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

egli considera più particolarmente il caso in cui $\Sigma |a_n|$ è convergente, ma pure accennandoli, nel § 7 della sua Memoria, per altri casi e in particolare per quello di serie di fattoriali, non costruisce effettivamente, per questo caso, i detti sviluppi dello zero.

Tali sviluppi si possono ottenere direttamente dalle relazioni che abbiamo dal § precedente, nel seguente modo, del tutto elementare.

Dapprima, non può esistere uno sviluppo dello zero

$$\sigma(x) = \sum c_n \binom{x}{n} = 0 \tag{7}$$

[1] Crelle, Bd. LXXIII, pag. 7 (1871).

in cui la caratteristica k di c_n sia negativa, a meno che tutte le c_n non siano nulle. Infatti, se ciò fosse, i punti $x=0,1,2,\dots n,\dots$ cadrebbero nel campo di convergenza di (7), e sarebbe pertanto $b_0=b_1=\dots=b_n=0$, da cui, per le (5), $c_0=c_1=\cdots=c_n=0$.

Può invece esistere uno sviluppo (7) in cui la caratteristica di c_n sia nulla. In tal caso, $x=0$ cadendo al contorno del campo di convergenza di (7), può b_0 essere differente da zero, e siccome è ammissibile in (7) la presenza di un moltiplicatore arbitrario costante, si può supporre senza restrizione $b_0=1$, da cui $c_n=(-1)^n$.

Si giunge così alla serie

$$\sigma_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{x}{n}.$$

Ora questa rappresenta effettivamente lo zero per ogni $R(x)>0$: ciò risulta dalla nota formola [1]

$$\frac{1}{x-y}=-\frac{1}{y-1}-\frac{x-1}{(y-1)(y-2)}-\frac{(x-1)(x-2)}{(y-1)(y-2)(y-3)}-\cdots\cdot$$

valida per $R(x)>R(y)$; facendovi $y=0$, se ne deduce

$$\sigma_0(x)=1-x+\binom{x}{2}-\binom{x}{3}+\cdots=0.$$

Dato un numero positivo k, cerchiamo finalmente se possa esistere uno sviluppo dello zero dato da una serie (7) in cui k sia la caratteristica del sistema c_n dei coefficienti. Sia $m-1$ il massimo intero contenuto in k; i punti $x=0,1,\dots m-1$ non apparterranno allora al campo di convergenza della (7), e quindi si potranno fissare arbitrariamente le $b_0, b_1,\dots b_{m-1}$, mentre saranno nulle le b_n per $n\geq m$. Ne viene dalle (5),

$$c_n=(-1)^n\left(b_0-n\,b_1+\binom{n}{2}b_2-\cdots+(-1)^{m-1}\binom{n}{m-1}b_{m-1}\right).$$

La serie (7) formata con questi coefficienti essendo una combinazione lineare a coefficienti costanti delle m serie

$$(8)\qquad \sigma_r(x)=\sum_{n=r}^{\infty}(-1)^n\binom{n}{r}\binom{x}{n},\qquad (r=0,1,\dots m-1),$$

dove i coefficienti hanno per caratteristica r, ne viene che k deve essere uguale precisamente ad $m-1$, cioè ad un numero intero. Di più, si verifica che ognuna delle serie $\sigma_r(x)$ rappresenta effettivamente lo zero per $R(x)>r$,

[1] V. p. es. Bendixson, Mem. cit., pag. 7.

poichè si ha immediatamente

$$\sigma_r(x) = (-1)^r \binom{x}{r} \sigma_0(x-r) \ (^1).$$

Esistono dunque, per ogni intero $m-1$, infinite serie (7) convergenti uniformemente ed assolutamente e rappresentanti lo zero per ogni $R(x) > m-1$; queste serie sono combinazioni lineari

$$(9) \qquad b_0\,\sigma_0(x) + b_1\,\sigma_1(x) + \cdots + b_{m-1}\,\sigma_{m-1}(x),$$

a coefficienti $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ arbitrarî, delle serie (8).

Non può esistere uno sviluppo dello zero avente $R(x) > m-1$ per campo di convergenza che non sia della forma (9); abbiasi infatti un tale sviluppo

$$\bar{\sigma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \binom{x}{n};$$

deve essere intanto

$$c'_0 + n\,c'_1 + \binom{n}{2} c'_2 + \cdots + c'_n = 0 \quad \text{per } n \geq m;$$

posto poi

$$b'_0 = c'_0,\ b'_1 = c'_0 + c'_1, \ldots b'_{m-1} = c'_0 + m\,c'_1 + \binom{m}{2} c'_2 + \cdots + c'_{m-1},$$

si vede subito che la serie

$$b'_0\,\sigma_0(x) - b'_1\,\sigma_1(x) + \cdots + (-1)^{m-1}\,b'_{m-1}\,\sigma_{m-1}(x)$$

coincide colla $\bar{\sigma}(x)$ in tutti i suoi coefficienti.

Risulta da quanto precede che se una funzione $\psi(x)$ ammette uno sviluppo $s(x)$ in serie di fattoriali col campo di convergenza $R(x) > a$, essa non ne ammette altri convergenti in quel campo se è $a < 0$, mentre se è $a \geq 0$, essa ammette nel campo medesimo lo sviluppo più generale

$$(10) \qquad s_1(x) = s(x) + b_0\,\sigma_0(x) + b_1\,\sigma_1(x) + \cdots b_{m-1}\,\sigma_{m-1}(x),$$

essendo $m-1$ il massimo intero contenuto in a; e se m' è un intero maggiore di $m-1$, ammette nel campo $R(x) > m'$ lo sviluppo

$$s_2(x) = s_1(x) + b_m\,\sigma_m(x) + b_{m+1}\,\sigma_{m+1}(x) + \cdots + b_{m'}\,\sigma_{m'}(x):$$

le $b_0, b_1, \ldots b_{m'}$ essendo costanti arbitrarie.

Infine, se una funzione uniforme o un ramo uniforme di funzione $\psi(x)$ ha significato per tutto il semipiano $R(x) \geq 0$, ma è rappresentata da una

(1) Per i punti $0, 1, \ldots r-1, r$ posti fuori o al contorno del campo di convergenza la $\sigma_r(x)$ ha rispettivamente i valori $0, 0, \ldots 0, (-1)^r$.

serie $s(x)$ di fattoriali solo nel campo $R(x) > a > 0$, si potrà, considerando la serie (10) $s_1(x)$ più generale che rappresenta la funzione stessa in quel campo, giovarsi dell'indeterminazione delle costanti $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$, per fare in modo che i valori assunti da $s_1(x)$ nei punti $0, 1, \ldots m-1$, sebbene fuori del campo di convergenza della $s_1(x)$ stessa, coincidano coi valori $\psi(0), \psi(1), \ldots \psi(m-1)$ della funzione; basta evidentemente fare

$$b_r = (-1)^r (\psi(r) - s(r)) \ , \ r = 0, 1, 2, \ldots m-1 \, .$$

4. Accanto ad una serie di fattoriali

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}$$

si consideri la serie di potenze $\varphi(t)$ di t^{-1}, formata colla stessa successione di coefficienti, in modo che a $t^{-(n+1)}$ sia dato il coefficiente di $\binom{x}{n}$. La successione c_n avendo per caratteristica un numero k che non è l'infinito positivo, la serie $\varphi(t)$ convergerà fuori di un cerchio $t = 0$ e di raggio generalmente uguale all'unità, ma che nel caso di $k = -\infty$ potrà anche essere minore. Diremo che la serie $\varphi(t)$ ammette la caratteristica k.

Fra le due serie $s(x)$, $\varphi(t)$, si viene in tal modo a stabilire una corrispondenza che si indicherà mediante la scrittura

$$s(x) = A(\varphi(t)) \, ,$$

dove il simbolo A sta a rappresentare un'operazione, manifestamente distributiva, che può venire applicata formalmente ad ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum \frac{c_n}{t^{n+1}} \, ,$$

ed il cui risultato ha significato, se la caratteristica di c_n è k, per $R(x) > k$. Si aggiungerà l'ipotesi che l'operazione A dia come risultato lo zero qualora venga applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t.

Per l'operazione A si verificano immediatamente le due seguenti proprietà:

Se $\varphi'(t)$ è la derivata di $\varphi(t)$, si ha, per $R(x) > k+1$:

$$A(\varphi') = -x\, s(x-1) \, ; \tag{11}$$

si ha inoltre:

$$A((1+t)\,\varphi(t)) = s(x+1) \, . \tag{12}$$

5. Si tratta ora di dare un'espressione analitica effettiva per l'operazione A. Cominceremo coll'esaminare il caso di $k < -1$, in cui l'espressione di A si troverà senza difficoltà. Infatti, in questo caso, $\varphi(t)$ è assolu-

tamente ed uniformemente convergente lungo la circonferenza di centro $t=0$ e di raggio 1; pertanto nell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)(1+t)^x\, dt, \quad R(x)>0, \tag{13}$$

esteso a questa circonferenza, l'integrazione si può eseguire termine a termine e come risultato si ottiene immediatamente la serie $s(x)$. Onde:

Per le serie $\varphi(t)$ aventi una caratteristica minore di -1, l'operazione $A(\varphi)$ è, per $R(x)>0$, rappresentata dall'integrale definito (13).

La (13), applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t, dà zero come risultato.

Le serie $\varphi(t)$ per le quali si realizza in tal modo l'operazione A, formano un insieme lineare, cui si può aggiungere un numero arbitrario di potenze intere positive di t, ed anche una serie di potenze intere positive di t purchè convergente in un cerchio di centro $t=0$ e di raggio maggiore d'uno. Per queste serie $\varphi(t)$, si verifica immediatamente che l'operazione A, espressa per $R(x)>0$ da

$$A(\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)(1+t)^x\, dt, \tag{14}$$

soddisfa alle relazioni (11) e (12), la prima sotto la condizione $R(x)>1$, la seconda per $R(x)>0$.

6. Conviene ora ricercare se, anche per il caso in cui sia $k \geq -1$, sia possibile una rappresentazione analitica per l'operazione A. A tale uopo ci servirà un principio che, sebbene abbia già trovate numerose applicazioni in varî campi dell'analisi, non pare sia stato ancora enunciato nella sua generalità. Questo principio è il seguente:

Siano A, K due operazioni univocamente definite per gli elementi di un insieme C; sia G la trasformata di K mediante A. Se φ appartiene a C, e vi appartiene anche $K(\varphi)$, si avrà per definizione

$$AK(\varphi)=GA(\varphi),$$

onde

$$G^{-1}AK=A. \tag{15}$$

Supponiamo ora che φ appartenga ad un campo C′ che comprende C, ma non necessariamente a C stesso; che K sia applicabile a φ, e che $K(\varphi)$ appartenga a C. Sotto questa ipotesi, il primo membro della (15) si potrà assumere come definizione dell'operazione A per gli elementi dell'insieme più esteso C′, e si verificherà in generale che l'operazione A, così estesa, mantiene nel nuovo campo le sue proprietà formali.

Il principio ora enunciato è quello che viene applicato in sostanza nella continuazione analitica secondo il Weierstrass; nel classico teorema di Mittag-Leffler per la costruzione di una funzione uniforme con date singolarità; nella sommabilità delle serie secondo il Borel e nei varî tentativi fatti per l'interpretazione delle serie divergenti; nell'integrazione finita, data dal Guichard, di una funzione trascendente intera, ecc. Di questo principio ci gioveremo ora per ottenere l'espressione analitica dell'operazione A per tutte le serie $\varphi(t)$ appartenenti a caratteristica finita.

7. Da ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n+1}}$$

si può dedurre la serie

$$K_m(\varphi) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)\,t^{n+1}};$$

questa deduzione è fatta mediante un'operazione distributiva che diremo K_m, la quale non è altro che la $D^{-m}\frac{1}{t^m}\varphi$, dove D è il simbolo di derivazione, quando si facciano nulle le costanti introdotte dall'integrazione. L'operazione K_m ha evidentemente la proprietà di diminuire di m unità la caratteristica cui appartiene φ; se φ ha la caratteristica k, $K_m(\varphi)$ avrà la caratteristica $k-m$.

Sia φ una tale serie di potenze che le sia applicabile l'operazione A definita al § 4; essa operazione sarà a fortiori applicabile alla serie $K_m(\varphi)$: si vuole vedere quale sia la trasformata di K_m mediante A. Usando, a questo uopo, i soliti simboli del calcolo delle differenze finite Δ e θ [1], si deduce dalla proprietà (12) della A, che se $A(\varphi) = s(x)$, sarà:

$$A(t\varphi(t)) = \Delta\, s(x), \quad A(t^{-1}\varphi(t)) = \Delta^{-1} s(x),$$

e dalla (11), che

$$AD^{-1}\varphi(t) = -\frac{1}{x+1}\,\theta\, s(x).$$

Ne viene

$$AD^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right) = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}\,\theta^m \Delta^{-m} s(x)$$

e quindi la trasformata G_m di K_m mediante A è

$$G_m = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}\,\theta^m \Delta^{-m},$$

[1] $\Delta\psi(x) = \psi(x+1) - \psi(x)$; $\theta\psi(x) = \psi(x+1)$; Δ^{-1} è l'operazione d'integrazione finita, o inversa di Δ.

onde

$$G_m^{-1} = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}.$$

Con ciò, la (15) ci dà

$$A = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m} AK_m. \tag{16}$$

Ora, se $\varphi(t)$ è una serie di caratteristica minore di -1, le si può applicare, per $R(x) > 0$, l'operazione A rappresentata dall'integrale definito (14), e la (16) non è altro che una semplice identità. Invece, se $\varphi(t)$ ha una caratteristica $k \geq -1$, sia $m-2$ il massimo intero contenuto in k; la serie $K_m(\varphi)$ avrà per caratteristica un numero minore di -1 e le sarà quindi applicabile per $R(x) > 0$ l'operazione A sotto forma d'integrale definito, ottenendosi

$$AK_m\,\varphi = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \binom{x}{n};$$

da cui

$$(-1)^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m} AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n+m},$$

e infine, poichè $\Delta \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$:

$$(-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m} AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}.$$

L'operazione A definita dalla (16), cioè data, per $R(x) > m$, da

$$A(\varphi) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1) \int_{(1)} D^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right)(1+t)^{x-m}\,dt, \tag{17}$$

coincide dunque coll'operazione A definita in principio del § 4 per ogni serie $\varphi(t)$ avente caratteristica k finita, e quindi per ogni tale serie l'operazione A ivi definita ammette l'espressione analitica (17), dove m è il massimo intero contenuto in k aumentato di 2, se è $k \geq -1$, ed è zero se è $k < -1$.

In questo modo, ad ogni serie di fattoriali $s(x)$ della prima o della seconda classe corrisponde una funzione analitica $\varphi(t)$ regolare nell'intorno di $t = \infty$, che si costruisce immediatamente e mediante la quale si ha l'espressione analitica (17) della $s(x)$.

È facile vedere che a $\varphi(t) = (1+t)^{-m}$ per un intero positivo, la (17) fa corrispondere gli sviluppi dello zero già ottenuto per altra via al § 3.

Ad ogni proprietà di carattere lineare della $\varphi(t)$, le relazioni (11) e (12) cui soddisfa l'operazione A fanno corrispondere proprietà pure di carattere lineare per la $s(x)$. Di questa corrispondenza, della sua applicazione alle equazioni alle differenze, come pure del significato da attribuire alle serie $s(x)$ della terza classe, tratterò in una prossima Nota.

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota II di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

6. Facendo seguito alla Nota pubblicata col medesimo titolo nel fascicolo precedente dei Rendiconti di questa R. Accademia, osserveremo che *il calcolo della funzione* θ, *che ci dà, eguagliata ad una costante, tutte le traiettorie del punto, richiede,* come risulta dalle formole (8) e (9), *due sole quadrature.* È un risultato che dovevamo attenderci, appena si fosse osservato quali sono le superficie per cui il problema delle geodetiche equivale a quello delle traiettorie nel nostro movimento piano. L'elemento lineare di queste superficie è dato, come è noto, da

$$ds^2 = 2\mathrm{U}\,(dx^2 + dy^2)\,;$$

calcolandone la curvatura totale K, si trova

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{2\mathrm{U}}\,\varDelta_2 \lg \mathrm{U} = 0\,.$$

Il problema di movimento che abbiamo studiato nel piano equivale dunque alla ricerca delle geodetiche sopra una superficie sviluppabile: ora si sa appunto che sopra una tale superficie le geodetiche si ottengono con due quadrature.

A completare la risoluzione del problema meccanico manca il calcolo del tempo. A questo riguardo il metodo di Jacobi non si può più, nel caso attuale, applicare. Ed invero si dovrebbe, secondo Jacobi, calcolare la derivata di θ rispetto ad h (cost. delle forze vive) supposto di averla lasciata indeterminata in θ, ed il tempo verrebbe allora dato da

$$t_0 - t = \frac{\partial\theta}{\partial h}\,.$$

Ma siccome noi abbiamo posto fin dal principio $h = 0$, così in θ il parametro h non figura affatto. Ad ogni modo per avere il tempo non vi sarà che da eseguire una quadratura, dal momento che si conoscono tutte le traiettorie.

7. Applicheremo la teoria precedente allo studio del moto di un punto attratto (o respinto) da un centro fisso. Bisognerà anzitutto vedere quale sia la forma della funzione potenziale nel caso da noi considerato, in cui le traiettorie del punto si possono distribuire in infiniti sistemi ortogonali isotermi.

Poichè nell'ipotesi delle forze centrali la funzione potenziale dipende soltanto dalla distanza del punto mobile dal punto fisso, indicando con r

questa distanza, e posto

$$U = f(r),$$

occorrerà determinare $f(r)$ in modo che si abbia

$$\Delta_2 \lg f(r) = 0\,,$$

equazione che sviluppata diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} \lg f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \lg f(r) = 0\,.$$

Da questa con una prima integrazione otteniamo

$$\frac{d}{dr} \lg f(r) = \frac{c}{r}\,,$$

ed integrando una seconda volta si ha

$$U = f(r) = Cr^c: \tag{12}$$

c e C sono due costanti arbitrarie.

La forza applicata sarebbe poi di intensità

$$F = Ccr^{c-1}\,.$$

Adunque: *nel moto di un punto soggetto a forze centrali si potranno distribuire le traiettorie in infiniti sistemi ortogonali* (*isotermi*) *quando la funzione potenziale* (*e quindi anche la forza applicata*) *è proporzionale ad una potenza, del resto qualunque, della distanza del punto mobile dal punto fisso.*

Troviamo ora l'equazione in termini finiti delle traiettorie. Si ha dalla (12):

$$\frac{\partial \lg U}{\partial x} = \frac{cx}{r^2}\,, \quad \frac{\partial \lg U}{\partial y} = \frac{cy}{r^2}\,,$$

onde

$$\int \left(\frac{\partial \lg U}{\partial x} dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y} dx \right) = c \int \frac{xdy - ydx}{r^2} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,,$$

e quindi le (8) diventano:

$$\theta_1 = K\, r^{k-1} \operatorname{sen} \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\}$$

$$\theta_2 = K\, r^{k-1} \cos \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\},$$

avendo posto

$$c = 2(k-1)\;,\quad \sqrt{2C} = K\,. \tag{13}$$

Per ottenere θ converrà riferirsi a coordinate polari, assumendo

$$x = r\cos\omega\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\omega\,,$$

ed in conseguenza

$$dx = \cos\omega\, dr - r\,\mathrm{sen}\,\omega\, d\omega\,, \qquad dy = \mathrm{sen}\,\omega\, dr + r\cos\omega\, d\omega\,;$$

per cui si avrà

$$\theta = \mathrm{K}\int r^{k-1}\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,dr + r\cos(a+k\omega)\,d\omega\}\,. \tag{14}$$

8. Supponiamo dapprima $k \neq 0$. Eseguendo la quadratura nella (14) abbiamo

$$\theta = \frac{\mathrm{K}}{k}\, r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,;$$

l'equazione delle traiettorie $\theta =$ cost. diventa dunque

$$r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega) = b\,, \tag{15}$$

dove a e b sono costanti arbitrarie (cioè variano da una traiettoria all'altra), mentre k è fissa per tutte queste curve, potendo però avere un valore qualunque diverso da zero.

Accanto all'equazione (15) delle traiettorie scriviamo anche le espressioni della funzione potenziale e della forza, sostituendo, mediante le (13), la costante k a c:

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}\, r^{2(k-1)}\,, \qquad \mathrm{F} = 2\mathrm{C}\,(k-1)\, r^{2k-3}\,.$$

Per avere infine il tempo si ricorrerà all'integrale delle forze vive

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U}\,,$$

che si scrive, nel caso attuale,

$$\frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} = 2\mathrm{C}\, r^{2(k-1)}\,.$$

Questa equazione si può trasformare, mediante la (15), in una relazione fra dt, $d\omega$, ω, oppure fra dt, dr, r, e così si ottiene il tempo con una sola quadratura dall'una o dall'altra delle seguenti due formole:

$$dt = \frac{m\, d\omega}{\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\}^{\frac{2}{k}}} = \frac{nr\, dr}{\sqrt{r^{2k} - b^2}}$$

dove m e n contengono la costante arbitraria b.

Suppongasi, ad es., $k = \frac{1}{2}$; la funzione potenziale diventa

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{C}}{r}\,,$$

e siamo nel caso dell'attrazione Newtoniana. Le traiettorie hanno per equazione

$$\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,(a+\frac{\omega}{2})=b\,,$$

ovvero

$$r=\frac{2\,b^2}{1-\cos(2\,a+\omega)}$$

e sono parabole col fuoco nel punto attraente, come dovevamo attenderci. Si ha pure il significato delle costanti a e b: quest'ultima determina il parametro delle varie parabole, mentre la prima definisce l'inclinazione del loro asse sull'asse polare.

Questo esempio ci ha così condotti a trovare un sistema ortogonale isotermo composto di sole parabole: esso è formato di tutte le parabole aventi lo stesso fuoco e lo stesso asse; quelle dell'una famiglia volgono tutte la concavità da una stessa parte, quelle dell'altra famiglia volgono la concavità dalla parte opposta. Facendo poi rotare tutto il sistema di un giro completo intorno al fuoco, si avranno tutte le traiettorie di un punto attratto (o respinto) da un punto fisso colla legge di Newton, quando la costante delle forze vive sia nulla.

9. Consideriamo da ultimo il caso in cui sia $k=0$. La (14) allora diventa

$$\theta=\mathrm{K}\int\frac{1}{r}(\mathrm{sen}\,a\,dr+r\cos a\,d\omega)\,,$$

e integrando, si ha come equazione delle traiettorie $\theta=\mathrm{cost.}$:

$$\mathrm{sen}\,a\lg r+\omega\cos a=b\,,$$

ovvero

$$r=e^{\frac{b}{\mathrm{sen}\,a}}\,e^{-\omega\,\mathrm{cotg}\,a}.$$

Esse sono dunque spirali logaritmiche, e se ne ottiene un sistema isotermo tenendo fissa la costante a e facendo variare b. Le curve di questo sistema sono tutte eguali fra di loro, e quelle di una medesima famiglia non differiscono l'una dall'altra che per una rotazione intorno al polo. Fra gli altri sistemi isotermi si avrà pure quello formato dalle rette per il polo $(a=0)$ e dalle circonferenze col centro in questo medesimo punto $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$.

La funzione potenziale e la forza in questo movimento sono

$$\mathrm{U}=\frac{\mathrm{C}}{r^2}\,,\quad \mathrm{F}=-\frac{2\mathrm{C}}{r^3}\,,$$

e il tempo è dato da

$$t - t_0 = M\,(e^{-2\omega \operatorname{cotg} a} - e^{-2\omega_0 \operatorname{cotg} a}) = N\,(r^2 - r_0^2)\,,$$

dove s'è posto

$$M = -N\,e^{\frac{2b}{\operatorname{sen} a}}\,,\quad N = \frac{1}{2\sqrt{2C}\cos a}$$

e quindi M e N dipendono la prima dai parametri a e b, la seconda soltanto da a.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite a Roma (S. Pietro in Vincoli), a M. Cimino ed a M. Peglia negli anni 1900 e 1901.* Nota del prof. V. Reina, presentata dal Socio A. Ferrero.

In alcune Note, inserite nei Rendiconti di questa Accademia, venne già reso conto delle operazioni astronomiche eseguite sui punti trigonometrici di primo ordine circostanti a Roma, allo scopo di determinarvi l'attrazione locale. I risultati conseguiti mi indussero ad estendere la ricerca ai punti della rete trigonometrica che cadono in prossimità del meridiano di Roma, per determinare il profilo del Geoide lungo il meridiano stesso.

La necessità di trasportare gli strumenti in punti sempre più lontani, e di difficile accesso, mi persuase a semplificare quanto più fosse possibile i procedimenti di osservazione, ed in particolare a ricercare se il metodo di determinazione della latitudine colla misura delle distanze zenitali meridiane di stelle fondamentali culminanti a Nord ed a Sud dello zenit, non potesse venire vantaggiosamente sostituito a quello precedentemente impiegato, delle osservazioni circummeridiane. Oltre ad una grande riduzione nei calcoli, ne sarebbe conseguita una notevole semplificazione nell'impianto della stazione, potendo sopprimere l'uso del cronografo.

Nell'ottobre e novembre 1900 tale metodo venne perciò assoggettato ad un esame dettagliato e minuto nella Specola di S. Pietro in Vincoli, risultandone in me la convinzione che esso sia da preferirsi a quello classico delle osservazioni circummeridiane, quando venga usato colle dovute avvertenze e cautele. In tale occasione venne anche effettuata una determinazione dell'azimut di M. Mario rispetto alla Specola.

Nel luglio ed agosto 1901 si eseguirono le due stazioni di M. Cimino e M. Peglia, che si presentano successivamente lungo il meridiano al nord di M. Soratte. A M. Peglia, come nuovo controllo del metodo dei passaggi meridiani, la latitudine venne determinata anche con osservazioni circummeridiane.

Nell'effettuare i calcoli relativi alle tre stazioni, alle posizioni apparenti delle stelle osservate vennero applicate le « correzioni provvisorie » di Auwers. I risultati di tali calcoli sono qui riassunti.

Stazione a Roma (S. Pietro in Vincoli).

Latitudine (risultante da 240 osservazioni meridiane di 40 stelle)

$\varphi = 41°. 53'. 35''. 37 \pm 0''\ 08$ (Epoca 1900. 85)

Azimut della direzione S. Pietro in Vincoli - M. Mario (media di 96 determinazioni)

$A = 315°. 20'. 19''. 42 \pm 0''. 17$ (Epoca 1900. 82)

$dA = + 0{,}33\ d\alpha^s - 0{,}01\ d\delta'' - 0{,}01\ d\varphi''$

Stazione a M. Cimino.

Latitudine (risultante da 246 osservazioni meridiane di 50 stelle)

$\varphi = 42°. 24'. 31''. 09 \pm 0'', 06$ (Epoca 1901. 54)

Azimut della direzione M. Cimino - M. Soratte (media di 72 determinazioni)

$A = 125°. 53'. 57''. 49 \pm 0''. 27$ (Epoca 1901. 53)

$dA = - 0{,}02\ d\alpha^s - 1{,}18\ d\delta'' + 0{,}02\ d\varphi''$

Stazione a M. Peglia.

Latitudine (risultante da 193 osservazioni meridiane di 60 stelle, e da 65 doppie osservazioni circummeridiane)

$\varphi = 42°. 49'. 09''. 36 \pm 0''. 06$ (Epoca 1901. 58)

Azimut della direzione M. Peglia - M. Cimino (media di 72 determinazioni)

$A = 180°. 51'. 52''. 36 \pm 0''. 25$ (Epoca 1901. 57)

$dA = + 0{,}06\ d\alpha^s - 1{,}08\ d\delta'' + 0{,}02\ d\varphi''$

Se si applicano le correzioni di Auwers anche alle determinazioni astronomiche fatte negli anni precedenti (valendosi delle espressioni differenziali che, nelle precedenti pubblicazioni, vennero registrate di fianco ai singoli risultati), e si mettono a raffronto le coordinate astronomiche con quelle geodetiche, ordinando tutto per latitudini crescenti, si ottiene il seguente specchio:

STAZIONE	Latitudine astronomica φ_a	geodetica φ_g	Azimut astronomico A_a	geodetico A_g	φ_a-φ_g	A_a-A_g	Epoca
M. Pisarello	41°.28′.36″.03	36″.24	15°.28′.57″.07	58″.96	—0″.21	—1″.89	1899.5
M. Cavo.	41. 45. 03. 42	2. 12	. . . .	. .	+1. 30	. .	1898.5
Fiumicino.	41. 46. 14. 59	12. 86	47. 29. 36. 67	38. 57	+1. 73	—1. 90	1898.6
S. Pietro in Vincoli.	41. 53. 35. 37	33. 39	315. 20. 19. 42	21. 11	+1. 98	—1. 69	1900.8
M. Mario	41. 55. 26. 25	24. 38	131. 50. 32. 29	33. 08	+1. 87	—0. 79	1898.3
M. Soratte	42. 14. 46. 38	40. 76	186. 36. 58. 56	61. 48	+5. 62	—2. 92	1900.5
M. Cimino	42. 24. 31. 09	24. 75	125. 53. 57. 49	59. 72	+6. 34	—2. 23	1901.5
M. Peglia.	42. 49. 09. 36	2. 73	180. 51. 52. 36	54. 34	+6. 63	—1. 98	1901.6

Le coordinate geodetiche, calcolate dall' Istituto Geografico Militare, provengono dal segnale trigonometrico di Castanea. L'ellissoide di riferimento ha le dimensioni di Bessel.

Per rendere fra loro confrontabili le deviazioni in latitudine ed azimut determinate in corrispondenza ad epoche diverse, converrebbe ancora ridurle alla posizione media del Polo. Ma ciò non si può fare per le determinazioni posteriori alla fine del 1899, ancora non essendo stato pubblicato dal *Centralbureau der Internationalen Erdmessung* il relativo rapporto cogli elementi di riduzione. Il precedente specchio basta però per mostrare qual è l'andamento generale della verticale. Mentre la deviazione in azimut si conserva pressochè costante, la deviazione in latitudine va aumentando, procedendo verso il Nord, rivelando una progressiva depressione del Geoide al di sotto dell' ellissoide di riferimento.

È mia intenzione, nella prossima stagione estiva, spingendomi ancora al Nord, di eseguire le stazioni di Alta S. Egidio (Toscana), M. Carpegna (Marche) e Bertinoro (Romagna), e di pervenire quindi alla valle del Po, superando l'Appennino.

La redazione di un lavoro completo e dettagliato, che renda conto del complesso delle operazioni eseguite lungo il meridiano di Roma, si rimetterà all'epoca in cui saranno compiuti i calcoli relativi alle nuove stazioni.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota II del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In una Nota precedente [1] ho stabilita l' equazione simbolica dei lavori virtuali relativa a una catena di corpi rigidi, fissati, almeno per un punto, il primo al terreno e gli altri ciascuno al precedente: ora, applicando i risultati ottenuti, mi propongo di studiare il caso particolare di due corpi soli, cercando specialmente di trarre quelle conseguenze che possono avere appli-

[1] V. seduta del 4 maggio, pag. 380.

cazione nella teoria matematica degli strumenti sismici. — Per ciò che riguarda il significato delle lettere e dei simboli che verranno usati in appresso, mi riferisco senz' altro al lavoro testè citato.

6. Dalla equazione (8) si ricava per il caso attuale l' equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\,(\mathrm{H}_r\,\delta\lambda_r+\mathrm{K}_r\,\delta\mu_r+\mathrm{L}_r\,\delta\nu_r)=0\,, \tag{9}$$

essendo (vedi le equazioni (E) (E') a pag. 385).

$$(G)\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{H}_1&=\sum_{\mathrm{C}_1}{}_i(\eta_{1i}-\eta_{10})(Z_{1i}-m_{1i}\zeta''_{1i})+(\eta_{11}-\eta_{10})\sum_{\mathrm{C}_2}{}_i(Z_{2i}-m_{2i}\zeta''_{2i})\\&\quad-\sum_{\mathrm{C}_1}{}_i(\zeta_{1i}-\zeta_{10})(H_{1i}-m_{1i}\eta''_{1i})-(\zeta_{11}-\zeta_{10})\sum_{\mathrm{C}_2}{}_i(H_{2i}-m_{2i}\eta''_{2i}),\ \text{etc.}\\\mathrm{H}_2&=\sum_{\mathrm{C}_2}{}_i(\eta_{2i}-\eta_{20})(Z_{2i}-m_{2i}\zeta''_{2i})-\sum_{\mathrm{C}_2}{}_i(\zeta_{2i}-\zeta_{20})(H_{2i}-m_{2i}\eta''_{2i}),\ \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Come fu già osservato, queste equazioni valgono qualunque siano le forze, qualunque sia l' ordine di grandezza delle traslazioni ξ, η, ζ, e comunque siano orientati i varî sistemi di assi, purchè tutti rispettivamente paralleli nel caso di rotazioni nulle.

Supponiamo ora:

1° che nei punti $\mathrm{P}_{r1}(a_r\,b_r\,c_r)$ siano applicate delle forze *infinitesime* di componenti Ξ_{r1}, H_{r1}, Z_{r1}; nei baricentri $\mathrm{P}_{r2}(x_{r2}, y_{r2}, z_{r2})$ delle forze *finite* di componenti Ξ_{r2}, H_{r2}, Z_{r2}; e intorno alle origini P_{r0} due coppie di momento infinitesimo, alle quali potremo sempre sostituire due sistemi di forze eguali ed opposte, applicate nei punti opposti $\pm x_{r3}$, $\pm y_{r3}$, $\pm z_{r3}$, di componenti $\pm \Xi_{r3}$, $\pm H_{r3}$, $\pm Z_{r3}$;

2° che le accelerazioni traslatorie ξ'', η'', ζ'' siano dell' ordine di grandezza delle rotazioni, cioè infinitesime;

3° che gli assi fissi nei corpi siano rispettivamente paralleli ai loro assi principali d' inerzia, e di più uno d' essi passi per il rispettivo baricentro: cosicchè valgono le identità

$$\sum_{\mathrm{C}_r}{}_i\, m_{ri}\, x_{ri}\, y_{ri}=0\,,\ \text{etc.} \tag{H}$$

Allora, ricordando le (1'), (1''), (1'''), facendo le posizioni

$$\mathrm{M}_r^{(x)}=\sum_{\mathrm{C}_r}{}_i\, m_{ri}\,(y_{ri}^2+z_{ri}^2),\ \text{etc.}, \tag{K}$$

e trascurando tutti i termini di secondo grado nelle quantità infinitesime, le (G) dànno:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_1 = {} & b_1 (Z_{11} + Z_{21} + Z_{22} - \pi_1 H_{22}) - c_1 (H_{11} + H_{21} + H_{22} + \pi_1 Z_{22}) \\
& + Z_{12} (y_{12} + \varrho_1 x_{12} - \pi_1 z_{12}) - H_{12} (z_{12} + \pi_1 y_{12} - \chi_1 x_{12}) \\
& + a_1 (\varrho_1 Z_{22} + \chi_1 H_{22}) + 2 Z_{13} y_{13} - 2 H_{13} z_{13} - \pi_1'' \mathrm{M}_1^{(x)} \\
& + \mathrm{M}_2 (\eta'' + \varrho_1'' a_1 - \pi_1'' c_1 + \varrho_2'' x_{22} - \pi_2'' z_{22}) + \eta'' z_{12} \mathrm{M}_1 \\
& - \mathrm{M}_2 (\zeta'' - \chi_1'' a_1 + \pi_1'' b_1 - \chi_2'' x_{22} + \pi_2'' y_{22}) - \zeta'' y_{12} \mathrm{M}_1 , \text{ etc.} \\
\mathrm{H}_2 = {} & Z_{21} b_2 - H_{21} c_2 + Z_{22} (y_{22} + \varrho_2 x_{22} - \pi_2 z_{22}) - H_{22} (z_{22} + \pi_2 y_{22} - \chi_2 x_{22}) \\
& + 2 Z_{23} y_{23} - 2 H_{23} z_{23} \\
& - \pi_2'' \mathrm{M}_2^{(x)} + \mathrm{M}_2 [z_{22} (\eta'' + \varrho_1'' a_1 - \pi_1'' c_1) - y_{22} (\zeta'' + \pi_1'' b_1 - \chi_1'' a_1)] \text{ etc.}
\end{aligned}$$

$$(\mathrm{G}_1)$$

7. Si tratti ora di due pendoli sferici, cosicchè il sistema ammette 6 gradi di libertà. Questi siano sospesi in modo che gli assi delle z_r passino per i punti P_{r1} e per i baricentri P_{r2}; cioè sia

$$\left.\begin{array}{l} a_r = b_r = 0 ; \\ x_{r2} = y_{r2} = 0 ; \quad z_{r2} = l_r \end{array}\right\} (r = 1, 2).$$

Le forze applicate nei baricentri siano appunto i pesi dei due pendoli, cosicchè le loro componenti secondo gli assi fissi sono:

$$\Xi_{r2} = H_{r2} = 0 , \ Z_{r2} = \mathrm{M}_r g ,$$

supponendo l'asse delle ζ diretto secondo la gravità.

Le coppie intorno ai punti di sospensione agiscano costantemente in un piano normale agli assi delle z_r, cosicchè si possono sostituire a ciascuna d'esse due forze d'intensità $\pm \tau_r$ parallele agli assi delle x_r e applicate in due punti dell'asse delle y_r distanti dall'origine per l'unità di lunghezza. Notando che queste forze sono infinitesime e quindi differiscono per quantità trascurabili dalle loro componenti secondo gli assi fissi, queste ipotesi si esprimono mediante le identità:

$$\begin{array}{ll} x_{r3} = z_{r3} = 0 & , \quad y_{r3} = \pm 1 \\ \Xi_{r3} = \pm \tau_r & , \quad H_{r3} = Z_{r3} = 0 . \end{array}$$

Poniamo infine per semplicità

$$\Xi_{r1} = f_r \quad , \quad H_{r1} = \varphi_r .$$

Allora, ferme restando tutte le ipotesi restrittive fin qui enunciate, dalle (G_1) si arriva alle

$$(\mathrm{G}_2) \left\{ \begin{aligned}
- \mathrm{H}_1 = {} & - \eta'' (\mathrm{M}_1 l_1 + \mathrm{M}_2 c_1) + \pi_1'' (\mathrm{M}_2 c_1^2 + \mathrm{M}_1^{(x)}) + \pi_2'' \mathrm{M}_2 l_2 c_1 + \\
& + \pi_1 g (\mathrm{M}_2 c_1 + \mathrm{M}_1 l_1) + c_1 (\varphi_1 + \varphi_2) \\
- \mathrm{K}_1 = {} & + \xi'' (\mathrm{M}_1 l_1 + \mathrm{M}_2 c_1) + \chi_1'' (\mathrm{M}_2 c_1^2 + \mathrm{M}_1^{(y)}) + \chi_2'' \mathrm{M}_2 l_2 c_1 + \\
& + \chi_1 g (\mathrm{M}_2 c_1 + \mathrm{M}_1 l_1) - c_1 (f_1 + f_2) \\
- \mathrm{L}_1 = {} & \varrho_1'' \mathrm{M}_1^{(z)} + 2 \tau_1
\end{aligned} \right.$$

$$(G_2')\begin{cases} -H_2 = -\eta'' M_2 l_2 + \pi_1'' M_2 l_2 c_1 + \pi_2'' M_2^{(x)} + \pi_2 g M_2 l_2 + c_2 \varphi_2 \\ -K_2 = +\xi'' M_2 l_2 + \chi_1'' M_2 l_2 c_1 + \chi_2'' M_2^{(y)} + \chi_2 g M_2 l_2 - c_2 f_2 \\ -L_2 = \varrho_2'' M_2^{(z)} + 2\tau_2 \end{cases}$$

8. Queste equazioni valgono qualunque siano le masse e le dimensioni dei due corpi. Supponiamo ora che il primo si riduca a un filo flessibile e inestendibile, di massa trascurabile rispetto a quella del secondo, di lunghezza c_1 e con gli estremi nei punti P_{10}, P_{11}. Tali ipotesi si esprimono sopprimendo nelle (G_2) tutti i termini contenenti la massa o i momenti d'inerzia del corpo C_1. Così appunto facendo, osservando che la natura dei legami consente il massimo grado di libertà, sostituendo a π_r, χ_r, ϱ_r e alle loro derivate i valori ricavati dalle (F), e separando i termini che non dipendono esplicitamente dalle incognite mediante le posizioni:

$$(L)\quad\begin{cases} c_1(\mu_1'' M_2 c_1 + \mu_2'' M_2 l_2 + \mu_1 g M_2 - f_1 - f_2) = c_1 \Phi_1 \\ c_1(\lambda_1'' M_2 c_1 + \lambda_2'' M_2 l_2 + \lambda_1 g M_2 + \varphi_1 + \varphi_2) = c_1 \Psi_1 \end{cases}$$

$$(L')\quad\begin{cases} \mu_1'' M_2 l_2 c_1 + \mu_2'' M_2^{(y)} + \mu_2 M_2 l_2 g - f_2 c_2 = l_2 \Phi_2 \\ \lambda_1'' M_2 l_2 c_1 + \lambda_2'' M_2^{(x)} + \lambda_1 M_2 l_2 g + \varphi_2 c_2 = l_2 \Psi_2 \\ \nu_2'' M_2^{(z)} + 2\tau_2 = X_2\,, \end{cases}$$

si arriva infine alle equazioni effettive del moto:

$$(10)\quad\begin{cases} \xi'' M_2 + \beta'' M_2 (c_1 + l_2) + \beta g M_2 + \Phi_1 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha'' M_2 (c_1 + l_2) + \alpha g M_2 + \Psi_1 = 0 \end{cases} \text{ [1]}$$

$$(10')\quad\begin{cases} \xi'' M_2 + \beta''\left(M_2 c_1 + \dfrac{M_2^{(y)}}{l_2}\right) + \beta g M_2 + \Phi_2 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha''\left(M_2 c_1 + \dfrac{M_2^{(x)}}{l_2}\right) + \alpha g M_2 + \Psi_2 = 0 \\ \gamma'' M_2^{(z)} + X_2 = 0\,. \end{cases}$$

Se in queste equazioni si suppongono note tutte le costanti e si possono determinare in funzione del tempo tutte le variabili (forze — rotazioni apparenti) che compariscono nelle funzioni $\Phi_1, \ldots, X_2$, è facilissimo procedere all'integrazione del sistema. Basta infatti seguire il metodo già da me esposto in un'altra pubblicazione [2], sul quale, appunto per ciò, non mi dilungo.

[1] Come si vede, è omessa a bella posta l'equazione $L_1 = 0$, relativa alla rotazione del primo corpo intorno al proprio asse verticale: infatti tale equazione non ha più significato per un corpo filiforme, quale è appunto C_1.

[2] *Sulla determinazione dei moti sismici*. Nota II; Rendic. d. A. d. Lincei, 17 marzo 1901, pag. 205.

9. Alle condizioni teoriche successivamente enunciate fin qui, si approssimerebbero con sufficiente esattezza gli ordinarî pendoli verticali usati in sismografia, purchè vi si apportassero le seguenti modificazioni:

1° un filo di sospensione abbastanza lungo, rispetto al suo diametro, per poter trascurare la curvatura ch' esso subisce, flettendosi, verso le estremità;

2° una massa pendolare costituente un corpo praticamente rigido [1];

3° un sistema di leve, analoghe a quelle applicate alla massa pendolare, che decomponga, amplifichi e registri anche il movimento dell' estremità inferiore del filo di sospensione.

Un tale strumento infatti, oltre alle condizioni geometriche e cinematiche, può soddisfare anche alle restrizioni imposte alle forze nei nn. 6 e 7, perchè: 1° nell' estremità inferiore del filo (P_{11}) e in un punto P_{21} della massa rigida agiscono le resistenze dovute alle leve scriventi, all' aria e alla *flessione* del filo di sospensione, resistenze piccolissime rispetto al peso dello strumento; 2° nel baricentro (P_{22}) della massa pendolare agisce il suo peso gM_2; 3° intorno all' asse delle z_2 agisce il momento di *torsione* del filo e gli attriti di varia natura che si oppongono alla rotazione del pendolo, tutti piccolissimi rispetto alla gravità.

Dunque il moto dello strumento in occasione di microsismi è retto dalle equazioni (10) e (10′).

Ma si può dimostrare anche che il suo moto apparente permette di risalire alle componenti del moto sismico, cioè che le equazioni (10) e (10′) si possono effettivamente integrare. A tal fine si osservi che le costanti relative alle dimensioni e alla massa dello strumento sono suscettibili d' una determinazione diretta esatta quanto si vuole; e così pure le rotazioni apparenti intorno agli assi orizzontali, le quali sono legate alle traslazioni apparenti (X_1 Y_1) (X_2 Y_2) dei punti P_{11}, P_{21} dalle relazioni

$$\text{(M)} \qquad \begin{aligned} c_1 \lambda_1 &= - Y_1 \quad , & c_1 \mu_1 &= + X_1 ; \\ c_2 \lambda_2 &= -(Y_2 - Y_1) \quad , & c_2 \mu_2 &= +(X_2 - X_1). \end{aligned}$$

Restano a determinare la forma e il valore delle forze f_r, φ_r.

Mi pare molto verosimile l' ipotesi che queste forze si oppongano alle traslazioni *apparenti* dei rispettivi punti d' applicazione e siano nulle quando lo strumento si trova in quiete e in equilibrio: ipotesi espressa dalle egua-

[1] Insisto su questa condizione, perchè gli attuali *pendoli verticali* se ne scostano moltissimo: costituiti, come sono, d' un' asta metallica di sezione piccolissima rispetto alla lunghezza, gravata in basso da una massa enorme, realizzano un sistema eminentemente elastico; cosicchè un urto anche leggero provoca considerevoli oscillazioni trasversali dell' asta. Anche quelli a *sospensione trifilare* hanno l' identico difetto: e le perturbazioni che il moto dei pendoli subisce per tali vibrazioni trasversali rende assolutamente inapplicabili, nella massima parte dei casi, le conclusioni matematiche alle quali sono arrivato.

glianze

$$(N) \qquad f_r = -(p_r X_r + p'_r X'_r) \quad ; \quad \varphi_r = -(q_r Y_r + q'_r Y'_r),$$

con p_r, p'_r, q_r, q'_r costanti (1).

In conseguenza delle (L) (L′) (M) (N) si ricava:

$$(P) \qquad \begin{cases} \Phi_1 = X_1 p_1 + X'_1 p'_1 + X_2 p_2 + X'_2 p_2 + F_1, \text{ etc.} \\ \Phi_2 = \qquad X_2 \frac{p_2 c_2}{l_2} + X'_2 p'_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2, \text{ etc.,} \end{cases}$$

essendo F_1 e F_2 funzioni completamente note del tempo.

Ciò posto si possono determinare sperimentalmente i valori delle p, q, con un procedimento analogo a quello seguito nella Nota testè citata (pag. 207). Infatti se allo strumento si dà un urto quando il terreno è in quiete, le equazioni che reggono il suo moto si riducono a

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0 \quad X_2 = 0.$$

Se per due istanti diversi si possono ottenere dai diagrammi del movimento due sistemi diversi di valori per X_2, X'_2, F_2, questi valori, sostituiti nella equazione $\Phi_2 = 0$, daranno due equazioni lineari non omogenee rispetto alle incognite p_2 e p'_2 (V. le posizioni (P)) e quindi permetteranno in generale (2) di determinare queste incognite. Cercati poi per altri due istanti qualunque i valori di X_1, X_1'. F_1 e sostituitili nella $\Phi_1 = 0$, si potranno determinare le incognite p_1 e p'_1. Con metodo identico si procederà per le incognite q.

E così un solo strumento permette di determinare *quattro* delle sei incognite sismiche. Per le altre due componenti, *vorticosa* e *sussultoria*, si potrebbe ricorrere a uno strumento analogo al microsismografo « Vicentini » per

(1) Infatti la forza f_r, opponendosi alle traslazioni del punto P_{r1} parallele all'asse delle X, sarà funzione di X_r e di X'_r: sviluppando tale funzione in serie di potenze, omettendo i termini di grado superiore al primo nelle variabili infinitesime X_r, X'_r, e osservando che deve mancare il termine costante, perchè f_r si suppone nulla per $X_r = X'_r = 0$, si trova appunto lo sviluppo (N).

(2) Per evitare il dubbio che il determinante dei coefficienti possa essere nullo, si può scegliere un istante in cui X_2 è *massimo*, e un istante in cui X_2 si annulla, *cambiando segno*: se $F_2^{(1)}$, $F_2^{(2)}$ sono i corrispondenti valori di F_2, le equazioni da risolvere diventano:

$$X_2 p_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(1)} = 0 \quad ; \quad X'_2 p'_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(2)} = 0 ;$$

perchè nel primo istante X'_2 è nullo e nel secondo invece è necessariamente diverso da zero.

la componente verticale [1], debitamente modificato; ma su questo non insisto, riservandomi di farlo in un altro lavoro.

10. Per esaurire la questione propostami, supporrò infine che il filo abbia una lunghezza trascurabile rispetto alle dimensioni della massa pendolare, e quindi che si sopprima il sistema di leve destinato a registrare il moto della sua estremità inferiore. Allora vengono a mancare i due gradi di libertà rappresentati dalle equazioni (10), e il moto del pendolo è retto dalle equazioni (10′). Considerando soltanto la prima di queste equazioni, ricordando la prima delle (L′) e delle (N) e l'ultima delle (M), e infine che è $X_1 = 0$, si ricava l'equazione:

$$\xi'' M_2 + \beta''_2 \frac{M_2^{(y)}}{l_2} + \beta_2 g M_2 + \left(\mu''_2 \frac{M_2^{(y)}}{l_2} + p'_2 c_2 \mu'_2 + \mu_2 [M_2 g + p_2 c_2]\right) = 0 ,$$

che differisce per termini trascurabili dalla prima delle equazioni relative al pendolo verticale « Vicentini » [2].

Eguale ragionamento si può ripetere per le rimanenti equazioni (10′): e così resta dimostrato l'asserto premesso alla trattazione del problema generale.

Patologia vegetale. — *Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi.* Nota del dott. VITTORIO PEGLION, presentata dal Corrispondente G. CUBONI.

Chimica. — *Riduzione dell'Artemisina con cloruro stannoso.* Nota di P. BERTOLO, presentata dal Socio CANNIZZARO.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Vicentini e Pacher, *Microsismografo per la componente verticale.* Atti R. Ist. Ven. 1898-99, pagg. 65-89; opp. Bollettino della Soc. Sism. it., vol. V, pagg. 33-58.

[2] V. equazione (7) della mia Nota *Sulla determinazione dei moti sismici,* seduta del 3 marzo 1901, pag. 148.

I termini differenti sono $+ a \xi' + al \beta'$, che allora apparivano nelle equazioni citate, perchè m'era sfuggita l'osservazione che l'aria si oppone al movimento *relativo,* non già al movimento *assoluto* del pendolo. Del resto il valore della costante a è tanto piccolo che la differenza non ha nessuna importanza pratica.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sulla Limnaea stagnalis*. Nota del dott. PAOLO ENRIQUES, presentata dal Socio EMERY.

1. *Metodo e tecnica.* — Ho fatto sulla *Limnaea stagnalis* ricerche affatto simili, per il loro scopo, a quelle che ho fatto sugli Infusorii, e che ho riferito in una Nota precedente. Rimando dunque a quella, per il concetto informatore delle mie esperienze (pag. 340). Naturalmente qua la tecnica è stata diversa; mentre quelle erano ricerche microscopiche, queste sono ricerche fatte colla bilancia. Si trattava anche qui di sottoporre gli animali a soluzioni variamente concentrate di NaCl, e di dedurre i fenomeni osmotici che ne erano conseguenza, dalle variazioni di peso. Non mi nascondo le gravi difficoltà di questo metodo; anzi dopo la fiera critica fatta sulle ricerche del sig. Quinton sopra le Aplisie ([1]), potrà meravigliare che io stesso me ne sia servito. Ma, in primo luogo, mi sono sforzato in varî modi di evitare le cause d'errore, in cui quell'Autore era caduto; e poi gli intendimenti della mia ricerca sono diversi da quelli del Quinton. Io voglio sopratutto stabilire i diversi momenti della reazione osmotica, come ho fatto per gli Infusorii, e parto dal concetto della semipermeabilità (o quasi) delle membrane separanti, nella *Limnaea*, l'ambiente interno dall'esterno, come già quasi dimostrato. Nel nostro testè, citato lavoro, è dimostrata tale semipermeabilità per la membrana gastrica dell'*Aplysia*, proprietà che quasi logicamente deve estendersi anche alle altre membrane (pelle, branchia); ora, giacchè questa caratteristica è fondamentale, è di straordinaria importanza nelle condizioni biologiche dell'animale, io non posso *a priori* supporre che in un animale così vicino nella scala zoologica, come è la *Limnaea* rispetto all'*Aplysia*, e così simile per le condizioni di vita e per le proprietà del suo canale digerente, non posso supporre dico che le cose siano in modo diverso. Basteranno dunque come prova anche esperienze fatte sull'animale *in toto*, alla cui interpretazione, se non vi fosse altro, una critica volontariamente troppo severa potrebbe muovere obbiezioni. Del resto, l'esame delle esperienze fatte e della relativa discussione, potrà convincere il lettore, che questa critica io non me la sono risparmiata, nei limiti del giusto.

Gli animali, presi da un bacino di acqua stagnante, eran portati a vivere nell'acqua potabile, come gli Infusorii, e sempre abbondantemente alimentati con Lemne e Conferve, salvo casi speciali che verranno ricordati. Dopo che erano adattati a queste condizioni di vita, ne venivano presi alcuni e posti

([1]) Bottazzi e Enriques, *Ueber die Bedingungen des osmotischen Gleichgewichts* ecc. A. f. Anat. Physiol. Abt. Supplementband, pag. 109-170, 1901.

in una quantità nota di acqua potabile, con un poco di erbe o senza, a seconda dei casi. La quantità di liquido era sempre tale che gli animali vi potessero vivere bene, come lo dimostrava il fatto che, se non si peggioravano volontariamente le condizioni di vita, anche senza cambiare il liquido, essi duravano a vivere normalmente a lungo. Ma nelle esperienze il liquido veniva sempre cambiato ogni due o tre giorni. All'acqua aggiungevo del sale (NaCl), secondo che è indicato nelle singole esperienze. Pesavo le Limnee al principio dell'esperienza, e poi più volte nel corso di molti giorni, man mano che aggiungevo il sale, e a distanza di tempo variabile, dal momento dell'aumento di concentrazione. Nello stesso tempo, facevo spesso esperienze di confronto con animali tenuti in una stessa quantità d'acqua potabile, conservata fresca.

Come si fa a pesare una *Limnaea?* Questo è il punto più difficile. Quando si solleva dall'acqua, anche se era distesa, essa si retrae dentro al guscio, cosicchè la maggior parte della superficie del corpo, formata appunto dal guscio, è facilmente asciugabile con un cencio e della carta bibula. Ed anche il piede si può asciugare delicatamente con carta bibula, senza che si possa avere una notevole causa di errore nell'esattezza di questa operazione. Ma quella che invece può influire molto sul peso, è l'acqua contenuta tra il guscio e il corpo dell'animale, acqua che molto facilmente può uscire dalle aperture che vi sono tra il mantello e l'orlo del guscio. Se però si ha cura, nell'asciugare l'animale, di non farlo contrarre, di non stimolarlo con troppa violenza nel mentre che si asciuga il piede, quell'acqua non esce; e lo dimostrano esperienze in cui *Limnaeae* viventi nell'acqua potabile, pesate a poca distanza di tempo dopo successive riimmersioni nel liquido, davano resultato sufficientemente uguale e costante. Questo quanto alla tecnica della pesatura. Ma la critica si può rivolgere con altri argomenti, contro questo metodo, giacchè viene il dubbio che quest'acqua interposta tra il guscio e il corpo possa variare nella sua quantità, quando si variano le condizioni di vita dell'animale. Si interpreterebbero allora come variazioni di peso dell'ambiente interno dell'animale, e — quindi — come passaggio di acqua o di sale dentro o fuori, variazioni che sarebbero invece dell'ambiente esterno e completamente prive di interesse. Per evitare questa causa d'errore, ho fatto alcune esperienze in cui l'animale, prima di pesarlo, veniva stimolato meccanicamente fintantochè non facesse più uscire acqua. Ciò si può fare con notevole esattezza; dapprima l'acqua viene espulsa in abbondanza, poi sempre in minor quantità, e si giunge a un punto in cui, per quanto si stimoli, non si riesce di nuovo a far bagnare la superficie del piede dell'animale contratto. In queste condizioni la superficie interna del guscio ed esterna del corpo, in esso contenuto, sono ancora bagnate, ma sempre nello stesso modo, e le differenze di peso che si riscontrano in momenti diversi sono necessariamente dovute soltanto realmente al corpo dell'animale. Dimostrano l'esattezza di questo metodo speciali esperienze di confronto..

Ma anche l'acqua contenuta nell'interno del canale digerente può variare ed influire sui resultati. Per togliere questa causa d'errore, ho più volte ed in varî momenti aperto una *Limnaea*, pesato il canale digerente pieno, e poi vuotato; ho valutato così, approssimativamente, la quantità d'acqua contenutavi, che non ha mai superato i 5 cgr.; ed io non tengo conto, nelle mie esperienze, di variazioni di peso dell'animale inferiori a 1 dgr. Non si ha dunque qui una causa d'errore.

Le tabelle riportate nelle varie esperienze sono fatte in questo modo. Nella seconda colonna è scritta la concentrazione alla quale è portato il liquido mediante l'aggiunta del sale, in gr. NaCl °/₀₀. Nella terza il peso degli animali in esperienza. Esso corrisponde al giorno e all'ora segnata sulla stessa linea nella prima colonna. In generale, dopo aver pesato gli animali, aggiungevo del sale; per questo alla stessa indicazione di giorno ed ora corrisponde una pesata ed un aumento di concentrazione: ma il valore della concentrazione a cui il liquido è portato, è segnato una linea sotto a quella della pesata, il che significa che prima è stata fatta la pesata, e poi aggiunto il sale. La concentrazione rimane sempre la stessa, finchè non si incontra un'altra indicazione, procedendo in basso nella stessa colonna. Quando (e ciò avviene al principio delle esperienze) il numero della concentrazione è segnato nella stessa linea della pesata, allora esso indica la concentrazione del liquido quale era al momento in cui si è fatta la pesata, quale era già, insomma. Nella quarta colonna sono dati i pesi degli animali senza guscio. I gusci venivano pesati separatamente alla fine delle esperienze, dopo che gli animali erano morti od uccisi, ed il loro peso è stato sottratto dai pesi degli animali *in toto*, perchè evidentemente il guscio non prende parte alle variazioni di peso riscontrate. Le differenze tra i varî pesi, segnate nella penultima colonna, sono calcolate in generale tra ciascun peso e il precedente. Ma qualche volta è saltato qualche numero, e data la differenza tra due numeri non successivi. Ciò è riconoscibile nelle tabelle, senza bisogno di speciali avvertenze. Si veda p. es. a proposito dell'esperienza XI. Il 2° numero della colonna delle differenze (— 0,56) esprime la differenza tra 3,81 e 4,37, essendo saltato il 5,12. Si riconosce questo per il fatto che nella linea del 5,12 non vi è nessun numero nella colonna delle differenze.

2. *Riassunto delle esperienze.*

Esperienza I. — 8 *Limnaeae stagnales* messe in esperienza col cibo, in 500 cm. c. di acqua potabile.

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
2 Maggio ore 12	0	16,72	13,86	
	0,5			
3 » » 14		16,84	13,97	+ 0,12
	1			
4 » » 14		17,05	14,18	+ 0,21
	1,5			
5 » » 12		17,22	14,35	+ 0,17
	2			
6 » » 11		15,89	13,02	— 1,33
7 » » 14		16,89	14,02	+ 1
8 » » 11		16,99	14,12	+ 0,1
8 » » 14		16,78	13,91	— 0,21
9 » » 16		17,62	14,75	+ 0,84
	4			
» » » 17		16,99	14,12	— 0,63
10 » » 9		17,04	14,17	+ 0,05
	Una *Limnaea* è vicina a morire e viene tolta.			

Esperienza II. — Delle altre due, una pesa:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
10 Maggio ore 10	4	3,82	3,01	
11 » » 10		3,62	2,81	— 0,20
» » » 14		3,54	2,73	— 0,08
13 » » 9		3,76	2,95	+ 0,22
	10			
» » » 14		3,60	2,79	— 0,16
14 » » 10		3,45	2,64	— 0,15
15 » » 10	Molto contratta è vicino a morire.			

Esperienza III. — La 8ª *Limnaea* pesa:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
10 Maggio ore 14	4	6,14	5,28	
	0 (a digiuno)			
» » » 14,30′		6,24	5,38	
» » » 15,30′		6,39	5,53	
» » » 16,30′		6,36	5,50	
11 » » 10		6,68	5,77	+ 0,49
13 » » 9		6,14	5,28	— 0,49

Esperienza IV. — 5 *Limnaeae stagnales (1, 2, 3, 4, 5)* in 500 cm. c. di acqua potabile col cibo.

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
17 Maggio	0	19,78		
	0,5			
18 »		19,78		0,00
	1			
19 » ore 9		20,37		+ 0,59
	2			
» » » 16		20,06		— 0,31
20 » » 9		20,60		+ 0,54
	3			
21 » » 9		20,65		+ 0,05
	4			
23 » » 13		21,23		+ 0,58
	5			
24 » » 9		21,07		— 0,16
25 » » 14		21,00		— 0,07
26 » » 16		20,87		— 0,13
27 » » 10		20,83		— 0,04

Esperienza V. — Di queste 5, la 1ª separatamente, pesa:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
17 Maggio (¹)	0	3,54	2,89	
27 » ore 10	5	3,80	3,15	+ 0,26
Fattale espellere l'acqua:		2,32	1,67	— 1,48

Esperienza VI. — La 2ª *Limnaea* pesa, separatamente:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
17 Maggio	0	3,50		
27 » ore 10	5	3,70		+ 0,20
	7			
» » » 10,4′		3,51		— 0,19
» » » 11,15′		3,32		— 0,19
» » » 15		2,94		— 0,38
28 » » 15		3,36		+ 0,42

Esperienza VII. — La 3ª *Limnaea* pesa, separatamente:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
17 Maggio	0	5,50		
27 » ore 10	5	5,91		+ 0,41
	7			
» » » 10,10′		5,64		— 0,24
» » » 15		5,16		— 0,51
28 contratta e vicina a morire.				

Esperienza VIII. — La 4ª *Limnaea* pesa, separatamente:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenze
17 Maggio	0	4,53		
27 » ore 10	5	4,84		+ 0,31
	7	4		
» » » 15		4,30		— 0,54
28 » » 15		4,50		+ 0,20
Fattale espellere l'acqua:		3,04		— 1,46

(¹) Il canale digerente pesa gr. 0,12
Svuotato dell'acqua . . . . » 0,09

Dunque contiene acqua. . » 0,03

ESPERIENZA IX. — 3 *Limnaeae* in 500 cm. c. di acqua potabile, digiuno:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenza
1 Maggio ore 11,15	0	16,51	13,39	
	6			
» » » 11,45'		16,06	12,94	— 0,45
» » » 13,45'		15,26	12,14	— 0,80
» » » 15,45'		15,37	12,25	+ 0,11
» » » 16,45'		14,66	11,54	— 0,71
11 » » 10		13,81	10,69	— 0,85
Dato loro da mangiare.				
13 Maggio ore 9		14,67	11,55	+ 0,86
14 » » 12		13,19	10,07	— 1,48

ESPERIENZA X. — 10 *Limnaeae* in 1000 cm. c. di acqua potabile, col cibo:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Differenza
16 Maggio	0	63,90		
	0,25			
18 »	0,5			
19 »	1			
21 »		66,17		+ 2,27

ESPERIENZA XI. — Una *Limnaea stagnalis*, da più di un mese vivente nell'acqua potabile, in 500 cm. c. di acqua potabile, a digiuno, insieme colle due seguenti. Digiunavano da quindici giorni, in modo che gli effetti del digiuno durante le esperienze non potessero essere, ormai, molto notevoli.

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
9 Giugno ore 15	0	7,08	6,00	
Espulsa l'acqua:		4,37	3,29	— 2,71
	2			
9 Giugno ore 16		5,12		
Espulsa l'acqua:		3,81	2,73	— 0,56
10 Giugno ore 18 (¹)		5,84		
Espulsa l'acqua:		4,75	3,67	+ 0,94

ESPERIENZA XII. — *Limnaea* c. s., da principio insieme colla precedente:

DATA	Na Cl °/₀₀	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
9 Giugno ore 15	0	6,99		
	2			
» » » 16		6,66		— 0,33
10 » » 18		6,80		+ 0,14
11 » » 14		7,09		+ 0.29
12 » » 17		6,75		— 0,34
Espulsa l'acqua:		4,07		— 2,68
	5			
12 Giugno ore 18		3,98		
Espulsa l'acqua:		3,76		-- 0,31
13 Giugno ore 9		4,76		
Espulsa l'acqua:		3,20		— 0,56
14 Giugno ore 10 morta.				

(¹) Il canale digerente pesa (10 giugno ore 18), gr. 0,09
Svuotato dell'acqua . . . . » 0,05

Dunque conteneva acqua . . . . » 0,04

Esperienza XIII. — *Limnaea* c. s., da principio insieme colle due precedenti:

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
9 Giugno ore 15	0	6,53		
	2			
» » » 16		6,31		— 0,22
10 » » 18		6,45		+ 0,14
11 » » 14		6,34		— 0,11
12 » » 17		6,50		+ 0,16
	5			
» » » 18		6,23		— 0,27
13 » » 9		6,07		— 0,16
14 » » 10		6,48		+ 0,41

Esperienza XIV. — 2 *Limnaeae* nelle stesse condizioni iniziali delle precedenti (v. esp. XI), poste a digiuno in 2000 cm. c. di acqua potabile. La 1ª pesa.

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
13 Giugno ore 11	0	4,21		
	4			
» » » 14		4.18		— 0,03
14 » » 9	contratta	2,87		— 1,31

Esperienza XV. — La 2ª *Limnaea* pesa:

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
13 Giugno ore 11	0	5		
	4			
» » » 14		4,88		— 0,12
14 » » 9		4.72		— 0,16

Esperienza XVI. — Una *Limnaea*, nelle stesse condizioni iniziali delle precedenti, in 1000 cm. c. di acqua potabile, a digiuno (esperienza di confronto):

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
13 Giugno ore 11	0	2,84		
14 » » 9		2,84		0,00

Esperienza XVII. — 3 *Limnaeae* messe in acqua potabile, 500 cm. c. col cibo (esperienza di confronto colla esp. 1ª):

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
7 Maggio ore 14	0	11,92		
8 » » 11		11,79		— 0,13
9 » » 14		11,78		— 0,01
9 » » 16		11,74		— 0,04
11 » » 17		11,96		+ 0,22

Esperienza XVIII. — 3 *Limnaeae* tolte dall'acqua stagnante e poste in acqua distillata, a digiuno.

DATA	Na Cl ‰	Peso totale	Peso senza gusci	Variazioni di peso
27 Maggio ore 11	Acqua stagnante	23,34		
	» distillata			
2 » » 15		24,08		+ 0,74

3. *Discussione delle esperienze.* — Nelle prime esperienze io trovavo, in corrispondenza di un aumento di concentrazione non troppo forte dell'ambiente esterno, un aumento di peso degli animali.

Si osservi p. es. l' esperienza I, 2-5 maggio; esp. X ecc. Quest'aumento poteva esser dovuto da maggiore ingestione di cibo. Ma anche in animali tenuti a digiuno si osservava lo stesso fatto. Siccome però talvolta esso era preceduto da una diminuzione (esp. I, 5-10 maggio), riconobbi la necessità di pesare le *Limnaeae* poco dopo l'aumento della concentrazione, anzichè solo il giorno dopo, come nell' esp. I, e di aumentare addirittura un poco di più la concentrazione. Allora si riesce sempre a cogliere un primo momento in cui si ha una diminuzione di peso seguito poi da un aumento (esp. IV, 19-20 maggio; esp. XII, 9-17 giugno, ecc.). Se l'esperienza si prolunga senza ulteriori modificazioni di concentrazione, anche l'aumento sparisce (esp. XII, 9-12 giugno). Se l'aumento di concentrazione è molto forte, od avviene quando la concentrazione era già elevata, si osservano i due momenti di reazione, ugualmente, ma la seconda reazione non arriva a superare la prima, immediata, ed il peso resta sempre più basso del primitivo (esp. XIII, esp. VI, 27-28 maggio). Ma i due momenti si osservano quasi sempre; sempre, se la soluzione non è tanto forte da condurre rapidamente a morte gli animali, e se si prolunga sufficientemente l' esperienza.

D'altra parte, animali presi dall'acqua stagnante e posti in acqua distillata, aumentano notevolmente di peso (esp. XVIII).

Abbiamo dunque che le *Limnaeae* reagiscono (come prima reazione) alle soluzioni ipo- e ipertoniche assumendo o perdendo acqua. Che quest'acqua è propria dell'ambiente interno e dei tessuti degli animali, lo dimostrano le esperienze in cui è tolta l'acqua che si trova tra il guscio e il corpo. Si veda p. es. l'esp. XI, in cui l'acqua è fatta espellere prima di ogni pesata. Anzi, in questi casi, i risultati son più netti; alla soluzione del 2 °/₀₀ l'animale ha reagito con una diminuzione di 5 dgr., aumentando poi di nuovo di quasi 1 gr. (da 4,37 a 3,81 e a 4,75 gr.). Nell' esp. XII, 12-14 giugno, non si ha il riaumento, perchè l'animale va morendo. Se si guarda qua e là nelle varie esperienze, si vede che sempre manca la seconda reazione, quando l'animale dopo poco muore.

Dunque, alle soluzioni ipertoniche le *Limnaeae* reagiscono in due modi: nel 1° momento con una perdita d'acqua propria dell'ambiente interno e dei tessuti (evidentemente perdita di natura osmotica); nel 2° momento con un riaumento di peso, per il quale è necessario che l'animale sia in buone condizioni di salute; mentre che la prima reazione avviene anche su animali già malandati (p. es. esp. II, 13-14 maggio).

Questa seconda reazione è dovuta a un aumento dell'acqua interna, o anche dal sale? Risponde l'esperienza III, nella quale una *Limnaea* condotta alla concentrazione di 4 °/₀₀, rimessa in acqua potabile (a digiuno) arriva dal peso di gr. 6,14 a quello di gr. 6,63. Questo aumento che è temporaneo, e che è evidentemente di natura osmotica, dimostra che i succhi interni son più concentrati dell'acqua potabile, da cui l'animale originaria-

mente proveniva, ossia che, adattandosi l'animale a vivere in Na Cl 4 ‰ era entrato del sale in esso, in maggior quantità. Evidentemente quando l'aumento per la nuova immersione in acqua potabile sparisce (13 maggio), il sale era uscito nuovamente dall'animale, insieme con acqua.

In sostanza, il comportamento delle *Limnaeae* è perfettamente simile a quello degli Infusorii, ed esprimibile in due parole:

Le Limnaeae reagiscono alle soluzioni anisotoniche dapprima con variazioni del contenuto acquoso (*reazione osmetica*), *poi si ha una variazione che tende a distruggere la prima e qualche volta la supera temporaneamente*, *dovuta a passaggio di acqua e sale.*

Parassitologia. — *Sulla trasmissibilità della peste bubbonica ai pipistrelli*. Nota preventiva di B. Gosio, presentata dal Socio Luciani.

Numerose specie animali vennero già studiate in rapporto alla loro suscettibilità verso la peste bubbonica. Da ricerche batteriologiche sul campo dell'epidemia risultarono spontaneamente recettivi i ratti, i topi ed i porci. Sperimentalmente poi la malattia, oltre che nei succitati animali, venne con maggiore o minor facilità riprodotta nel topo campagnuolo, nel *mus silvaticus*, nella cavia, nel coniglio, nella scimia, nel gatto, nei polli, nel passero e nelle mosche. I piccioni vennero resi sensibili mediante il digiuno; le lucertole ed i serpenti mediante alta temperatura. Il cane, i bovini, il riccio e la rana si rivelerebbero fin ora immuni. Per l'importanza che ha l'argomento dal lato epidemiologico e profilattico, appariva utile estendere anche più le ricerche, prediligendo sempre gli animali, che possono avere qualche rapporto coll'uomo e colle sue abitazioni.

Al tempo della piccola epidemia pestosa di Napoli, quando ebbi incarico di fissarmi per le dovute pratiche sanitarie, sui focolai primitivi della infezione, fu mia cura di raccogliere e far raccogliere dati nel suddetto indirizzo ed il lavoro sistematico, anche nei riguardi zoologici, si sta ora compiendo, col contributo d'un materiale che si raccoglie in varie parti del Regno. Ma intanto giudico opportuno un breve cenno su un punto, che non mi risulta fin ora esplorato, mentre esso apparisce d'un certo interesse.

I grandi magazzini del Punto franco, che reclamavano la massima attenzione come località di probabile origine del morbo, oltrechè d'un grande numero di topi, sono anche facile covo di pipistrelli, che ogni sera vedevo aggirarsi numerosi e contro cui nessuna garanzia offrono le alte mura, che isolano i locali, l'indipendenza del sistema cloacale dalla fognatura cittadina e i varî ripari escogitati per impedire l'evasione dei comuni animali

sospetti. Pertanto fu ovvia la domanda, se i chirotteri potessero eventualmente rendersi veicolo della peste bubbonica.

L'occasione a un tale studio mi venne da poco tempo offerta, quando cioè potei avere a disposizione un certo numero di questi animali scelti fra le specie più resistenti al regime, a cui per necessità sperimentale si è costretti a sottoporli.

Le mie ricerche riguardano la specie *Vesperugo noctula* molto comune in gran parte dell'Italia.

Per le inoculazioni impiegai il germe isolato dalla stessa epidemia di Napoli, mantenuto sempre attivo con passaggi attraverso il decumano albino. Nelle prime esperienze le dosi di *virus* furono alquanto alte (0,5 cmc. di brodocultura a 24 ore di sviluppo), ma poi discesi fino a cmc. 0,1 — 0,05, sempre con esito positivo.

I risultati ottenuti possono sommariamente così riportarsi:

I pipistrelli (per ora *Vesperugo noctula*) contraggono la peste, e ne muoiono in un termine relativamente breve, anche per inoculazione sottocutanea di piccole dosi di materiale infetto; si può parlare di *recettività spiccata*.

Tutti gli organi interni si mostrano in tal caso ricchi di germi specifici, che spiegano virulenza normale per il topo e per la cavia. Sovratutto caratteristica è la splenite pestosa, per cui la milza può talora assumere un volume esagerato.

I parassiti dei pipistrelli morti di peste possono contenere nel loro interno i germi infettivi, e con ogni probabilità ne sono ambiente di sviluppo, come già venne dimostrato per le pulci comuni in questo stesso laboratorio.

Il notevole e svariato numero di parassiti, di cui il pipistrello è facile albergo, il suo speciale mezzo di locomozione e la sua or resa nota squisita recettività verso la infezione pestosa, a differenza di altri animali alati, lasciano di leggieri comprendere come esso possa avere importanza quale veicolo della peste bubbonica.

Zoologia. — *Nota preventiva sulla funzione delle cellule cloragogene nei gen. Lumbricus ed Allolobophora.* Nota del dott. Ciro Bortolotti, presentata dal Socio Emery.

Non starò a riportare le lunghe controversie sulla genesi del *Cloragogeno*, dirò solo che ormai, abbattute dal Rosa le teorie di Cuénot e di Kükenthal sui pretesi rapporti genetici fra il *Cloragogeno* ed i linfociti degli anellidi, si deve considerare questo strato di cellule come una modificazione della membrana peritoneale.

Le cellule cloragogene non si osservano esclusivamente attorno all'intestino, esse si trovano alla superficie esterna dei principali tronchi vascolari

(vaso dorsale e sue ramificazioni): la ripiegatura del *typhlosolis* ne è sempre rivestita.

Le cellule ghiandolari sono libere, ossia non hanno aderenza fra loro: sono ovalari, piriformi e fissate soltanto per una estremità diversamente ramificata alla superficie dell'intestino o dei vasi. Quale è la funzione di queste cellule? Da prima furono chiamate ghiandole epatiche. Si credette segregassero un liquido alcalino digestivo ed a questo liquido si attribuiva l'azione digestiva che Fredericq aveva riscontrato nell'intestino dei vermi terricoli. Si avvicinava così questo liquido al succo pancreatico degli animali superiori (Vogt e Jung). Claparede dopo un complesso di ricerche fu il primo a credere ch'esse fossero soltanto cellule escretrici, e dopo di lui quasi da tutti furono considerate come escretrici dei prodotti del sangue. Nessuno però che io sappia ha stabilito definitivamente la natura dei granuli e degli altri prodotti d'escrezione che (come vedremo) si riscontrano in diverso grado nelle singole cellule. Le cloragogene hanno un citoplasma finamente granuloso ed un nucleo ovale sempre visibile e con interno nucleolo. Il nucleo non ha una posizione stabile, ma si trova a diverse altezze nella cellula. Un grande numero di granuli riempie spesso quasi tutto il corpo della cellula cloragogena. Questi granuli secondo Rosa (1896) non sarebbero che goccioline liquide rivestite di una membrana elastica. Io credo che tutt'al più si possano chiamare semisolidi, giacchè sono sufficientemente resistenti alla pressione. Essi poi sono resistentissimi a tutti i reagenti. L'alcool, l'etere, gli alcali non li sciolgono, tanto che anche in sezioni che abbiano sopportato tutti i passaggi dei diversi alcool, e dello xilolo, i granuli si osservano intatti nella loro forma. Il loro colore è variamente giallastro. Dall'azione che i diversi coloranti hanno sui granuli, si deduce con certezza che questi hanno reazione acida. Del resto le cellule claragogene hanno non solo nei granuli, ma in tutto il loro corpo caratteri manifesti di acidità. I granuli non li trovai mai fuori della cellula cloragogena; è certo dunque che essi si formano nella cellula stessa, come prodotti ultimi delle sostanze escrete dal sangue. Io credo che i granuli in questione siano formati in gran parte, se non esclusivamente, da acido urico. Dico questo perchè dopo ripetuti tentativi ho potuto ottenerne le reazioni caratteristiche.

Oltre a questi granuli, molti autori fra i quali Schneider (1896), Cuénot (1897) riscontrarono nel cloragogeno degli oligocheti delle goccie adipose, anzi il Cuénot dà la figura di una cellula di Phreoryctes Menkeanus ripiena di globuli di grasso anneriti coll'acido osmico. Io non ho potuto trovare nei gen. *Lumbricus* ed *Allolobophora* delle goccie che mi abbiano dato le reazioni del grasso. Ho osservato invece, in diversi individui, nelle cellule cloragogene, dei grossi ammassi giallastri di forma irregolarmente sferica.

Mi sono convinto che questi grossi ammassi sono di glicogeno, presentandone essi le reazioni caratteristiche. Bisogna notare però che gli ammassi

non si trovano soltanto inclusi nelle cloragogene, ma si vedono alle volte intercalati fra le fibre e le cellule degli altri strati dell'intestino. Con tutto ciò è probabile che anche gli ammassi di glicogene, come gli altri granuli, si formino nella cellula cloragogena da materiali escreti dal sangue. Non v'è dubbio che il glicogeno si accumuli nelle cloragogene come materiale di riserva, anche per il fatto che la sua presenza non è costante. Come, e per quale via gli ammassi del glicogeno vengano utilizzati dall'organismo non lo saprei dire. Le cellule cloragogene cariche di granuli vanno staccandosi interamente o a pezzi dalla parete dell'intestino o dei vasi e cadono nella cavità periviscerale, donde in modi diversi vengono eliminate dall'organismo.

Concludendo: Il cloragogeno nei gen. *Lumbricus* ed *Allolobophora* ha una funzione prevalentemente escretoria, però non si può dubitare che possa accumulare dei materiali di riserva.

NOTA. In questi giorni mi furono favorite le bozze di stampa di un magistrale lavoro del prof. Rosa: *Sul Cloragogo tipico degli Oligocheti.*

Credo però ugualmente opportuno di pubblicare il mio modesto scritto per quel poco di nuovo che in quanto alla natura dei prodotti d'escrezione, mi pare d'aver trovato. Invio al lavoro del prof. Rosa chi del cloragogeno (cloragogo) in generale vuol formarsi una completa conoscenza sotto ogni punto di vista e chi vuol trovare la completa bibliografia sull'argomento.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna annuncia che alla seduta assiste il Socio straniero Simone Newcomb.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 31 maggio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla deformazione delle superficie di rotazione.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Nella Memoria di Ribaucour: *Sur la théorie générale des surfaces courbes* (¹) è considerato, al n. 92, un caso assai generale di deformazione di una congruenza rettilinea. Ciascun raggio della congruenza si pensa invariabilmente collegato ad un corrispondente piano tangente di una superficie S, la giacitura del raggio rispetto al piano tangente essendo affatto arbitraria, e si suppone che la superficie S si deformi seco trascinando i suoi piani tangenti, ed i raggi della congruenza C. Se la congruenza C è normale in una configurazione iniziale di S, essa rimane costantemente normale in qualunque deformazione nei due casi particolari seguenti: 1° quando il raggio esce dal punto di contatto del piano tangente (teorema di Beltrami); 2° quando giace nel piano tangente stesso (Ribaucour). Ma negli altri casi la congruenza perde in generale, colla deformazione, la proprietà di essere normale, a meno che la superficie S non sia applicabile sopra una superficie di rotazione, la giacitura della congruenza rispetto alla superficie S essendo poi assoggettata a particolari condizioni, che si traducono in un certo sistema di equazioni alle derivate parziali (Ribaucour, l. c.).

(¹) Journal de mathématiques (4ème série, t. VII), 1891.

Le linee seguenti hanno per oggetto di far conoscere un caso particolare di queste deformazioni, notevole per la sua semplicità. Esso viene dato dal teorema: *Se una superficie di rotazione si fa rotolare sopra una qualunque superficie applicabile* [1], *l'asse della superficie descrive sempre una congruenza normale.*

Dimostriamo il teorema colle considerazioni geometriche seguenti. Essendo S una superficie di rotazione e Σ una superficie qualunque applicabile sopra S, partiamo dall'osservazione evidente che l'asse di S passa pel centro di curvatura geodetica di ogni parallelo e giace nel piano normale al parallelo stesso. Considerando dunque S a contatto con Σ in un punto qualunque M, l'asse di S passerà pel centro M′ di curvatura geodetica della trasformata del parallelo e giacerà nel piano condotto pel raggio MM′ normalmente al piano tangente di Σ. Ora il punto M′ descrive la superficie Σ' *complementare* di Σ rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani e il detto piano, normale al piano tangente di Σ, non è altro che il piano tangente in M′ alla Σ'. Dunque l'asse della S è tangente in M′ alla Σ'. Ora se indichiamo con

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2\, d\beta^2 \quad (r = f(\alpha))$$

l'elemento lineare di S (o di Σ), riferito ai meridiani (β) ed ai paralleli (α), l'angolo σ d'inclinazione dell'asse di S sul raggio MM′ (tangente al meridiano) è dato da

$$\operatorname{sen} \sigma = \frac{dr}{d\alpha}.$$

D'altronde, per la formola che lega l'elemento lineare della complementare Σ' a quello di Σ [2], si sa che la Σ' è applicabile essa stessa sopra una superficie di rotazione e il raggio ϱ del parallelo di questa superficie è dato da

$$\varrho = \frac{a}{\dfrac{dr}{d\alpha}},$$

essendo a una costante; ne risulta:

$$\varrho \operatorname{sen} \sigma = a. \tag{1}$$

Ma poichè σ è l'angolo che i detti assi, tangenti a Σ', formano colle deformate dei meridiani, la (1) ci dimostra (pel teorema di Clairaut) che

[1] Quando due superficie S, S′ sono applicabili, diciamo che S rotola sopra S′ se, tenendo fissa S′, si fa acquistare ad S una doppia infinità di posizioni, portando ogni volta un punto P di S a coincidere col corrispondente P′ di S′, in guisa che i piani tangenti in P, P′ coincidano e si sovrappongano gli elementi lineari corrispondenti degli intorni.

[2] Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale* (seconda edizione, I, pag. 296).

queste tangenti inviluppano sopra Σ' un sistema di geodetiche, e per ciò la congruenza C è una congruenza normale, c. d. d.

Di più, la costante a di Clairaut nella (1) rimanendo fissa, vediamo che le geodetiche inviluppate dagli assi sono incontrate da un medesimo parallelo tutte sotto lo stesso angolo, cioè quando la Σ' è conformata a superficie di rotazione esse sono tutte congruenti fra loro. Il teorema superiore risulta quindi completato dal seguente:

La congruenza normale descritta dall'asse di una superficie di rotazione S, *che rotola sopra una superficie applicabile* Σ, *ammette per una falda della superficie focale la superficie complementare* Σ' di Σ, *e conformando* Σ' *a superficie di rotazione le geodetiche inviluppate sopra* Σ' *dagli assi risultano congruenti fra loro.*

2. Esaminiamo ora le superficie Φ ortogonali agli assi. Riferiamo per ciò dapprima la Σ' ai meridiani e paralleli, e sia

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$$

il suo elemento lineare. Cangiamo linee coordinate prendendo per linee (v) un sistema di geodetiche congruenti, corrispondenti al valore a della costante di Clairaut, e per linee (u) le loro traiettorie ortogonali, essendo u l'arco delle geodetiche (v) contato da una traiettoria ortogonale fissa. Per le note formole relative alle geodetiche sulle superficie di rotazione [1], potremo prendere

$$\begin{cases} u = a\beta + \displaystyle\int \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\, d\alpha \\ v = -a\beta + a^2 \displaystyle\int \frac{d\alpha}{r\sqrt{r^2 - a^2}}, \end{cases}$$

indi

$$u + v = \int \frac{r\, d\alpha}{\sqrt{r^2 - a^2}}. \tag{2}$$

Se ne trae

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) dv^2,$$

e per la (2) sarà $\frac{r^2}{a^2} - 1$ una certa funzione di $u + v$, che indicheremo con $f^2(u + v)$, Si avrà perciò

$$ds^2 = du^2 + f^2(u + v)\, dv^2, \tag{3}$$

dove la forma della funzione f dipenderà dalla forma della superficie di rotazione e dal valore della costante a.

[1] Vedi *Lezioni* ecc., I, pag. 208.

Le superficie Φ che dobbiamo considerare sono le evolventi della Σ', d'elemento lineare (3), rispetto alle geodetiche (v), cioè le superficie ortogonali alle tangenti di queste geodetiche. Indicando con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della Φ, si ha

$$r_2 = u, \qquad r_1 - r_2 = -\frac{f(u+v)}{f'(u+v)},$$

onde segue il teorema: *Le superficie Φ ortogonali agli assi della superficie di rotazione* S *hanno i raggi principali di curvatura legati da una relazione della forma*

$$\psi(r_1 - r_2) + r_2 = v,$$

dove ψ è una funzione dipendente dalla forma di S *e v è il parametro delle linee di curvatura di un sistema sopra Φ.*

3. Come esempio si prenda per S il paraboloide di rotazione. La superficie complementare Σ' ha l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + 2(u+v)\,dv^2,$$

le geodetiche (v) essendo in questo caso tangenti al parallelo minimo di Σ'. Qui abbiamo

$$r_2 = u, \quad r_2 - r_1 = 2u + 2v$$

e quindi

$$r_1 + r_2 = -2v.$$

Dunque: *se si fa rotolare il paraboloide di rotazione sopra una superficie applicabile, le superficie normali alla congruenza descritta dall'asse hanno costante la somma dei raggi principali di curvatura lungo le linee di curvatura di un sistema.*

Le deformate del paraboloide di rotazione essendo tutte note, conosciamo così, in termini finiti, una classe di superficie Φ dotate della proprietà enunciata. Terminiamo coll'osservare che alla considerazione delle superficie Φ per le quali è costante la somma dei raggi principali di curvatura lungo le linee di curvatura di un sistema si è condotti in generale dall'esame della questione seguente: *quando accade che ad ogni sistema coniugato sopra una falda dell'evoluta di una superficie Φ corrisponde nell'immagine sferica della congruenza delle normali di Φ un sistema ortogonale?*

Per ciò è appunto necessario e sufficiente che la superficie Φ appartenga alla classe superiore. Allora la corrispondente falda dell'evoluta ha l'elemento lineare tipico

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \varphi(v)]\,dv^2, \tag{4}$$

che figura nelle ultime ricerche di Weingarten sull'applicabilità [1]. Viceversa le tangenti alle geodetiche (v) in una superficie d'elemento lineare (4) formano una congruenza che, flettendo comunque la superficie di partenza, gode sempre della proprietà descritta.

[1] Darboux, *Leçons*, t. IV, pag. 323.

Fisica. — *Sulla produzione di suoni per mezzo delle scariche nei tubi a gas rarefatto o nelle fiamme.* Nota II del Socio AUGUSTO RIGHI.

In una precedente Nota [1] ho descritto i fenomeni sonori, che si producono, quando le armature di un condensatore sono messe, attraverso ad un telefono, in comunicazione cogli elettrodi d'un tubo a gas rarefatto, percorso dalla corrente d'una batteria di piccoli accumulatori. Tali suoni sono dovuti alle scariche del condensatore, le quali si producono ogni volta che la differenza di potenziale fra le armature raggiunge un determinato valore, ed il numero di vibrazioni per secondo del suono è eguale al numero di scariche del condensatore prodotte in tal modo durante l'unità di tempo. Perciò quel suono è tanto più acuto, quanto maggiore è la forza elettromotrice della batteria, quanto minore è la capacità del condensatore, e quanto minore è la resistenza messa in serie agli accumulatori.

In quelle esperienze l'autoinduzione del circuito derivato (designando così il circuito del condensatore) fu sempre assai piccola, e sembrò non esercitare sensibile influenza sui fenomeni. Anzi il periodo di oscillazione elettrica del circuito derivato fu sempre di gran lunga minore del periodo delle oscillazioni sonore, circostanza questa che rende indubitato essere questo modo di produzione dei suoni affatto differente da quello della nota esperienza di Duddell.

Ho voluto indagare più tardi quali fenomeni si sarebbero prodotti facendo in modo, che il periodo delle oscillazioni elettriche del circuito del condensatore divenisse eguale all'intervallo di tempo che trascorre fra le successive scariche od anche lo superasse. Espongo nella presente Nota quanto ho ricavato dalle esperienze eseguite a questo scopo, per le quali ho preferito i tubi alle fiamme, perchè queste non danno sempre risultati regolari.

Prima ancora di tentare le esperienze nelle nuove condizioni, ho introdotto però qualche altra variante nella disposizione sperimentale. Così, ho trovato conveniente sostituire agli elettrodi cilindrici di alluminio del tubo ad aria rarefatta, altri elettrodi, e precisamente un filo sottile di platino come anodo, ed un disco piano d'alluminio come catodo. Il filo arriva a piccola distanza dal centro del disco, ed è a questo perpendicolare. Ma è ancora meglio sostituire all'alluminio del mercurio e all'aria rarefatta dell'idrogeno a circa un centimetro di pressione, perchè in tal modo il catodo si conserva pulito e brillante, ciò che assicura la perfetta regolarità dei feno-

[1] Seduta del 4 maggio 1902; questi Rendiconti pag. 352.

meni e la purezza dei suoni, col vantaggio ancora del potersi variare a piacere la distanza fra gli elettrodi, semplicemente facendo passare una parte più o meno grande del mercurio in un serbatoio laterale comunicante col tubo.

Ho trovato comodo altresì sopprimere il telefono. Se infatti il condensatore, anzichè essere uno dei soliti assai compatti con armature di stagnuola e dielettrico di mica o di carta paraffinata, consiste in due lastre metalliche sovrapposte, con uno o più fogli di carta da scrivere per separarli, è lo stesso condensatore che produce il suono, che prima veniva generato dal telefono. Questo suono del condensatore può essere tanto intenso, da udirsi benissimo in camere lontane da quelle ove trovasi l'apparecchio.

Volendo, come ho detto più sopra, far sì, che il periodo di oscillazione elettrica del circuito derivato divenisse paragonabile al periodo di tempo richiesto per la carica del condensatore, ho dovuto aumentare l'autoinduzione del circuito derivato. A questo scopo ho inserito fra una delle armature del condensatore ed il tubo uno o due rocchetti da galvanometro, ciascuno dei quali conteneva ottomila giri di filo ed aveva un coefficiente di autoinduzione calcolato, colla formola di Stefan, in circa 4,68 Henry.

In queste condizioni il fenomeno presenta caratteri alquanto differenti da quelli del fenomeno della precedente Nota, e senza divenire identico a quello di Duddell, vi si avvicina grandemente. Infatti, il periodo delle vibrazioni sonore diviene sensibilmente eguale al periodo delle oscillazioni elettriche calcolato in base alla capacità, all'autoinduzione ed alla resistenza. Esso diviene quindi indipendente, almeno entro certi limiti, sia dalla forza elettromotrice degli accumulatori, sia dalla resistenza del circuito di questi. È però necessario, onde si generi il suono, che tale periodo sia notevolmente maggiore, di quello del suono che si otterrebbe senza rocchetti, tanto che, se nel circuito degli accumulatori esiste una resistenza variabile, è necessario che il valore di questa superi un certo valore limite, onde il suono si sprigioni dal condensatore. Introducendo un fascio di fili di ferro nei rocchetti, il suono diviene più grave, in causa dell'aumento che si produce, così facendo, nell'autoinduzione.

Quest'esperienza costituisce un caso estremo, mentre l'esperienza della prima Nota ne costituisce un altro. Nell'esperienza attuale il suono è dovuto alle variazioni di potenziale prodotte dalle oscillazioni elettriche ed ha lo stesso periodo di queste, mentre nell'esperienza della prima Nota il suono è dovuto alla regolare successione delle cariche e scariche del condensatore, ed il suo periodo è eguale all'intervallo di tempo che separa le scariche stesse. Diveniva quindi interessante esaminare i casi intermedi, cioè fare uso di autoinduzione minore di quella dei rocchetti descritti.

Così facendo ho ottenuto fenomeni svariati e singolari e che sembrano richiedere un lungo ed accurato studio per essere spiegati.

Come si poteva prevedere, il numero di vibrazioni del suono dipende tanto dal coefficiente d'autoinduzione del circuito derivato, quanto dalla resistenza e forza elettromotrice del circuito principale; ma tale dipendenza segue leggi certamente complicate. In particolare si osserva questo singolare fenomeno, e cioè, che variando in modo continuo o la resistenza suddetta o l'autoinduzione del rocchetto, anzichè ottenere una variazione continua nell'altezza del suono, si odono suoni che ad intervalli irregolari mutano bruscamente di altezza. In altre parole, certi suoni sono possibili, ma non quelli di altezze intermedie. Basta per esempio introdurre, con moto uniforme, un fascio di fili di ferro nel rocchetto, per udire una successione di note formanti una specie di melodia e che si ripetono poi con successione inversa, quando il fascio di fili di ferro si allontana con inverso moto uniforme. Per certe posizioni del fascio basta dare al medesimo uno spostamento minimo, per far saltare il suono bruscamente da una nota all'altra; e non di rado si riesce ad ottenere, fissando il fascio in una di quelle posizioni, una rapida alternativa delle due note, e cioè un vero trillo.

Infine, se la resistenza è convenientemente regolata, si ottiene un curioso fenomeno analogo a quello delle fiamme cantanti, e cioè il suono non si produce spontaneamente, ma esso si eccita subito e perdura, se si dà al tavolo un lieve urto, o se si tocca il condensatore col gambo di un diapason vibrante, il quale dia un suono d'altezza presso a poco eguale a quella del suono del condensatore.

L'esame di questi ed altri curiosi fenomeni sarà probabilmente oggetto di future mie ricerche.

Fisica. — *Dispersione rotatoria magnetica nell'interno delle righe di assorbimento.* Nota del Socio W. Voigt.

Il Corbino ha pubblicato nei Rendiconti del 15 settembre 1901 una Nota contenente osservazioni sulla dispersione rotatoria magnetica dei vapori di sodio nell'interno delle righe di assorbimento, le quali presentavano un interesse tanto maggiore, in quanto erano apparentemente in contraddizione con tutte le teorie. In opposizione a questa apparenza io ho cercato di mostrare (W. Voigt, Ann. d. Physik, *6*, 783, 1901) che le formole da me sviluppate portano a fenomeni della natura di quelli descritti dal Corbino. Ma in questa occasione si è manifestata la difficoltà di farsi un'idea esatta di un fenomeno delicato in base ad una semplice descrizione. In ogni caso le recenti osservazioni del Corbino (Nuovo Cimento (V), III, 121, 1902) hanno mostrato che non si trattava esattamente di quello che io avevo creduto; e questo viene confermato da fotogrammi del prof. Zeeman in Amsterdam, i quali indubbiamente rappresentano il fenomeno studiato dal Corbino. Da tutto

questo però non segue per nulla una contraddizione fra teoria ed osservazione.

Il Corbino si esprime così a proposito delle frange d'interferenza da lui osservate: « eccitando il campo, le pallide frange, che si hanno dentro le righe, restano rettilinee ed orizzontali »; ma queste parole contengono già un' interpretazione del fenomeno, la quale può condurre in errore, come è avvenuto a me. In ogni caso i fotogrammi molto netti dello Zeeman mostrano nelle righe di assorbimento delle ombre larghe e slavate, le quali hanno un aspetto interamente diverso dalle frange di interferenza situate fuori delle righe di assorbimento ed indubbiamente possono ricevere un' interpretazione del tutto diversa da quella data dal Corbino. Le questioni, che nascono a questo proposito, hanno una portata generale e meritano di venire trattate alquanto estesamente.

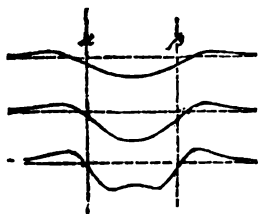
La teoria conduce alla seguente formola per l'angolo di rotazione χ del piano di polarizzazione:

$$n\chi = \mathrm{KP} \frac{(\Delta^2 - \mathrm{P}^2 - 1)}{(\Delta^2 + \mathrm{P}^2 + 1)^2 - 4\Delta^2 \mathrm{P}^2}$$

in cui $n = \sqrt{n_1 n_2}$ rappresenta l'indice di rifrazione medio per le due onde propagantesi nel vapore, K un parametro; P è proporzionale all' intensità del campo magnetico, e Δ è proporzionale alla distanza della posizione considerata dalla posizione primitiva della riga di assorbimento, misurata in frazioni di durata di vibrazione. K contiene come fattore la lunghezza del cammino percorso dai raggi nel vapore, ed inoltre dipende secondo una legge sconosciuta dalla densità e dalla temperatura del vapore. Queste ultime determinano anche il coefficiente di proporzionalità in P e Δ, in modo però che il rapporto $\frac{\mathrm{P}}{\Delta}$ resta sensibilmente indipendente da esse. Le posizioni delle componenti della doppietta di Zeeman sono date in via approssimata da $\Delta = \pm \mathrm{P}$.

La grandezza $\frac{n\chi}{\mathrm{K}}$ è legata dunque alla variabile Δ mediante l' unico parametro P, e si può rappresentare questo legame mediante un' unica serie di curve, che corrispondono a valori crescenti di P. Se nella costruzione si sceglie per ogni curva l' unità della Δ proporzionale od eguale al valore di P, le ascisse α, β, che corrispondono alle componenti della doppietta di Zeeman saranno coincidenti per tutte le curve. Dette curve assumono per i valori $\mathrm{P} = 0,5$; $\mathrm{P} = 1,5$; $\mathrm{P} = 3,0$ le forme disegnate nell' unita figura, le quali rappresentano chiaramente le modificazioni che si producono al crescere di P.

Queste curve rappresentano anche qualitativamente — benchè con ascisse molto ingrandite — l'andamento delle frange d' interferenza nell' esperienza del Corbino, quando si possa ritenere costante n nel tratto considerato (ciò

che è permesso nel caso dei vapori di sodio, solo con un'approssimazione molto grossolana). Però, secondo quanto abbiamo detto, alla medesima intensità del campo possono corrispondere, a seconda della temperatura e della densità del vapore, non solo valori diversissimi di P, ma anche a seconda di queste condizioni e del valore della lunghezza l, valori assoluti diversi delle ordinate.

Ne segue una particolarità, che distingue in modo essenziale le osservazioni della natura di quelle del Corbino da quelle del fenomeno Zeeman propriamente detto. La separazione delle componenti della doppietta è sensibilmente indipendente sia dalla temperatura e densità del vapore, sia dalla lunghezza l del cammino percorso dai raggi luminosi nel suo interno. Per conseguenza il fenomeno rimane netto, anche se i diversi raggi luminosi, che entrano in giuoco, hanno attraversato porzioni diverse, ed in diverse condizioni, della fiamma.

Al contrario nelle osservazioni del Corbino ogni raggio darà in generale, per una medesima distanza α β, una curva d'interferenza diversa e quindi il fenomeno si presenterà poco netto, e di più questa mancanza di nettezza sarà diversamente accentuata nelle diverse parti della riga di assorbimento, poichè, come risulta dalla figura, le diverse porzioni della curva si alterano in misura diversa col variare del parametro. Così, per esempio, le porzioni delle curve di interferenza prossime, dalla parte interna, ai massimi di assorbimento saranno specialmente poco nette, perchè ivi le diverse curve hanno un andamento molto variabile. All'incontro, poichè tutte le curve nella vicinanza di α e β passano per l'asse delle ascisse $\chi = 0$, si osserveranno qui porzioni molto marcate e di larghezza notevole a causa della rapida caduta delle curve corrispondenti ai valori più elevati di P. D'altronde non si potrà avere in quelle regioni un'assoluta oscurità, perchè in essa le intensità delle due onde circolari, che vengono ad interferire, sono molto diverse e queste non potranno perciò comporsi in vibrazioni lineari.

Se quindi le osservazioni vengono fatte con un vapore molto denso e, per avere la necessaria intensità luminosa, con apertura piuttosto grande della fessura, con che tutte le parti dell'immagine d'interferenza vengono allargate in direzione orizzontale, e se ancora si fa uso di una sorgente luminosa,

in cui, come nella luce solare o nell'arco elettrico, manca la luce corrispondente al colore a metà fra α e β, avendosi le linee del sodio invertite — la teoria mostra come molto plausibile che si osservino quelle grosse bande oscure, che non si alterano sensibilmente coll'intensità del campo, come fu notato dal Corbino. La circostanza che uno dei fotogrammi dello Zeeman mostra nel mezzo delle bande oscure una netta stria verticale, più chiara rende abbastanza probabile l'interpretazione, che ho riferita.

Comunque le considerazioni esposte mi hanno mostrato la necessità di intraprendere delle osservazioni in condizioni, in cui non sieno presenti quelle complicazioni, che hanno reso così poco netto il fenomeno osservato dal Corbino, suggerendo di operare con densità di vapore così piccola ed intensità del campo così grande che le componenti della doppietta si stacchino nettamente fra di loro e dalle linee del sodio invertite della sorgente. Lo Zeeman ha eseguito, dietro mia preghiera, queste osservazioni colla sua nota accuratezza, ed io sono ben lieto di potere presentare a codesta Accademia nella Nota a pag. 470, un primo rapporto dei risultati da lui ottenuti e dovuto alla penna.

Le osservazioni istituite dallo Zeeman hanno fornito precisamente i risultati previsti dalla teoria, e sopratutto anche le enormi rotazioni negative nel tratto fra le componenti della doppietta, sfuggite al Corbino; esse rappresentano quindi una conferma altamente soddisfacente della teoria.

Paleontologia. — *Sul rinvenimento di un teschio di Squalodontidi nel calcare bituminoso di Ragusa in Sicilia.* Nota preliminare del Socio G. G. Gemmellaro.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulla probabile tectonica del gruppo del Sempione.* Nota del Socio T. Taramelli.

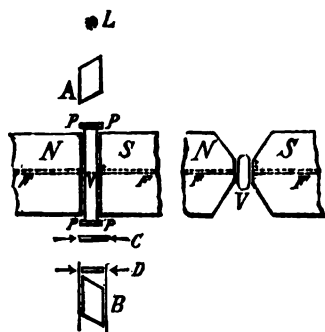
A conferma della supposizione fatta da me nel 1882, quando ebbi l'onore di prender parte alla Commissione pel progetto preliminare del grande tunnel, le ulteriori osservazioni all'esterno delle montagne presso al Sempione ed i dati forniti dal traforo sino ad ora compiuto, hanno dimostrato che l'affioramento calcare lungo la destra del torrente Cairasca è sicuramente la continuazione della zona calcare trovata dopo il gneiss di Antigorio dal lato sud, a circa quattro chilometri dall'imbocco. Per conseguenza, la serie sul versante meridionale del M. Leone sarebbe completamente ribaltata,

presso a poco come aveva supposto il Gerlach per l'alta valle Cairasca. È uno dei più complicati problemi stratigrafici, che il nostro Ufficio geologico concorrerà a studiare coi geologi svizzeri, contribuendo così alacremente all'esatta conoscenza della tectonica delle Alpi centrali. Per ulteriori dettagli, io mi riporto ad una mia recente pubblicazione nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Geologia. — *I terreni terziarî della Provincia di Roma. I. Eocene.* Nota del Corrispondente Carlo De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul metodo e sulle sostanze da adoperarsi, per osservare la birifrangenza magnetica.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Disposizione sperimentale. — Riferendomi a quanto esposi nella Nota preliminare precedente, comincio col dire della disposizione sperimentale, adottata per la ricerca dei casi di birifrangenza magnetica. Il campo magnetico era generato da un elettrocalamita tipo Weiss, costruita dal Santarelli di

Firenze. Poichè sperimentai in principio con sottili film di ferro trasparenti, deposti mediante la scarica elettrica nel vuoto, su lamine di vetro, cominciai col guarnire i due poli della elettrocalamita di espansioni coniche molto ravvicinate, raggiungendo così un valore del campo di circa 30.000 u. Ma questo tentativo, ed altri su cui non insisto, non diedero risultati apprezzabili, per cui decisi di studiare le soluzioni acquose di sostanze magnetiche. Per conseguenza sostituii alle espansioni coniche, delle altre lineari orizzontali N,S (viste nella figura in proiezioni orizzontale e verticale), tra le quali resta compreso un intraferro di circa 8 millimetri. La lunghezza del campo, normalmente alle linee di forza, è eguale al diametro dei nuclei di ferro dell'elettromagnete, cioè 7 centimetri. L'intensità del campo potè rapidamente

essere misurata al centro delle espansioni, essendo queste fornite di fori F del diametro di 1^{mm}; collocando in quel punto una vaschetta (non quella della figura) a pareti sottilissime di vetro riempita di benzolo (sostanza che ha un potere rotatorio magnetico riferito all' acqua uguale a 2,592), poteva misurarsi la rotazione del piano di polarizzazione di un sottile fascio luminoso polarizzato traversante il foro F. Con ciò fu costruita una tabella dalla quale si poteva dedurre, per ogni intensità di corrente, il valore del campo al centro.

Non furono fatte misure sugli altri punti del campo, bastando in prima approssimazione la conoscenza del valore al centro. Si riconobbe in tal guisa che il valore massimo del campo, ossia quello corrispondente alla massima intensità della corrente, era di 18.000 unità circa.

La vaschetta V, lunga anch' essa 7 cm., è destinata a contenere il liquido da studiare, e fu ottenuta in diverse guise, e cioè sia masticiando insieme pezzi di vetro sottile, sia schiacciando a caldo un tubo cilindrico di vetro di 1 cm. di diametro, su di un' apposita sagoma di acciajo rovente. In ogni caso però occorrevano speciali avvertenze, nella scelta delle pareti PP di vetro, le quali erano fissate con mastice al resto.

Generalmente, per una determinata vaschetta, venivano tagliate, da un ottima lastra da specchio, due striscioline di vetro incrociate, orientate con una differenza di 90°, sopra una dimensione qualunque della lastra. Con ciò si veniva a correggere, più che fosse possibile, la birifrangenza accidentale posseduta dal vetro adoperato.

Come sorgente di luce L fu adoperata in principio una piccola lampada elettrica, resa incandescente da una corrente eccessiva, talchè il filamento di carbone fosse molto brillante. Debbo a questo piccolo particolare, se mi accorsi di fenomeni che non potei mai scorgere con l' uso di semplici fiamme. Ma in seguito, essendo divenuto troppo dispendioso l' uso delle lampade elettriche (ciascuna di esse non durava più di un paio d' ore), sostituii a queste un arco voltaico. Questa sorgente offre l' inconveniente di essere poco costante, ma essendo in compenso più intensa, con un po' di pratica si riesce a potere osservare fenomeni tanto deboli come col primo metodo. Tra il polarizzatore A e l' analizzatore B sono comprese oltre la vaschetta V, contenuta nel campo, due lastrine di vetro grosso 2 mm. circa, portate da due montature distinte, capaci di esercitare una compressione sopra ciascuna, normalmente all' asse ottico del sistema. La lastrina C è con la sua montatura, girevole intorno al percorso del raggio luminoso, ed è destinata a compensare, mediante conveniente compressione e rotazione, la residua e inevitabile birifrangenza della vaschetta V. La seconda lastrina D è portata dalla montatura del nicol B, può girare in essa e segue il movimento di B quando questo ruota. Essa può venire come ho detto compressa; e la compressione si esercita mediante una vite che lavora su di una molla a spirale di acciajo, interposta fra la vite e il vetro. Dallo schiacciamento della molla, e da apposita tabella,

costruita empiricamente in precedenza, si può conoscere immediatamente il valore della birifrangenza, generata nel vetro. Si intende che D funziona come compensatore della birifrangenza che si studia, generata dal campo nel liquido della vaschetta.

Quando la molla del compensatore D è del tutto schiacciata, la birifrangenza generata è di circa un quarto d'onda nel giallo; mediante compressioni minori si può apprezzare in condizioni favorevoli, sino a $^1/_{250}$ di lunghezza d'onda.

In fine dirò che tanto l'analizzatore che il polarizzatore, sono montati su cerchi graduati; e che la graduazione circolare dell'analizzatore permette di misurare rotazioni di questo, sino a un minuto primo e anche meno.

Modo di sperimentare. — È ora ovvio il modo di sperimentare. Introdotto il liquido nella vaschetta, e regolato il sistema dei nicol e dei compensatori all'oscurità, se il piano di polarizzazione è parallelo alle linee di forza o normale, non si vede ricomparire mai la luce eccitando il campo, a meno che l'asse ottico del sistema sia un po' inclinato sulle linee di forza; in tal caso si ha da fare con una traccia di rotazione Faraday. Si corregge allora questa dissimetria, spostando convenientemente le varie parti dell'apparecchio. Ponendo invece i nicol a 45° sulle linee di forza, se il liquido è attivo, si vede ricomparire la luce. Essa si può far sparire comprimendo D parallelamente o normalmente alle linee di forza. Questi due casi corrispondono a comportamenti del liquido, sotto l'azione del campo, simili a quelli di cristalli ad un asse parallelo alle linee di forza, rispettivamente positivi o negativi. Se mediante qualsiasi compressione di D, la luce non iscompare sia in parte che totalmente, o si ha da fare ancora con la dissimetria di cui ho già detto, e allora basta girare l'analizzatore in un senso piuttosto che nell'altro, a seconda del senso del campo, per farla scomparire e quindi accorgersene; o il fenomeno è dovuto a *rotazione bimagnetica.* Tralascio di occuparmi di quest'ultimo caso, e intenderò che per ora si volga la nostra attenzione ai soli liquidi dotati di netta birifrangenza magnetica.

Infine avverto che il compensatore D serve evidentemente solo sino a birifrangenze inferiori a $^1/_4$ di lunghezza d'onda. Per valori maggiori si procede alla misura come verrà indicato in altra Nota.

Liquidi attivi. — Incominciai le ricerche sperimentando su soluzioni di cloruro ferrico. Se questo sale è puro, e se quelle non contengono ossicloruri disciolti, la qualcosa può essere causata dall'età eccessiva del prodotto, o da prolungata azione del calore o della luce, le soluzioni si mostrano completamente inattive. In altro scritto dirò quali sieno le proprietà magneto-ottiche di soluzioni di cloruro ferrico alterato.

La soluzione di cloruro ferroso preparata di recente, facendo agire l'acido cloridrico disciolto in acqua, su piccoli chiodi di ferro in eccesso, filtrata e diluita, tanto che il sale non cristallizzi a freddo, dà spesso una traccia di birifrangenza positiva. Basta una piccolissima compressione del vetro del compensatore, parallelamente alle linee di forza, per far scomparire la luce comparsa per l'eccitazione del campo. Se questo ha il valore massimo (18,000 unità), la differenza di cammino dei due raggi ordinario e straordinario è uguale a circa 2 o 3 centesimi di lunghezza d'onda nel giallo.

Essendo il cloruro ferroso eminentemente ossidabile all'aria, e tenuto conto delle circostanze che danno luogo ai fenomeni magneto-ottici di cui è oggetto questo studio, e delle quali dirò in seguito, mi è sorto il dubbio che la birifrangenza del cloruro ferroso possa non esser dovuta alla sola presenza di questo sale nella soluzione acquosa, e che forse minime tracce di ossidi superiori intervengano nella determinazione del fenomeno. È difficile risolvere una tal questione, anche perchè si tratta di un fenomeno debolissimo, che talvolta manca.

Ferro dializzato. — Ma la soluzione che se non sempre, spessissimo presenta in una guisa netta, e talvolta marcatissima la birifrangenza, è il ferro dializzato.

E poichè questo fenomeno può osservarsi in misura variabilissima, dipendentemente dalla natura del ferro dializzato e dalla intensità del campo, dirò anzitutto delle varie forme con cui esso si presenta.

1° tipo di ferro dializzato attivo. — Esso dà una netta birifrangenza positiva, regolarmente crescente con la intensità del campo. In ogni caso si può compensare il fenomeno mediante compressione del vetro D parallelamente alle linee di forza.

2° tipo. — Esso si comporta come il primo tipo, colla differenza del segno della birifrangenza. Essa è sempre negativa, e per compensarla, occorre comprimere D normalmente alle linee di forza.

3° tipo. — I campioni di questo tipo presentano per campi deboli una birifrangenza positiva. Successivamente, al crescere del campo, questa decresce, e vi è un certo valore, diverso da zero, dell'azione magnetica per cui la birifrangenza ritorna a zero (punto di inversione). Continuando a far crescere il campo, la birifrangenza diventa negativa e cresce regolarmente, in valore assoluto, sino ai campi più intensi.

4° tipo. — Si ha da fare in questo caso con ferri dializzati i quali presentano birifrangenza non molto forte, mista a *rotazione bimagnetica.* Di essi non vogliamo, come ho già detto, occuparci per ora.

Tra i numerosi campioni di ferro dializzato su cui ho sperimentato, non ne ho mai osservato alcuno che presenti in principio birifrangenza negativa e al crescere del campo la positiva. Ma, ripeto, è tale la varietà dei fenomeni

da me osservati, che non è da escludersi che accurate ricerche posteriori possano svelare l'esistenza di questo quinto tipo; benchè io non creda ciò molto probalile.

Origine dei vari tipi di ferro dializzato. — I modi di preparazione del ferro dializzato sono parecchi. Ma sembra che più che il modo di preparazione, influisca sulla attività dei varî tipi, la data più o meno recente di preparazione del prodotto e del cloruro ferrico adoperato per ottenere quello. Io ho ottenuto il ferro dializzato nel modo seguente. Si preparino tre volumi di una soluzione di cloruro ferrico della densità 1,280 e si trattino con un volume di ammoniaca alla densità 0,96. L'ossido ferrico che così precipita si ridiscioglie, agitando il matraccio a freddo, nel cloruro ferrico eccedente. A tal punto il liquido è ancora inattivo, non essendo stata in nessun caso osservata traccia di birifrangenza.

Dializzando la soluzione, sia all'acqua corrente, che all'acqua distillata, se la membrana di dialisi è buona (e all'uopo serve benissimo una pergamena animale di mm. 0,08 di spessore e non più), già dopo 24 ore si può, il più delle volte, osservare il fenomeno della birifrangenza.

Prolungando l'operazione della dialisi si migliora il fenomeno, e per dire il vero non sono riuscito, nei pochi mesi da me impiegati in queste ricerche, ad ottenere del ferro completamente dializzato. Tutti i campioni da me preparati trattati con acido nitrico, onde trasformare l'ossido ferrico in nitrato, precipitano per l'aggiunta di poche gocce di soluzione di nitrato di argento, restando così svelata la presenza di cloro, talvolta in misura considerevole. Dialisi prolungata anche per 20 giorni, non fu dunque capace di asportare completamente dal liquido i cloruri.

Onde sperimentare con i vari tipi di ferri dializzati, occorre sempre diluirli con acqua; giacchè la vaschetta V riempita, sarebbe altrimenti completamente opaca alla luce. Nelle misure che riporterò in seguito dirò della densità dei singoli campioni adoperati. Con ciò non vorrò dare un valore assolutamente preciso di quella grandezza, poichè avendo proceduto a diluizioni molto spinte, tenni come valore della densità in ogni caso, quello derivante dalla conoscenza della diluizione stessa, supponendo che resti costantemente uguale all'unità la densità dell'acqua pura.

Il ferro dializzato da me ottenuto, nei casi più favorevoli, portato alla densità 1,002 presenta una birifrangenza positiva nel giallo uguale a 0,12 λ; e ciò ben inteso per la vaschetta di 7 cm. di lunghezza, e sotto l'azione del campo di 18,000 u.

Esso appartiene al *primo tipo*; e mai ottenni colla preparazione indicata campioni degli altri tipi. Anzi accadde talvolta che accurate preparazioni si mostrarono completamente inattive. La spiegazione di tal fatto è da ricercarsi studiando la provenienza del cloruro ferrico adoperato.

Quando quel sale fu ritirato dalle rivendite che si trovano in Roma, il ferro dializzato si mostrò attivo. Cloruro ferrico proveniente dalla casa Kahlbaum di Berlino, posseduto dall' Istituto Chimico Farmaceutico di Roma già da qualche anno, diede risultati meno soddisfacenti, benchè fosse ancora notevole la birifrangenza positiva. E infine avendo ritirato quel sale direttamente dalla casa Kahlbaum, il ferro dializzato ottenuto si mostrò quasi completamente inattivo. Per cui debbo concludere, con una certa probabilità, che maggiore è l'età del sale ferrico, e più spiccatamente si osserva il fenomeno di cui è questione.

Non mancai infine di sperimentare con campioni di ferro dializzato ritirati direttamente dal commercio, e fui molto contento di ciò, poichè mi accorsi che quei campioni presentano spesso fenomeni spiccatissimi.

In commercio si trova una grande varietà di quei campioni, giacchè, come è noto, il ferro dializzato era un farmaco una volta molto adoperato, e che ora comincia a cadere in disuso.

Il caso più comune che si osserva, sperimentando su tali campioni, è ancora quello del primo tipo, ed è abbastanza facile trovare, per una densità del liquido uguale a 1,002, che la vaschetta V presenti una birifrangenza di circa 0,25 λ nel giallo, sotto l' azione di 18,000 u. In tali condizioni girando comunque l' analizzatore, non si riesce a far variare sensibilmente la luce ricomparsa, salvo lievi variazioni di tinta, dovute ai diversi valori della birifrangenza per i diversi colori.

Tra i ferri dializzati che comunemente provengono dal commercio, è più difficile ritrovare il secondo o il terzo tipo. Questi sono invece offerti dallo studio di campioni di *Ferro Bravais*, e di *Ferro Carlo Erba*. Essendo questi liquidi specialità delle rispettive case, è più facile ritrovarne nelle farmacie dei vecchi campioni. E mi sia permesso di insistere sul seguente particolare, che credo sia essenziale per chi desidera fare ricerche sull' argomento.

Il ferro Bravais è conosciuto da oltre 30 anni. Esso vien posto in commercio in iscatole chiuse, contenenti una piccola boccetta col liquido. Ora, unita alla boccetta si trova una piccola monografia a stampa, dalla quale non risulta chiaramente l' epoca in cui il campione è stato preparato, ma dall' esame dei diplomi o delle medaglie ottenute dall' inventore, si può con grande probabilità presumere un limite superiore dell' età del prodotto.

È così che ritengo che alcuni campioni da me sperimentati, non hanno una età inferiore ai 16 o 18 anni, sino ad arrivare ad altri di un solo anno.

Il ferro Bravais vecchio, di età superiore cioè ai dieci anni, portato alle densità 1,001, col solito campo massimo e nella vaschetta V, ha talvolta un potere birifrangente negativo, uguale a dodici lunghezze d' onda nel verde!

Per campi deboli si ha invece quasi sempre birifrangenza positiva; ma questa parte pel fenomeno è di fronte all'altra pochissimo accentuata.

Quel liquido appartiene dunque al *terzo tipo*. Sperimentando invece su campioni di Ferro Bravais recente, posteriori cioè al 1900, ne potei trovare, benchè raramente, taluno del *secondo tipo*, e in ogni modo i fenomeni da essi forniti sono sempre molto più deboli di quelli dei campioni vecchi.

Il *Ferro Erba* mi ha dato risultati analoghi. Di esso non ne trovai di antecedente al 1887; e i suoi campioni si mostrarono meno attivi del *Bravais*.

Per completare questa esposizione, voglio accennare al fatto che fra tutti i liquidi su cui ho sperimentato, solo il Ferro Bravais vecchio, fu trovato assolutamente privo di cloro. I campioni recenti, a causa forse del peggiorato modo di preparazione, precipitano spesso abbondantemente se disciolti prima nell'acido nitrico e trattati dopo con nitrato d'argento. Rimane dunque il dubbio che anche l'assoluta assenza del cloro, o in altri termini la purezza dell'ossido ferrico allo stato colloidale, possa far sì che col tempo il prodotto divenga attivo.

Essendo ormai abituato alla conoscenza dei campioni attivi, posso dire che spesso un semplice esame preventivo basta, per giudicare se il liquido presenterà fenomeni magneto-ottici notevoli. Ed anzitutto mentre il ferro dializzato recente è di aspetto limpidissimo, colorato in un bel rosso-rubino, quello vecchio ha un aspetto torbido ed un colore più scuro. Si tratta solamente dell'aspetto, perchè filtrato ripetutamente riman sempre lo stesso. L'apparenza torbida la si rileva esaminando il liquido alla luce per riflessione e non per trasparenza.

Chimicamente possono differenziarsi i ferri dializzati nella maniera seguente. Tutti i campioni trattati con acido nitrico concentrato, precipitano; se essi sono inattivi il precipitato si ridiscioglie *immediatamente* senza bisogno di scaldare. Per poco che il liquido sia attivo, sperimentando in una piccola provetta, occorrono già trenta o quaranta secondi prima che avvenga la completa trasformazione dell'ossido ferrico in nitrato. E se poi si ha da fare coi ferri Bravais, Erba, molto vecchi, si deve far bollire il liquido per dieci minuti primi circa, nella provetta, per ottenere lo stesso scopo.

Si vede dunque che probabilmente, coll'invecchiare del prodotto, le molecole o particelle minime di ossido ferrico, contenute allo stato colloidale nell'acqua, si modificano, in guista da resistere molto di più all'azione degli acidi, e da generare i fenomeni di birifrangenza.

In una prossima Nota dirò delle leggi a cui questi fenomeni obbediscono.

Fisica. — *Osservazioni sulla rotazione magnetica del piano di polarizzazione nell'interno di una riga di assorbimento.* Nota di P. ZEEMAN, presentata dal Socio W. VOIGT.

1. Il prof. Voigt ha sviluppato una teoria molto comprensiva dei fenomeni magneto-ottici, i cui risultati sono stati confermati in modo assai completo dall'osservazione. Solo per la rotazione magnetica del piano di polarizzazione le osservazioni di Schmauss e di Corbino hanno condotto a risultati, che da questi autori furono considerati in contraddizione colla teoria. Ora una contraddizione in questo campo speciale, strettamente collegato con altri fenomeni, sarebbe abbastanza strana. Bisogna però riconoscere di fronte al Corbino che appariva molto desiderabile di constatare direttamente la rotazione negativa prevista dal Voigt.

Occupato da lungo tempo in ricerche sopra questo argomento sono giunto in fine a risultati, che presentano una coincidenza qualitativa così completa colla teoria del Voigt, quale non si potrebbe desiderare maggiore. Mi sia permesso di riferire qui in via preliminare questi risultati.

2. Nelle mie esperienze, in cui il signor Hallo mi ha aiutato con grande diligenza, ho adoperato, come il Corbino, frange di interferenza prodotte da un sistema di prismi di quarzo a spigolo orizzontale. Questo sistema fu posto nell'immediata prossimità della fessura dell'apparecchio spettroscopico (un reticolo di Rowland con raggio di m. 6,5 e 14400 linee per pollice). Dietro alla fessura, fra questa ed il reticolo era posto un piccolo nicol; la montatura del reticolo era quella adottata da Runge e Paschen (Kayser, *Spectralanalyse*, I, 482), in cui la luce cade parallelamente. Come sorgente luminosa serviva per lo più un arco ed in alcuni casi luce solare. La distanza delle espansioni polari forate era nelle esperienze, che descriverò in prima linea, di circa 4 mm. ed il campo intorno a 18000 C. G. S. In questo campo venne posta una fiamma a gas ed ossigeno. Allontanando il nicol polarizzatore ed il sistema dei prismi di quarzo e colorando la fiamma mediante un'asta di vetro, si vedevano comparire le due componenti delle doppiette, in cui si risolvono le linee D sotto l'azione del campo. Fra le linee delle doppiette comparivano le strie di assorbimento molto sottili appartenenti alla sorgente luminosa. Dopo posto il nicol polarizzatore ed il sistema di prismi di quarzo, si producevano nel campo visivo le frange di interferenza orizzontali.

Per la D_1 si osservavano allora i seguenti fenomeni variando in modo continuo la densità dei vapori sodici, mentre si manteneva costante l'intensità del campo.

Sinchè il vapore del sodio era pochissimo denso, si osservava nella posizione della stria invertita una flessione molto leggera della frangia di interferenza — diciamo verso il basso —, e nel medesimo tempo le linee della doppietta erano un po' più marcate che non prima dell' introduzione del sistema di prismi. Il punto in cui esse erano più marcate, era immediatamente al disopra della frangia di interferenza; più in su esse perdevano rapidamente in intensità.

Crescendo ora la densità del vapore (pur mantenendola ancora molto piccola), le parti esterne della frangia di interferenza contigue alle due componenti si piegavano verso l'alto; nel medesimo tempo la porzione interna si staccava in modo che veniva a mancare la continuazione fra questa e le parti esterne. Gli estremi del tratto interno poi apparivano piegati verso il basso.

Crescendo ancora la densità del vapore, il tratto interno della frangia cadeva rapidamente verso il basso ed assumeva una forma simile a quella di una freccia con punta diretta verso l'alto. Gli estremi della frangia interna intanto erano scomparsi, mentre le frangie esterne si innalzavano sempre più. Finalmente scompariva anche la parte a forma di freccia del tratto interno, mentre questo cadeva sempre più in basso. A questo punto tutto lo spazio interno compreso fra le frangie esterne appariva debolmente ed uniformemente luminoso: solo la linea invertita della sorgente luminosa restava oscura. Un ulteriore aumento della densità del vapore andava però oscurando il campo visivo (vedi al 5).

In un campo di 18000 unità si poteva seguire il movimento del tratto interno della frangia verso il basso per uno spazio eguale alla distanza di 3 frangie. Questo corrisponde ad una rotazione negativa di circa $3 \times 180^{\circ}$, in cifra tonda 500°. Regolando convenientemente la quantità di sodio fornita alla fiamma, si poteva osservare a lungo ciascuno degli stadî ora descritti.

Per la D_2 le cose si presentavano all'incirca nel medesimo modo; però il fenomeno presentava un carattere proprio. Ricorderò qui solo la forma un po' diversa del tratto interno, come pure la sparizione più rapida di essa in confronto colla D_1.

3. Mantenendo costante la densità di vapore per quanto era possibile, si potè constatare che la rotazione negativa decresce col crescere dell' intensità del campo. Questa diminuzione della rotazione poteva venire constatata direttamente, senza misure, facendo salire l'intensità del campo p. e. da 18000 a 25000 unità. Questa variazione è particolarmente netta per valori elevati della rotazione negativa stessa; chè, se questa era piccola, si poteva osservare una variazione molto minore per un medesimo cambiamento del campo.

4. Le osservazioni riferite al 2. ed al 3. sono pienamente d'accordo con la teoria del Voigt. Il valore elevatissimo della rotazione negativa ed il segno, secondo cui questa varia al crescere del campo furono previsti da detta teoria. Per paragonare teoria ed osservazione sotto questo punto di vista,

basta conoscere il valore di P, per il quale si deve fare questo paragone. Secondo l'aspetto del fenomeno io ho potuto in ogni caso, riferendomi alla figura del Voigt, giudicare quale P io dovessi scegliere. Ai valori più grandi della rotazione negativa osservati (vedi al 2) corrispondono valori di P, che si possono stimare a 5 o 7; mentre alle rotazioni più piccole ancora facilmente osservabili, corrisponderebbe, in campo intenso, un valore intorno a 1,73.

5. Con vapore sodico molto denso, per cui veniva oltrepassato l'ultimo stadio descritto al 2. ottenni fenomeni, che si possono ritenere identici a quelli osservati dal Corbino. Allora nella mia disposizione era necessario allargare alquanto la fenditura per ottenere un'intensità luminosa sufficiente.

Presso alla metà della stria di assorbimento si nota un tratto orizzontale di una frangia d'interferenza, il quale viene apparentemente spostato verso l'alto sotto l'azione del campo. Questo tratto orizzontale è però molto più pallido e si presenta meno nettamente che non il tratto interno descritto al 2. I valori numerici degli spostamenti da me osservati sono dello stesso ordine di quelli comunicati dal Corbino. Però questi fenomeni non sono da considerarsi come contraddicenti alla teoria. Le condizioni sono qui molto meno semplici e molte spiegazioni possibili si presentano alla mente; per limitarne la scelta, sarebbe desiderabile istituire ulteriori osservazioni.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota III del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In altre due Note, pubblicate con lo stesso titolo nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei [1], ho studiato il modo d'una *catena di corpi rigidi* comunque articolati fra loro e in particolare d'una catena composta di due pendoli sferici. Proseguendo ora nell'applicazione dei risultati generali stabiliti fin da principio, mi propongo di studiare sistematicamente, in questa Nota e in altre che eventualmente seguiranno, la teoria dei varî strumenti sismici, considerandoli come costituiti ciascuno da un *unico corpo rigido* sospeso *almeno per un punto* al terreno, cioè supponendo che ciascuno d'essi realizzi il sistema dinamico della catena ridotta ad un corpo solo.

Per evitare ripetizioni, suppongo note al lettore le altre due pubblicazioni di questa serie, e quindi, in particolare, il significato dei simboli e delle locuzioni che verranno usati in seguito: di più convengo di omettere l'indice r, che serviva a fissare l'ordine dei vari corpi costituenti la catena, perchè d'ora in poi esso avrebbe sempre il valore $r=1$.

[1] Vedi seduta del 4 maggio, pag. 380 e del 18 maggio, pag. 433. Queste Note verranno sempre indicate per brevità col loro numero d'ordine I e II.

11. Ricordando la equazione (8) e la convenzione testè fatta, si trova che il movimento di qualunque strumento sismico è retto dall'equazione simbolica

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{H}\delta\lambda + \mathrm{K}\delta\mu + \mathrm{L}\delta\nu = 0$$

essendo (v. la (E'), I, pag. 385)

$$\mathrm{H} = \sum_{\mathrm{C}} {}_i (\eta_i - \eta)(Z_i - m_i \zeta''_i) - \sum_{\mathrm{C}} {}_i (\zeta_i - \zeta)(H_i - m_i \eta''_i), \text{ etc.},$$

$$\text{(12)} \qquad \xi_i - \xi = x_i + \chi z_i - \varrho y_i\,, \text{ etc.}$$

Queste equazioni furono dedotte supponendo soltanto che le rotazioni siano infinitesime e che i varî sistemi d'assi cartesiani coincidano nel caso di traslazioni e rotazioni identicamente nulle.

Venendo ora ad esaminare le forze a cui uno strumento sismico è soggetto, si trova che esse possono in qualsiasi caso ridursi alle seguenti:

1°) la gravità, cioè il peso dello strumento;

2°) le varie resistenze passive, che si oppongono al suo movimento apparente o relativo, e che si possono ritenere infinitesime rispetto alla gravità [1].

Siccome il movimento relativo è una rotazione infinitesima intorno all'origine, così la *risultante di queste resistenze* sarà appunto *una coppia di momento infinitesimo intorno all'asse permanente o istantaneo di rotazione.*

Senza fare alcuna ipotesi sulla natura della coppia resistente, per maggiore comodità di calcolo la decompongo in due coppie distinte, alle quali sostituiscono due forze di momento eguale [2], applicate nei punti

[1] Infatti queste resistenze si possono raccogliere in tre gruppi: *a*) l'attrito o l'elasticità degli organi di attacco (punte, perni, fili o molle di sospensione); *b*) l'attrito degli organi registratori del movimento; *c*) la resistenza dell'aria. Si osservi ora che il movimento assoluto degli strumenti si compone d'un movimento relativo al terreno e del movimento sismico: sarebbe assurdo il pensare che quando il movimento apparente è nullo, cioè quando lo strumento è immobile oppure vien trascinato rigidamente nel moto del terreno, possano agire le resistenze *a*) e *b*) che sono di natura affatto strumentale; quindi per queste due la prima parte dell'asserzione apparisce evidente. Invece non è evidente per la *c*): ma si badi che probabilmente durante un movimento microsismico la massa d'aria circostante allo strumento viene trascinata come un tutto rigido insieme con la custodia dove lo strumento è racchiuso, cosicchè anch'essa effettivamente viene ad opporsi soltanto al moto relativo; del resto l'estrema piccolezza di questa resistenza rende superflua ogni considerazione a suo riguardo. Quanto alla seconda asserzione, essa è praticamente giustificata da tutti gli strumenti dei quali intendo occuparmi; ad ogni modo la assumo come un *postulato sperimentale.*

[2] Veramente non si potrebbe *a priori* sostituire ad una coppia una unica forza; ma nel caso attuale la sostituzione è legittima perchè le equazioni che seguiranno tosto

$P_1(x_1 y_1 z_1)$ e $P_3(x_3 y_3 z_3)$ di componenti infinitesime $(\Xi_1 H_1 Z_1)$, $(\Xi_3 H_3 Z_3)$. Allora, chiamando (Ξ_2, H_2, Z_2) le componenti del peso, che si può ritenere applicato al baricentro $P_2(x_2 y_2 z_2)$, supponendo che gli assi solidali col corpo siano paralleli agli assi principali d' inerzia e che uno d'essi passi per il baricentro, *senza fare alcuna ipotesi sull'ordine di grandezza delle traslazioni*, abbiamo

$$H = \sum_1^3 {}_i Z_i(\eta_i - \eta) - \sum_1^3 {}_i H_i(\zeta_i - \zeta) +$$

$$+ \eta'' M(z_2 - \chi x_2 + \pi y_2) - \zeta'' M(y_2 + \varrho x_2 - \pi z_2) - \pi'' M^{(x)}, \text{ etc.}$$

Sostituendo poi ai binomi $(\xi_i - \xi), \ldots$ le loro espressioni date dalle (12) e omettendo i termini che contengono i prodotti delle rotazioni per le forze infinitesime, avremo infine:

$$(13)\begin{cases} H = \sum_1^3 {}_i (Z_i y_i - H_i z_i) + x_2(H_2 \chi + Z_2 \varrho) - \pi(H_2 y_2 + Z_2 z_2) + \\ + \eta'' M(z_2 + \pi y_2 - \chi x_2) + \zeta'' M(-y_2 - \varrho x_2 + \pi z_2) - \pi'' M^{(x)}, \\ K = \sum_1^3 {}_i (\Xi_i z_i - Z_i x_i) + y_2(Z_2 \varrho + \Xi_2 \pi) - \chi(Z_2 z_2 + \Xi_2 x_2) + \\ + \zeta'' M(x_2 + \chi z_2 - \varrho y_2) + \xi'' M(-z_2 - \pi y_2 + \chi x_2) - \chi'' M^{(y)}, \\ L = \sum_1^3 {}_i (H_i x_i - \Xi_i y_i) + z_2(\Xi_2 \pi + H_2 \chi) - \varrho(\Xi_2 x_2 + H_2 y_2) + \\ + \xi'' M(y_2 + \varrho x_2 - \pi z_2) + \eta'' M(-x_2 - \chi z_2 + \varrho y_2) - \varrho'' M^{(z)}. \end{cases}$$

12. Prima di procedere nella trattazione generale, conviene fare alcune considerazioni sulle varie categorie di strumenti. Il loro movimento è sempre una rotazione intorno all'origine delle coordinate: però si possono distinguere tre casi speciali corrispondenti ai diversi gradi di libertà.

Se il corpo è sospeso per un punto solo, sono arbitrarie tutte e tre le rotazioni elementari apparenti, e il moto è retto dalle tre equazioni indipendenti

$$H = K = L = 0.$$

Se il corpo oscilla intorno a una sua retta e questa può rotare intorno a un'altra retta fissa nel terreno e giacente in un piano con la prima (p. e. nel caso d'una sospensione cardanica), esistono due gradi di libertà,

avrebbero l'identica forma anche se, in luogo delle due forze considerate, ne esistessero quattro, di componenti $(\pm \frac{1}{2}\Xi_1, \ldots\ldots)$, $(\pm \frac{1}{2}\Xi_3, \ldots\ldots)$ applicate rispettivamente nei punti $(\pm x_1, \ldots.)$, $(\pm x_3, \ldots.)$, e costituenti appunto due coppie di momenti eguali ai momenti delle due forze.

cioè il moto è retto da due equazioni differenziali i cui primi membri sono combinazioni lineari di H, K, L, variabili a seconda della direzione degli assi di rotazione.

Infine se il corpo oscilla intorno ad una sua retta fissata al terreno, è arbitraria soltanto la sua rotazione ω intorno a questa retta: chiamando p, q, r i coseni di direzione (costanti) dell'asse di sospensione rispetto agli assi X, Y, Z, solidali col terreno, abbiamo

$$\lambda = p\omega\,, \quad \mu = q\omega\,, \quad \nu = r\omega\,;$$

quindi l'equazione (11) dà luogo all'unica equazione effettiva del moto:

$$p\mathrm{H} + q\mathrm{K} + r\mathrm{L} = 0\,,$$

nella quale si intendono sostituiti a λ, μ, ν le loro espressioni sopra scritte.

13. Alla prima categoria di strumenti appartengono i pendoli verticali (p. e. Brassart, Agamennone, Vicentini), la cui teoria fu già da me studiata in altri lavori [1], ma che riprendo in questa trattazione sommaria per darle maggior generalità ed esattezza.

Supponendo, come farò sempre d'ora in poi, che l'asse delle ζ sia diretto secondo la gravità, abbiamo intanto:

$$\Xi_2 = H_2 = 0\,, \quad Z_2 = \mathrm{M}g \tag{14}$$

Decomponendo poi la coppia resistente in una coppia intorno ad un asse orizzontale e un'altra intorno ad un asse verticale, supporrò che il punto $\mathrm{P}_1\,(x_1\, y_1\, z_1)$ sia sull'asse delle z e coincida col baricentro P_2, e il punto $\mathrm{P}_3\,(x_3\, y_3\, z_3)$ sia sull'asse delle x; cosicchè chiamando, come farò sempre, l la distanza del baricentro dall'origine, abbiamo:

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = y_3 = z_3 = 0\,,$$
$$z_1 = z_2 = l\,.$$

Ricordo infine le eguaglianze

$$\pi = \alpha + \lambda\,, \quad \chi = \beta + \mu\,, \quad \varrho = \gamma + \nu \tag{15}$$

e così dalle (13) si ricavano le equazioni effettive del moto:

$$\left\{\begin{aligned} \xi''\, m_y + \beta'' + \beta g m_y - \zeta''\, \chi m_y + \Phi = 0 \\ -\eta''\, m_x + \alpha'' + \alpha g m_x - \zeta''\, \pi m_x + \Psi = 0 \\ \gamma'' + (\xi''\, \pi + \eta''\, \chi)\, m_z + X = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

avendo posto

$$m_x = \frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{M}^{(x)}}\,, \quad m_y = \frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{M}^{(y)}}\,, \quad m_z = \frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{M}^{(z)}}\,, \tag{Q}$$

[1] *Sulla determinazione dei moti sismici*, Note pubblicate in questi Rendiconti, vol. X, 1° sem., serie 5ª, fasc. 5° e 6°; v. anche II, pag. 439.

e avendo raccolto i termini che non dipendono esplicitamente dalle componenti del moto sismico nelle funzioni:

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} \Phi = \mu'' + \mu g m_y + \dfrac{Z_3 x_3 - \Xi_1 l}{\mathrm{M}^{(y)}} \\ \Psi = \lambda'' + \lambda g m_x + \dfrac{H_1 l}{\mathrm{M}^{(x)}} \\ X = \nu'' - \dfrac{H_3 x_3}{\mathrm{M}^{(z)}} \end{cases}$$

Fra i vari casi che si potrebbero esaminare particolarmente, è interessante quello in cui il punto di sospensione coincide col baricentro.

Le equazioni dinamiche d'un tale strumento si possono ottenere dalle precedenti, purchè si supponga $l = 0$, e purchè il punto P_1, pure restando sull'asse delle z, si trovi a una distanza dall'origine z_1 diversa da zero. Così procedendo si ottiene:

$$(16_1)\qquad \beta'' + \Phi_1 = 0\,,\quad \alpha'' + \Psi_1 = 0\,,\quad \gamma'' + X_1 = 0\,,$$

essendo

$$(\mathrm{R}_1)\qquad \begin{cases} \Phi_1 = \mu'' + \dfrac{Z_3 x_3 - \Xi_1 z_1}{\mathrm{M}^{(y)}}\,,\quad \Psi_1 = \lambda'' + \dfrac{H_1 z_1}{\mathrm{M}^{(x)}} \\ X_1 = \nu'' - \dfrac{H_3 x_3}{\mathrm{M}^{(z)}}\,, \end{cases}$$

Da queste equazioni apparisce che « un corpo rigido sospeso per il suo baricentro si mostra inerte di fronte a qualsiasi movimento traslatorio del terreno, e quindi *è atto a registrare soltanto le rotazioni* » (1).

14. Alla seconda categoria di strumenti si potrebbero ascrivere con grande approssimazione quelli costituiti da una sbarra elastica cilindrica o prismatica, fissata al terreno per una estremità e caricata all'altro estremo da una massa oscillante.

Infatti durante i piccoli movimenti dell'estremità libera, corrispondenti all'oscillazione fondamentale, si può prescindere dalle deformazioni elastiche della sbarra, le quali sono infinitesime rispetto alle sue dimensioni, e supporre che il tutto ruoti rigidamente intorno ad un asse istantaneo giacente nel piano della sezione incastrata (2). Lo studio del suo movimento sarebbe assai più difficile nel caso di vibrazioni corrispondenti alle armoniche supe-

(1) Questa conseguenza mi pare importante anche per le applicazioni pratiche, perchè uno strumento di tal natura, servirebbe a risolvere la questione tanto dibattuta sulle onde lente caratteristiche dei terremoti lontani.

(2) A rigore bisognerebbe tener conto non solo della *flessione* ma anche della *torsione* della sbarra, in virtù della quale il movimento acquista un terzo grado di libertà: ma la sezione della sbarra sarà in generale tanto grande da rendere la torsione trascurabile.

riori, cioè nel caso che si formassero due o più *ventri* ed altrettanti *nodi*; ma questo caso resta fin d'ora escluso dalla mia trattazione, come del resto fu implicitamente esclusa la considerazione delle vibrazioni trasversali dell'asta o dei fili di sospensione nella teoria dei pendoli sferici (1).

In pratica possono avere importanza questi due casi;

1°. Sbarra rettilinea, cilindrica o prismatica regolare, fissata e caricata in modo che allo stato di quiete il suo asse longitudinale sia verticale.

In tal caso è praticamente nulla la rotazione ν, e restano arbitrarie e indipendenti le rotazioni λ e μ. Quindi il moto dello strumento è retto dalle prime due fra le equazioni (16), purchè si ricordi: che la posizione del baricentro e i momenti d'inerzia si devono calcolare supponendo la sbarra rigida, rettilinea e priva della porzione incastrata, e che le rotazioni apparenti λ e μ si ottengono dividendo per $\mp l$ le traslazioni apparenti del baricentro.

2°. Sbarra previamente incurvata e incastrata in modo che, caricandone l'estremità libera, il suo asse longitudinale diventi rettilineo e orizzontale nello stato di quiete.

Supponendo che l'asse longitudinale della sbarra sia diretto secondo l'asse delle x, è praticamente nulla la rotazione λ, restano arbitrarie e indipendenti μ e ν, cosicchè le equazioni del moto sono

$$K = L = 0 .$$

Questo caso però richiede speciali considerazioni circa le forze. Infatti allo stato di quiete la gravità è equilibrata dalla reazione elastica provocata con la rettificazione forzata della sbarra; quindi durante i piccoli movimenti dell'estremità libera, che si possono ritenere infinitesimi rispetto alla flessione iniziale della sbarra, restano attive soltanto le reazioni elastiche corrispondenti alle leggere deformazioni che la sbarra subisce (2), oltre agli attriti degli organi registratori e alla resistenza dell'aria: tutte forze infinitesime rispetto al peso e che nella discussione generale abbiamo raccolte in un'unica coppia resistente. Notando che il movimento si riduce ad una rotazione intorno ad un asse istantaneo contenuto nel piano $X = 0$, si potrà sostituire alla coppia l'unica forza $(\Xi_1\, H_1\, Z_1)$, applicata in un punto P_1 dell'asse della x: se questo punto coincide col baricentro del sistema, abbiamo allora:

$$x_1 = x_2 = l ; \quad y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0 ,$$
$$\Xi_2 = H_2 = Z_2 = \Xi_3 = H_3 = Z_3 = 0 ,$$

(1) V. a questo riguardo II, pag. 437, nota (1).

(2) A rigore bisognerebbe dire: le reazioni elastiche corrispondenti alle deformazioni in senso orizzontale (cioè alla rotazione ν), e l'eccesso del peso sulla forza elastica o viceversa, corrispondente alle deformazioni in senso verticale (cioè alle rotazioni $+\mu$ o $-\mu$).

e le equazioni effettive del moto sono:

$$\left\{\begin{aligned} \eta'' m_z + \gamma'' - \xi'' \varrho m_z + \mathrm{U} &= 0 \\ -\zeta'' m_y + \beta'' - \xi'' \chi m_y + \mathrm{V} &= 0\,, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

avendo posto

$$\mathrm{U} = \nu'' - \frac{H_1\, l}{\mathrm{M}^{(z)}}, \quad \mathrm{V} = \mu'' + \frac{Z_1\, l}{\mathrm{M}^{(y)}}, \tag{S}$$

e valendo ancora le (Q).

Anche per l'applicazione di queste equazioni bisogna ricordare le osservazioni fatte per il caso della sbarra rettilinea.

15. Alla terza categoria si possono ascrivere: i *pendoli orizzontali*, dei quali mi occuperò tosto; i *pendoli verticali* a una sola componente (p. e. i sismografi Cecchi) per i quali vale la prima o la seconda delle equazioni (16); i *sismografi per la componente verticale*, sia costituiti da una sbarra elastica a sezione rettangolare previamente incurvata verso l'alto (p. e. il « Vicentini » modificato) (¹), sia costituiti da un telaio rigido sorretto da molle a spirale (²), ai quali è applicabile la seconda delle (17), purchè sia trascurabile la massa delle spirali, e siano soddisfatte tutte le condizioni relative agli assi principali d'inerzia; infine *gli strumenti sospesi per un asse passante per il loro baricentro*, ai quali si applica una delle equazioni (16_1), a seconda dell'orientamento dell'asse di sospensione.

I *pendoli orizzontali* dei quali intendo occuparmi (p. e. Milne, Rebeur Paschwitz, Cancani) si possono definire generalmente come corpi rigidi sospesi per un asse *quasi* verticale non passante per il baricentro: in tal modo restano esclusi per ora quelli a sospensione bifilare, perchè effettivamente realizzano il sistema dinamico della *catena* di *tre* corpi rigidi.

Un pendolo orizzontale è in equilibrio statico quando il piano verticale passante per l'asse di rotazione contiene il baricentro. Allora se il baricentro si trova sull'asse delle x, nelle condizioni di quiete e d'equilibrio l'asse di rotazione dovrà essere contenuto nel piano $\mathrm{Y} = 0$, cioè avrà i coseni di direzione p, o, r, essendo p generalmente piccolissimo e di segno opposto ad l, ed r molto prossimo all'unità positiva.

Chiamando ω la rotazione effettiva dello strumento intorno al proprio asse, le rotazioni elementari apparenti sono

$$\lambda = p\omega\,, \quad \mu = 0\,, \quad \nu = r\omega\,; \tag{18}$$

e quindi l'equazione del moto è

$$p\mathrm{H} + r\mathrm{L} = 0\,. \tag{19}$$

(¹) V. a questo proposito la mia *lettera aperta* al prof. G. Alfani, Bollett. d. Soc. Sism. Ital. vol. VII, fasc. 7°, e i lavori in essa citati.

(²) V. a questo proposito la Nota, del dott. Agamennone: *Il Microsismometrografo a tre componenti*, ricca di citazioni bibliografiche. Rendic. Acc. d. Lincei, vol. X, 21 aprile 1901, pag. 291, oppure Bollett. d. Soc. Sism. It., vol. VII, 1901-1902, pag. 70.

Anche in questo caso alla coppia resistente possiamo sostituire un' unica forza $(\Xi_1 H_1 Z_1)$ applicata in un punto dell'asse delle x, p. e. nel baricentro: cosicchè basterà porre nelle (13)

$$x_1 = x_2 = l\,,\ \ y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = 0\,,$$
$$\Xi_3 = H_3 = Z_3 = 0\,,$$

e ricordare le (15) e le (18).

Così appunto facendo, la (19) divenuta:

$$(19_1) \qquad \begin{aligned} &\eta'' r M + \alpha'' p M_x + \gamma'' r M_z - \gamma g p M + \\ &+ M(-\xi'' \varrho r + \eta'' \chi p + \zeta'' \varrho p) + \Omega = 0 \end{aligned}$$

avendo posto per brevità

$$(\mathrm{T}) \quad M = \frac{\mathrm{M} l}{p^2 \mathrm{M}^{(x)} + r^2 \mathrm{M}^{(z)}}\,,\quad M_x = \frac{\mathrm{M}^{(x)}}{p^2 \mathrm{M}^{(x)} + r^2 \mathrm{M}^{(z)}}\,,\quad M_z = \frac{\mathrm{M}^{(z)}}{p^2 \mathrm{M}^{(x)} + r^2 \mathrm{M}^{(z)}}\,,$$

e avendo raccolto i termini indipendenti dalle componenti del moto sismico nella funzione:

$$(\mathrm{U}) \qquad \Omega = \omega'' - \omega g p r M - \frac{r H_1 l}{p^2 \mathrm{M}^{(x)} + r^2 \mathrm{M}^{(z)}}\,.$$

Se gli strumenti che abbiamo supposti orientati secondo l'asse delle X fossero invece normali al piano $\mathrm{Y} = 0$, il loro moto sarebbe retto da equazioni perfettamente analoghe a quelle trovate, che credo superfluo di riferire [1].

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell'estate del 1901.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio Blaserna.

I. *Apparecchio di misura.* — Le misure pireliometriche sul monte Cimone vennero, nell'estate del 1901, eseguite mediante un attinometro costrutto secondo il modello del Violle, con dimensioni però un po' più piccole di quelle che comunemente soglionsi dare a questo apparecchio, e precisamente lo strumento usato ha la sfera esterna con diametro di cm. 21,3 e la sfera interna con diametro di cm. 13,7. Essendo l'attinometro stato costrutto

(1) Era già consegnata questa terza Nota, quando venni a conoscenza d'una Memoria del Principe B. Palitzin: « *Ueber seismometrische Beobachtungen* » I. Accad. d. Sc. di Pietroburgo, la quale tratta appunto la teoria matematica degli strumenti sismici. Sebbene essa prevenga in certo modo i risultati del presente lavoro, pure credetti opportuno insistere nella mia pubblicazione; ed ecco le ragioni principali: In primo luogo questa scende come corollario dal problema più generale trattato nella I Nota, e d'altra parte tutta la nuova serie di Note si collega ad un mio precedente lavoro, sconosciuto al Matematico russo. In secondo luogo per il metodo seguito, per aver considerati gli strumenti quali corpi rigidi di dimensioni finite anzichè quali punti materiali, e infine per aver tenuto conto delle resistenze passive, importantissime come sa chiunque conosca per esperienza i sismografi a registrazione meccanica, il mio lavoro risulta sostanzialmente diverso da quello citato.

diversi anni fa, col tempo ebbe ad alterarsi qualcuna delle saldature che tengono fissi alle due sfere concentriche i tre tubi di comunicazione dall'esterno all'interno dell'attinometro; per modo che si verificava un piccolissimo stillicidio di acqua (quando l'apparecchio era in azione) che bagnava parte della parete interna dello strumento; parete che, come è noto, vuole essere coperta da nero fumo e mantenuta asciutta. Per rimediare a questo inconveniente, qualora avessi voluto mantenere l'acqua nell'intercapedine delle due sfere, si sarebbe dovuto disfare quasi completamente l'attinometro; e per schivare questo lavoro ho pensato di riempire l'intercapedine con parafina invece che con acqua. Come si vedrà dai risultati dei confronti fra questo attinometro ed il pireliometro di Ångström, la sostituzione della parafina all'acqua non ha influìto sulla attendibilità dei risultati che si ottennero coll'attinometro del Violle così modificato.

L'involucro sferico dell'attinometro, durante le esperienze, è sempre stato protetto da opportuno schermaglio, e l'apparecchio veniva collocato durante le osservazioni in luogo riparato dal vento per impedire che eventualmente succedesse uno scambio d'aria dall'esterno all'interno dell'attinometro, tale da potere influire sulle indicazioni del termometro quando il foro d'introduzione dei raggi solari era aperto.

Il tubo di entrata dei raggi solari (che nel modello originale del Violle si protende solo per 8 cm. al di fuori della sfera esterna) è lungo in tutto cm. 18,5 partendo dalla superficie sferica interna dell'attinometro e prolungandosi all'esterno per 11 cm. circa. Il diametro del tubo è di 57 mm. e tanto alla bocca che alla distanza di 83 mm. dalla bocca, sta saldato perpendicolarmente al tubo e coassiale con questo, un disco col diametro maggiore di 75 mm. Nel disco verso la bocca stanno praticati tre forellini alla distanza di 90° l'uno dall'altro e corrispondentemente sul secondo disco si trovano tre punti di riferimento, per modo che quando le tre immagini del sole prodotte attraverso ai tre forellini vengono a battere sui tre punti segnati, l'apparecchio è disposto così che i raggi solari percorrono il tubo parallelamente al suo asse. In fondo al tubo, vale a dire quasi formante parte della superficie sferica interna, viene applicato un disco con foro circolare, costrutto con molta cura e del quale il centro è sull'asse del tubo. Questo foro è quello che limita il fascio dei raggi solari che penetra nell'interno dell'attinometro, quando lo strumento è in azione. Con apposito schermaglio che è fissato lateralmente alla bocca del tubo, si può, quando occorre, impedire ai raggi solari di penetrare nell'apparecchio e andare a battere snl bulbo sferico annerito dal termometro.

Ho fatto costruire tre dischi con foro circolare di precisione, dei quali i diametri sono rispettivamente di 1,489 cm., 1,297 cm. e 1,102 cm.

Per collocare il serbatoio sferico del termometro in modo che il suo centro si trovi sull'asse del tubo di entrata dei raggi solari, e per togliere

l'inconveniente che il serbatoio, coperto da nero fumo, mentre viene introdotto nell'apparecchio possa toccare la parete del foro di entrata e quindi restare in parte scoperto da nero fumo, ho munito il foro di entrata del termometro di un tubo di guida, che permette di fare scorrere il termometro longitudinalmente e di spostarlo lateralmente, senza che possa toccare parete alcuna.

Dalla parte opposta del tubo di entrata dei raggi solari e sullo stesso asse di esso, sta un secondo tubo chiuso da vetro smerigliato e munito di specchio girevole attorno all'asse del tubo stesso, ed inclinabile rispetto all'asse, così da poter vedere per riflessione l'immagine quasi nera del serbatoio termometrico in campo meno oscuro e giudicare se i raggi solari colpiscono convenientemente il serbatoio.

A togliere le tanto discusse cause di errore, provenienti dai raggi che cadono troppo obliquamente sul margine della semisfera del serbatoio volta verso il sole, durante le osservazioni si applicò un foro di entrata dei raggi con diametro tale, che il diametro dell'immagine solare che si produceva al centro dello strumento, riuscisse minore del diametro del serbatoio termometrico.

Il termometro usato per le osservazioni che si fecero al Monte Cimone nel 1901 esce dalla fabbrica Ducretet e porta il n. 566. Sul tubo termometrico non stanno segnati i dati necessarî per il calcolo del valore in acqua del serbatoio, valore che ho potuto dedurre sperimentalmente, valendomi di un piccolo calorimetro di platino e servendomi di mercurio come liquido calorimetrico. I valori trovati, espressi in piccole calorie sono i seguenti:

1,121 ; 1,087 ; 1,134 ; 1,104

e quindi in media il valore in acqua del serbatoio termometrico si può ritenere 1,111.

Il diametro di questo serbatoio è di cm. 1,607 ed il foro applicato all'apparecchio è stato quello che ha per diametro cm. 1,489, così che l'immagine del sole al centro dell'apparecchio aveva per diametro cm. 1,521.

Per il modo di osservazione e per dedurre dalle osservazioni la quantità di energia calorifica inviata dal Sole (espressa in piccole calorie) in un minuto primo ed in direzione normale sulla superficie piana di un centimetro quadro, ammesso che la superficie del serbatoio del termometro coperta con nero fumo abbia *uno* per potere assorbente, ho seguito completamente il metodo suggerito dal Chwolson a pag. 79 e seg. del suo classico lavoro « *Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie* » (1): metodo che si può spiegare in breve nel modo seguente:

Sia q la quantità di calore che per irradiazione arriva in un minuto sopra la superficie piana di un centimetro quadrato, disposta perpendicolar-

(1) Repertorium für Meteorologie; Bd. XV. St. Petersburg, 1892.

mente ai raggi solari, e sia s la sezione normale del fascio di raggi che arriva alla superficie del serbatoio termometrico; nel tempo $d\tau$ arriverà su questa superficie la quantità di calore $qsd\tau$.

Il termometro che inizialmente, cioè immediatamente prima di essere esposto al Sole, aveva la temperatura t_0, dopo un certo tempo di esposizione avrà assunto una temperatura t maggiore di t_0. Supponiamo che t sia di pochi gradi diversa da t_0; allora per calcolare la quantità di calore che emette il serbatoio termometrico nel tempo $d\tau$, potremo applicare la legge del raffreddamento di Newton, e precisamente, se h è la quantità di calore che emette il serbatoio termometrico in un minuto da ogni cm^2 di superficie nell'ipotesi che sia $t - t_0 = 1^\circ$ e se S è la superficie totale del serbatoio, questa quantità di calore sarà $hS(t - t_0)d\tau$. E l'aumento dt di temperatura che subirà il termemetro nel tempo $d\tau$ sarà

$$cdt = qsd\tau - hS(t - t_0)d\tau \tag{1}$$

nella quale c esprime il valore in acqua del serbatoio termometrico. Da questa uguaglianza possiamo dedurre la temperatura stazionaria T, che raggiungerebbe il termometro, sotto l'influenza costante dei raggi solari e della velocità di raffreddamento, ponendo $dt = 0$. Avremo così:

$$T - t_0 + \frac{qs}{Sh} \qquad T = t_0 = \frac{qs}{hS}.$$

Ponendo $\frac{hS}{c} = m$ ed integrando la (1) si ottiene

$$t = t_0 + \frac{qs}{hS}(1 - e^{-m\tau}) = t_0 + (T - t_0)(1 - e^{-m\tau}) = T - (T - t_0)e^{-m\tau},$$

Il Chwolson, dietro saggie considerazioni, consiglia di osservare le temperature t_1 e t_3 che il termometro assume rispettivamente dopo un minuto e dopo tre minuti dall'esposizione del termometro al Sole; così che sarà

$$t_1 = T - (T - t_0)e^{-m}$$
$$t_3 = T - (T - t_0)e^{-3m}.$$

Evidentemente starà anche la relazione

$$t_3 = T - (T - t_1)e^{-2m}$$

e quindi

$$t_3 - t_1 = (T - t_1)(1 - e^{-2m}).$$

E poichè tanto nel primo che nel secondo membro di questa uguaglianza figurano differenze di temperatura, l'uguaglianza sussisterà, anche se si parte a contare le temperature t da un punto diverso dallo 0° solito, purchè queste temperature si valutino sempre in gradi centigradi.

Contando le temperature da t_0 e ponendo $\theta = (T - t_0)$; $\theta_1 = (t_1 - t_0)$; $\theta_3 = (t_3 - t_0)$ avremo

$$\theta_3 - \theta_1 = (\theta - \theta_1)(1 - e^{-2m})$$
$$\theta = \theta_1 + \frac{\theta_3 - \theta_1}{1 - e^{-2m}}.$$

Il valore di m si deduce dalla nota relazione

$$\theta_1 = \theta_3 e^{-m\tau}$$

quando si conosca il tempo τ in minuti che impiega il termometro (dopo rimesso lo schermaglio sulla bocca dell'attinometro) per passare, in seguito a raffreddamento, da θ_3 a θ_1.

Trovato il valore di θ si calcola q servendosi della relazione

$$T - t_0 = \theta = \frac{qs}{hS}$$

dalla quale si ricava

$$q = \frac{hS}{s}\theta = \frac{hS}{c} \cdot \frac{c}{s} \cdot \theta = m\frac{c}{s}\theta.$$

Da quanto si è esposto risulta chiaramente che per fare una determinazione attinometrica, conviene leggere la temperatura stazionaria t_0, che il termometro assume tenendo chiuso l'attinometro; e poi diretto convenientemente l'apparecchio, si toglie lo schermaglio al tempo *zero*; si mantiene l'apparecchio colla bocca volta al Sole, si legge la temperatura t_1 del termometro dopo un minuto primo, e la temperatura t_3 dopo tre minuti a partire dal tempo zero. Si lascia aperta la bocca per mezzo minuto ancora, affinchè il termometro prenda una temperatura maggiore di t_3 e poi si chiude la bocca collo schermaglio. Da questo momento il termometro comincierà a raffreddarsi e ripasserà per le temperature t_3 e t_1; conviene notare in minuti e decimi di minuto il tempo τ occorrente perchè il termometro scenda da t_3 a t_1.

Per la stima del tempo servì il cronometro Parkinson e Frodsham n. 1536.

Nella suesposta teoria si ammette l'invariabilità della temperatura t_0 che avrebbe il termometro, durante tutto il tempo delle osservazioni (quasi 10 minuti) se lo strumento rimanesse chiuso; si ammette che la superficie del serbatoio termometrico abbia *uno* per potere asserbente; si ammette che non abbia influenza alcuna la conduttività calorifica del tubo termometrico per ciò che riguarda il riscaldamento ed il raffreddamento del serbatoio termometrico; e si ammette che in ogni istante la temperatura segnata dal termometro corrisponda a quella che questo assumerebbe, se l'insieme dei costituenti il bulbo termometrico annerito sentisse immediatamente l'effetto del calore assorbito.

Tutti sanno a quante discussioni diede luogo l'attinometro di Violle [1], appunto perchè, comunque si opini, fino a pochi anni fa, era uno dei migliori che si conoscevano per lo studio della radiazione calorifica del Sole. Non intendo riassumere qui le discussioni fatte, nè tentare teoricamente di valutare le correzioni da applicarsi ai risultati provenienti dal non verificarsi praticamente tutte le condizioni suesposte [2]. Valendomi del pireliometro

(1) Veggasi a pag. 59 della seguente pubblicazione: *Congrès international de météorologie*, Paris 1900. Procès-verbaux des séances et mémoires publiés par M. Alfred Angot, Secrétaire général du Congrès. Paris, Gautier-Villars, 1901. — Si consultino poi le seguenti pubblicazioni: Langley, *Researches on Solar heat and its absorption by the Earth's atmosphere*. A Report of the Mount Whitney Expedition (Professional Papers of the signal Service, N.° XV). Washington, 1884. — Chwolson, *Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie*, pag. 62-87. St. Petersburg, 1892. — Savélief, *Sur le degré de précision que l'on peut atteindre dans les observations actinométriques*. (Ann. de Ch. et de Phys., 6e série, T. XXVIII, pag. 394 et T. XXIX (1893), pag. 260. - Id., 7e série, T. IV (1895), pag. 424). — Chwolson O., *Réponse a M. Savélief* (Ann. de Ch. et de Phys., 6e série, T. XXX (1893), pag. 141). — Veggasi anche: *Rapport du Comité météorologique international* (Réunion de Saint-Pétersbourg, 1899). Alla pag. 43 (appendice VIII) vi è il *Rapport sur la radiation*.

(2) Un tentativo di modificazione sostanziale della parte calorimetrica dell'attinometro di Violle è stato fatto dal sig. prof. G. B. Rizzo. Dice il Rizzo: « Invece di esporre ai raggi del Sole il bulbo sferico di un termometro, io espongo una pallina di argento massiccio del diametro di 1,5 cent. circa, con un piccolo foro nel quale si adatta esattamente il bulbo cilindrico di un termometro molto sensibile e pronto. Il contatto del bulbo del termometro colla pallina di argento viene reso più sicuro nel modo altra volta descritto (*Mem. della Soc. degli spettroscopisti italiani*, vol. XXVI (1897), pag. 79); cioè ricoprendo dapprima il bulbo con un sottile strato di argento e poi rinforzando questo con un altro strato di metallo elettrolitico, in modo che il bulbo resta chiuso in una coppa di argento ben aderente; il bulbo così preparato viene allora introdotto nel suo forellino, poi si riempie il sottilissimo spazio che rimane fra le due superficie con un poco di polvere di argento inumidita e quindi lo si chiude con un piccolo collaretto di gomma lacca. Per rendere ben assorbente la superficie di queste palline attinometriche, si ricoprono con uno straterello di nero di platino elettrolitico e su questo si depone un poco di nero di fumo, tenendo un momento le palline sopra una fiamma fumosa. » (Mem. della Soc. degli spettroscopisti italiani, vol. XXVII (1898), pag. 10). Veggasi anche la Memoria del Rizzo: *Sopra le recenti misure della costante solare* (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, serie II, tomo XLVIII, pag. 319). Il Rizzo inoltre applicò all'attinometro un sistema che servisse per orientarlo e limitò l'apertura d'introduzione dei raggi solari, così da assicurarsi che la sfera calorimetrica fosse colpita dall'intero fascio di raggi. In complesso le modificazioni apportate dal Rizzo miglioravano le condizioni dell'attinometro, ma non raggiungevano, a mio vedere, lo scopo definitivo di poter ritenere cioè i risultati dedotti dalle osservazioni fatte con esso, come risultati assoluti; poichè, quantunque le palline di argento siano buone conduttrici del calore, lo stato termometrico di esse si rilevava dopo che il calore si era propagato al bulbo termometrico, attraverso alla polvere di argento inumidita; e quindi non veniva sottratta completamente la causa di errore proveniente dal ritardo nell'indicazione del termometro. Inoltre, mentre il Rizzo ammetteva che la superficie annerita della pallina di argento avesse potere assorbente uguale all'unità, con grande probabilità, come risulta dagli studî dell'Ångström, detta superficie non raggiungeva un così elevato potere assorbente.

di Ångström del quale mi servii a Sestola, ho fatta una serie di confronti fra questo apparecchio e l'attinometro di Violle che servì al Cimone, e da questi confronti dedussi il coefficiente di riduzione dei risultati ottenuti coll'attinometro, per avere i valori assoluti.

Avvertirò solo che per quante precauzioni si siano avute, nell'attinometro usato al Cimone si verificarono delle variazioni di temperatura nell'interno dell'attinometro, variazioni che hanno raggiunto talvolta 0°,02 al minuto. Come si sa, il Violle vuole che nell'intercapèdine del suo attinometro si mantenga dell'acqua a temperatura costante, ottenendo questa condizione col cambiamento continuo dell'acqua mediante due rubinetti laterali, per uno dei quali viene fatta uscire l'acqua, mentre per l'altro entra una uguale quantità di acqua tolta da un serbatoio; oppure, che l'intercapedine si riempia di ghiaccio per mantenere costante la temperatura nell'interno dell'attinometro.

Per le ragioni che ho detto sopra, ho creduto conveniente di riempire l'intercapedine con parafina, allontanandomi così dai precetti indicati dall'inventore dello strumento, ma sono tuttavia convinto che migliori risultati di quelli ottenuti, non avrei potuto conseguire, se al Cimone avessi voluto riempire l'intercapedine con acqua o con neve. Ho fatto notare in altra circostanza [1] che nell'attinometro Violle necessita che la superficie annerita della sfera interna abbia temperatura uguale o superiore a quella dell'aria ambiente, per essere sicuri che su detta superficie non sia depositata, per condensazione, traccia alcuna di vapore acqueo; ciò che muterebbe le condizioni di scambio di calore per irradiazione fra il serbatoio termometrico e la superficie sferica annerita che lo circonda; per conseguenza al Cimone, dove nei giorni di Sole la temperatura si mantenne sempre sopra 0°, non doveva riempire l'intercapedine colla neve (che per caso nell'estate del 1901 si era conservata in piccola quantità in qualche spaccatura volta verso il nord) nè doveva fare uso dell'acqua della cisterna che sta sotto alla torre dell'Osservatorio, essendo quest'acqua sempre assai fredda. Avrei quindi dovuto esporre sulla torre un largo serbatoio di acqua che acquistasse la temperatura dell'aria ambiente e servirmi di questa per l'uso dell'attinometro di Violle. Ora, ciò, per mancanza di personale e di utensili, sarebbe riuscito di tale incomodità al Cimone da compromettere seriamente l'esecuzione delle misure. Del resto, mi pare, che anche colla circolazione dell'acqua nell'intercapedine, ammesso pure che la temperatura dell'acqua rimanga invariata, non si possa asserire in modo assoluto, che dopo che i raggi solari sono penetrati per qualche tempo nell'interno dell'attinometro, questo se fosse

[1] *Sulla misura delle radiazioni termoluminose del Sole* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XIII (1880), pag. 583-588).

chiuso collo schermaglio, eserciterebbe sul termometro l'identica influenza che esercitava prima di dare adito all'entrata dei raggi solari. È questa una delle ipotesi che si fanno per formulare la teoria dell'attinometro di Violle, ma che praticamente non si verificherà che assai di rado.

Chimica. — *Riduzione dell'Artemisina con cloruro stannoso* (¹). Nota di P. Bertolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Come risulta dalla mia precedente pubblicazione (²), ho dimostrato che l'artemisina, contiene, al pari della santonina un CO cetonico, inquantochè dà con idrossilamina e fenilidrazina, l'ossima e l'idrazone corrispondenti.

Inoltre dimostrai che contiene anche un legame lattonico.

Per l'analogia che dai varî fatti esposti pare esistere fra le due sostanze citate, ho creduto interessante vedere se l'artemisina, sottoposta all'azione di alcuni riduttori, si comportasse nello stesso modo della santonina.

In questa seconda Nota mi limito segnatamente ad esporre i risultati delle mie esperienze ottenuti facendo agire sull'artemisina il cloruro stannoso in soluzione cloridrica; salvo fra breve di dare comunicazione di altre ricerche in corso.

Come è noto, la santonina, tanto che venga trattata con acido iodidrico e fosforo rosso (³) quanto per azione del cloruro stannoso in soluzione cloridrica (⁴), dà l'acido santonoso. Di questi due mezzi di riduzione ho preferito il secondo, perchè, come ha dimostrato Andreocci, dà maggiore rendimento.

Dirò subito che mentre io ritenevo di giungere ad un acido analogo al santonoso, ottenni invece, per riduzione dell'artemisina, una sostanza che ha comportamento lattonico, che contiene un ossigeno in meno, e quindi la sua composizione centesimale corrisponde a quella della santonina.

L'esperienza fu condotta in principio seguendo il metodo indicato da Andreocci (⁵), però dovetti osservare che per l'artemisina la riduzione avviene assai più lenta della santonina, e solo dopo un mese il prodotto che si separa rappresenta appena la terza parte della artemisina impiegata. Adope-

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-Farmaceutica, della R. Università di Catania.

(²) *Sull'Artemisina*. Rend. Acc. Lincei (1901), vol. X, 2° sem., serie 5ª, fasc. 5.°

(³) Cannizzaro e Carnelutti, *Azione dell'Acido iodidrico sulla Santonina*. Gazz. chim. ital., vol. XII, pag. 393.

(⁴) Andreocci, *Sulla riduzione della Santonina*. Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem. (1893), pag. 329.

(⁵) Andreocci, *Su quattro acidi santonosi e sopra due nuove desmotroposantonine*. R. Acc. dei Lincei, vol. II (1895), serie 5ª, pag. 30.

rando invece soluzioni più concentrate di cloruro stannoso, anche senza aggiunta di stagno metallico, si può ottenere l'identica sostanza con ottimo rendimento ed in un tempo relativamente breve.

Gr. 20 di cloruro stannoso si sciolsero in 20 cc. di acido cloridrico fumante (D. 1,18), e al liquido, saturato a 0° con gas HCl secco, si aggiunsero gr. 3 di artemisina finamente polverizzata. Il miscuglio fu dibattuto a freddo in un recipiente a tappo smerigliato, ed allora l'artemisina si sciolse completamente producendo un liquido denso colorato in giallo-ambra. Dopo parecchie ore cominciò a separarsi alla parte superiore del liquido, una sostanza bianca, cristallina, la quale a poco a poco è andata aumentando mentre il liquido si scolorava. Dopo otto giorni l'artemisina era quasi completamente trasformata nella nuova sostanza. Questa, raccolta sopra un filtro d'amianto e lavata diverse volte con acido cloridrico fumante, finchè il filtrato non dava alcun intorbidamento per aggiunta di acqua e quindi lavata ancora con acqua, venne disseccata nel vuoto sotto una campana ad acido solforico.

La sostanza ottenuta è insolubile nell'acqua e nell'acido cloridrico, poco solubile in etere, cloroformio e benzolo, discretamente solubile nell'acido acetico e nell'alcool a 90°, bollenti.

Da questi due ultimi solventi si separa per raffreddamento sotto forma di piccoli aghi, bianchi e duri che fondono a 269°-270°.

La sostanza purificata per ripetute cristallizzazioni dall'alcool bollente e disseccata a 100°, sottoposta all'analisi elementare, diede risultati corrispondenti a quelli richiesti dalla formola:

$$C_{15}H_{18}O_3$$

I. gr. 0,2310 di sostanza diedero gr. 0,6198 di CO_2 e gr. 0,1526 di H_2O
II. » 0,1822 » » » 0,4902 » » 0,1270 »

	Trovato in 100 p. I	II	Calcolato per $C_{15}H_{18}O_3$
C	73,17	73,38	73,17
H	7,33	7,73	7,32

Questa sostanza non si scioglie a freddo nei carbonati alcalini, si scioglie invece negli alcali caustici lentamente a freddo e più rapidamente a caldo. Dalle soluzioni alcaline fatte a freddo viene parzialmente riprecipitata per mezzo di CO_2. Alla luce polarizzata si presenta inattiva.

Una piccola porzione di sostanza sospesa in 1 cc. di acqua, per aggiunta di 1 cc. di H_2SO_4 concentrato e quindi di una goccia di cloruro ferrico, non produce la reazione dell'artemisina, nè quella della santonina e desmotroposantonine, ma rimane indisciolta assumendo una colorazione bruna.

Questa sostanza contiene ancora il legame lattonico al pari dell'artemisina: infatti con le soluzioni bollenti degl'idrati alcalini ed alcalino terrosi dà luogo alla formazione dei sali di un ossiacido monobasico, il quale, quando viene messo in libertà per mezzo dell'acido cloridrico o solforico, lentamente si trasforma nel lattone corrispondente.

Preparazione del sale di bario. — Gr. 0,5 di sostanza furono disciolti nell'alcool a 90°, e la soluzione fu versata a piccole riprese in una soluzione quasi bollente d'idrato di barite. Si ottenne un liquido perfettamente limpido, il quale fu trattato con una corrente di CO_2 per eliminare l'eccesso d'idrato di barite, poscia, riscaldato e filtrato, fu lasciato ad evaporare lentamente in una capsulina, sotto una campana ad acido solforico. Per concentrazione si separò a poco a poco il sale di bario sotto forma di laminette fogliacee, trasparenti, spesso raggruppate a rosetta.

Questi cristalli, raccolti sopra un filtro, vennero lavati con poca acqua e quindi asciugati nel vuoto sotto campana ad acido solforico. Evidentemente perdettero acqua ed a poco a poco l'aspetto lucente scomparve, e la sostanza si trasformò in una polvere bianca, leggera e fioccosa.

L'analisi del sale di bario, disseccato sino a peso costante (a 130°), diede i seguenti risultati:
Gr. 0,2382 di sale di bario, fornirono gr. 0,8320 di $BaSO_4$.

Calcolato per $(C_{15}H_{19}O_4)_2$ Ba	Trovato
Ba = 20,66 %	20,53

La soluzione del sale di bario trattata:

con Nitrato d'argento, dà il corrispondente sale argentico, il quale si separa lentamente sotto forma di aghetti setacei, i quali a poco a poco s'imbruniscono sino a completo annerimento;

con Acetato di piombo, dà un precipitato bianco fioccoso, solubile in eccesso di reattivo;

con Solfato di rame produce un precipitato bianco verdastro.

La soluzione acquosa del sale di bario si comporta in modo simile a quella del santoninato baritico, in quantochè, trattata a freddo con acido cloridrico diluito, sino a leggera acidificazione, non dà alcun precipitato. Da questa soluzione l'etere estrae una sostanza di aspetto vischioso, la quale assume poi aspetto cristallino. Questa sostanza probabilmente è l'acido corrispondente al sale di bario; però essa a poco a poco si altera e dà nuovamente il lattone.

Se invece alla soluzione baritica si aggiunge un eccesso di acido cloridrico e si fa bollire, si separa tosto il lattone, sotto forma di precipitato bianco fioccoso.

Il nuovo prodotto di riduzione dell'artemisina, da me ottenuto, non reagisce con l'idrossilamina, nè con la fenilidrazina, perciò con tutta probabilità

non contiene più CO cetonico. Invece trattato con anidride acetica in presenza di acetato sodico, dà un *acetil derivato;* ciò che dimostra l'esistenza di un ossidrile di natura fenica; comportamento che va anche d'accordo con la proprietà, più sopra accennata, che ha la sostanza di sciogliersi a freddo negli alcali diluiti, e di riprecipitare in parte per mezzo di CO_2.

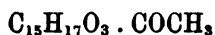
Quivi è interessante far rilevare che l'artemisina, sottoposta all'azione dell'anidride acetica ed acetato sodico, nelle identiche condizioni non dà l'acetil derivato, e rimane inalterata.

Derivato acetilico.

Gr. 0,5 di sostanza furono sciolti in gr. 5 di anidride e poscia si aggiunsero gr. 1 di acetato sodico fuso e polverizzato. Il tutto fu fatto bollire in un palloncino munito di refrigerante a riflusso per tre quarti d'ora. Quindi eliminato l'eccesso di anidride acetica per distillazione a pressione ridotta, il residuo fu raccolto sopra un filtro e lavato ripetutamente con acqua, fu disseccato nel vuoto sotto campana ad acido solforico.

Il prodotto è insolubile in acqua, pochissimo solubile in etere e nell'etere petrolico, discretamente solubile nell'alcool assoluto a caldo, dal quale cristallizza in bellissime laminette bianche, lanceolate e lucenti. È ancora più solubile nel cloroformio e nel benzolo, dal quale si separa, in parte per raffreddamento, e quasi completamente per aggiunta di etere petrolico, sotto forma di aghetti duri, bianchi, raggruppati fra loro. Fonde a 205°-206°.

L'analisi elementare di questo composto, seccato a 100°, diede risultati conformi a quelli richiesti dalla formola:

$$C_{15}H_{17}O_3 . COCH_3$$

Gr. 0,1886 di sostanza fornirono gr. 0,4856 di CO_2 e gr. 0,1254 di H_2O.

Trovato per 100 p.		Calcolato
C	70,22	70,83
H	7,33	6,94

L'acetil derivato, al pari della sostanza primitiva, è inattivo alla luce polarizzata.

L'acetil derivato fatto bollire con soluzione di potassa caustica, quindi, filtrando ed acidificando con acido cloridrico, si ha per riscaldamento un precipitato fioccoso, il quale cristallizzato dall'alcool, fonde a 269°, ed ha tutte le proprietà della sostanza primitiva.

Dalla composizione centesimale, e dal comportamento di questo prodotto di riduzione della artemisina, pensai di trovarmi in presenza di una nuova desmotroposantonina, differente dalle quattro finora conosciute. La sostanza,

da me ottenuta, come risulta dai dati sopra esposti, non dà però la reazione caratteristica col cloruro ferrico; ciò potrebbe anche non infirmare la mia supposizione, che del resto viene avvalorata dal comportamento con gli alcali fondenti. Difatti interessante è la decomposizione che il prodotto di riduzione dell'artemisina subisce per azione della potassa caustica fusa, in quantochè si ottiene l'identico *p- dimetilnaftolo* degli acidi santonosi.

È noto che gli acidi santonosi (prodotti di riduzione della santonina) quando vengono fusi con potassa caustica ([1]), si scindono in *p- dimetilnaftolo, acido propionico* e *idrogeno.*

Però dovetti notare che io mi trovavo in presenza di una sostanza, che ha analogia più con le desmotroposantonine che con gli acidi santonosi. Nella letteratura non mi fu dato trovare che le desmotroposantonine siano state sottoposte ad analogo trattamento degli acidi santonosi, ed a me parve assai probabile che anche da esse si potesse giungere al p- dimetilnaftolo, in quantochè le desmotroposantonine contengono lo stesso ossidrile fenico degli acidi santonosi.

Azione della potassa caustica sulla deunotroposantonina. — La desmotroposantonina, da me adoperata, è stata quella che Andreocci ottenne per azione dell'acido cloridrico sulla santonina ([2]), e che fonde a 260°.

L'esperienza fu condotta seguendo le indicazioni dello stesso Andreocci ([3]), con qualche lieve modificazione; elevando cioè la temperatura sino a 380° ed eliminando dal palloncino, nel quale si opera la fusione, il tubo di sviluppo che pesca nel bagno di mercurio. Il prodotto di fusione, sciolto in acqua e trattato con CO_2, lasciò separare una sostanza, la quale raccolta e distillata in corrente di vapore, fu identificata per il *p-dimetil-naftolo* (punto di fusione 135°-136°) proveniente dagli acidi santonosi.

Io mi riservo di comunicare quanto prima i risultati ottenuti sia trattando analogamente le altre desmotroposantonine, sia trattando anche quei composti della santonina nei quali viene conservato l'ossigeno chetonico.

Dirò intanto che la santonina, nelle identiche condizioni, non dà origine al p-dimetil-naftolo.

Azione della potassa caustica sul prodotto di riduzione dell'artemisina. — Con lo stesso processo seguìto per la desmotroposantonina, ho trattato con potassa fusa la sostanza da me ottenuta per riduzione dell'artemisina con cloruro stannoso. La reazione avviene nell'identico modo, ed il prodotto della fusione, distillato in corrente di vapore, è lo stesso di quello che si ottiene dalla desmotroposantonina, sia pel suo punto di fusione (135°-136°) sia pel suo comportamento.

([1]) Andreocci, *Sui quattro acidi santonosi.* Gazzetta chim. ital., anno XXV, vol. I, pag. 452.

([2]) Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. I, pag. 468.

([3]) Gazz. chim ital., anno XXV, vol. I, pag. 544.

L'artemisina, al pari della santonina sottoposta alla fusione con potassa caustica, nelle identiche condizioni non produce il p-dimetil-naftolo.

Avrei desiderato poter stabilire subito se questa reazione vada interamente e quantitativamente come nella fusione degli acidi santonosi, cioè se si ottiene anche l'acido propionico; però la scarsa quantità di materiale di cui disponevo, mi costrinse a rimandare a più tardi questa parte di ricerca.

Per ora intanto si può ritenere, da questo risultato, che l'artemisina contiene lo stesso nucleo fondamentale della santonina, e che il CO cetonico pare si trovi nello stesso posto della santonina.

Questo fatto farebbe contrasto con i risultati ottenuti da Freund e L. Mai (1), i quali distillando l'artemisina con polvere di zinco, ottengono una *dimetil-naftalina*, che suppongono non essere identica alla *1-4-dimetil-naftalina* che si ottiene dalla santonina; e la ritengono invece uguale alla *β-dimetilnaftalina* che Emmert e Reingruber (2) isolarono dal catrame, e che ha lo stesso punto di ebollizione (264°).

Dirò che ho tentato anche la riduzione dell'artemisina con polvere di zinco ed acido acetico, nello stesso modo come sono state trattate le desmotroposantonine per ottenere i rispettivi acidi santonosi (3), ma neppure con questo mezzo ho potuto ottenere l'acido corrispondente dell'artemisina. Invece ho ottenuto un nuovo prodotto che fonde a 275° e che devia a destra il piano della luce polarizzata.

Questa nuova sostanza conserva ancora il legame lattonico, non reagisce con l'idrossilamina, nè con la fenilidrazina; probabilmente non contiene neanco OH fenico, perchè non si scioglie a freddo negl'idrati alcalini.

I risultati delle esperienze in corso mi daranno modo di stabilire come vada la riduzione operata con acido acetico e zinco, studiando anche contemporaneamente la riduzione per mezzo dell'acido iodidrico e fosforo rosso.

(1) Martin Freund e Ludwig Mai, *Beitrag zur Kenntniss des Artemisins.* Berichte, N. XV, 1901, vol. III, pag. 3717;

Manifesto il mio rincrescimento ai signori Freund e L. Mai, se nella mia prima Nota non potei fare cenno del loro lavoro, pubblicato negli Atti della società chimica di Frankfurt e riferito dal Chemiker-Zeitung (Jahrgang 1898, 203); ma, tanto nei periodici di cui dispone questa R. Università, quanto anche negli Annali pubblicati in Darmstadt sino al marzo del 1900 dal Merck, che primo aveva scoperto e studiato questa sostanza, non trovai alcuna citazione in proposito.

(2) Ann. de Chem. 211, 368 (1882).

(3) Andreocci, *Sui quattro acidi santonosi.* R. Acc. dei Lincei, vol. II (1895), ser. 5a, pag. 62; A. Andreocci e P. Bartolo, *Sopra due nuove desmotroposantonine.* Gazz. chim. ital., vol. XXVIII, p. II (1898), pag. 533.

Infine credo conveniente accennare al modo singolare di comportarsi dell'artemisina con l'acido cloridrico, diverso dalla santonina. Mentre questa, come è noto, disciolta in acido cloridrico concentrato, si trasforma nella desmotroposantonina, fusibile a 260°; l'artemisina, sciolta in acido cloridrico, nelle identiche condizioni della santonina, dà una soluzione che a poco a poco si colora, fino ad assumere una tinta rosso-bruna, mentre si separa una sostanza bruna, di aspetto resinoso e alquanto indurita, la quale aderisce in massima parte alle pareti del vaso. Se si toglie il liquido acido, si lava la sostanza solida con acqua, e si tratta quindi a freddo con soluzione di carbonato sodico, essa in parte vi si discioglie; la soluzione alcalina separata per filtrazione dalla parte insolubile, dà per aggiunta di acido solforico diluito un precipitato biancastro, il quale è solubile nell'acqua bollente, e per ripetute cristallizzazioni da questa si ottiene puro sotto forma di aghi lunghi sottilissimi, di aspetto setaceo, i quali fondono a 121°-122°. La soluzione alcoolica di questo nuovo prodotto devìa a destra il piano della luce polarizzata.

Il punto di fusione assai basso di questa sostanza, ed i caratteri che tanto la fanno differire dagli altri prodotti fin'ora ottenuti, mi fanno sospettare che l'acido cloridrico abbia agito assai profondamente sulla molecola dell'artemisina.

Sopra tale argomento spero quanto prima poter riferire.

Mineralogia. — *La Prehnite ed altre zeoliti nelle granuliti di Cala Francese* (Isola della Maddalena-Sardegna). Nota del dott. C. Rimatori, presentata dal Socio Struever.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia vegetale. — *Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi* [1]. Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Gli agricoltori della bassa valle del Po indicano senz'altro col nome di ofiobolo un gruppo di forme di deperimento dei seminati di frumento, le quali si manifestano coi ben noti caratteri che si avvertono anche nei casi che derivano propriamente dalla infezione di *Ophiobolus graminis*.

[1] Relazioni e studi della Cattedra Ambulante di Agricoltura per la Provincia di Ferrara.

Questi deperimenti ritraggono la propria origine da cause assai differenti, potendo manifestarsi con le stesse apparenze macroscopiche un difetto di alimentazione per esaurimento del suolo, ovvero per imperfetta preparazione fisica dello stesso od anche casi di parassitismo di varie crittogame non sempre molto affini fra loro.

L'espressione di ofiobolo usata in queste località ha pressapoco il medesimo valore e la medesima applicazione a designare le anomalie di vegetazione dei seminati, dell'altra di caldafredda od arrabbiaticcio usata dagli agricoltori dell'Italia Centrale e del mezzogiorno.

Per quanto improprio il nome di ofiobolo dato ai deperimenti — mentre esso è soltanto il nome generico di una crittogama — pure esso è stato adottato dagli agricoltori che, non meno eclettícamente chiamano peronospora la ben nota malattia della vite, nonchè qualsiasi alterazione anche di altre piante che si appalesi con caratteri macroscopicamente analoghi a quelli delle viti peronosporate.

Nel caso di ciò che dicesi volgarmente ofiobolo del frumento, interessa al massimo grado di definire esattamente la determinante del fenomeno onde adottare i provvedimenti imposti dai singoli casi.

Ho osservato a Bondeno nella tenuta dell'Ill.mo sig. conte Mosti ed a Sabbioncello dal sig. Ten. Cottarelli, una forma caratteristica di deperimento del frumento che non ha nulla che vedere coll'ofiobolo propriamente detto a differenza di quanto avrebbe fatto presagire un esame superficiale.

Il deperimento in questione si è appalesato in frumenti cresciuti in entrambi i casi su terreno che nell'anno precedente era investito a canepaio, preparato quindi secondo le migliori regole onde il frumento stesso incontrasse quella caloria o forza vecchia che costituisce condizione insuperata per raggiungere elevate produzioni. In alcuni appezzamenti si osservano qua e là delle bollate, irregolarmente circolari, nelle quali, fino dal marzo, le piantine si arrestarono nello sviluppo, indi ingiallirono e scomparvero a poco a poco, così da formar radura nell'appezzamento. Estirpando con cura le piante e liberandone le radici dalla terra mediante prolungata lavatura, si osserva che le radici stesse sono in massima parte deperite; mancano del tutto le radici che di solito si formano coll'approssimarsi della primavera e le stesse radici di autunno offrono una ramificazione irregolare rispetto a quella che si osserva nelle piante sane. L'esame microscopico della parte aerea della pianta non permette di constatare alcuna alterazione sensibile che possa spiegare il fenomeno; le radici invece rivelano la presenza di un micelio ialino, riccamente ramificato, settato del diametro medio di 6-8 μ. Questo micelio, a decorso inter-e-intracellulare, è specialmente addensato nel tessuto corticale e nella regione dei fasci; a differenza dell'ofiobolo non si formano mai sulle radici, produzioni miceliali all'esterno ed il micelio stesso non manifesta mai tendenza ad imbrunire; qua e là poi, e per lo più all'interno delle cellule

il micelio dà origine a rigonfiamenti apicali od intercalari, sferoidali o cilindrici del diametro, nel primo caso di 25-30 μ. ovvero lunghi da 40 a 60 μ. e larghi da 20 a 24 μ. Questi rigonfiamenti, che potrebbero considerarsi come sporangi, quando abbiano raggiunto l'intero sviluppo, se trattati coll'iodio assumono una intensa colorazione bruna, indizio di glicogene.

L'ipotesi che si tratta di sporangi è avvalorata dal fatto che mentre il contenuto sulle prime si mantiene finamente granuloso, quelli che si osservano nelle radici, nelle quali il micelio sia scomparso, presentano al loro interno innumerevoli sferuline che si colorano col iodio.

A tutt'oggi non sono riuscito ad osservare alcuna forma riproduttiva evoluta, atta a meglio specificare la posizione sistematica di questa crittogama.

Qualunque apprezzamento in merito all'attitudine patogena di essa sarebbe per lo meno prematuro; tuttavia la presenza costante del detto micelio nelle piantine deperenti, indica che un qualche rapporto intercorre fra esso ed il deperimento del frumento.

Se non è possibile di pronunciarsi a tale riguardo, resta intanto assodato dalle prove, eseguite dietro mio consiglio, essere possibile di ovviare al danno e di pareggiare la vegetazione di queste bollate col resto degli appezzamenti mediante somministrazione di nitrato di soda e zappettatura del terreno. In seguito a queste due operazioni, le piantine hanno emesso nuove radici alla cui penetrazione si opponeva lo spesso strato di crosta superficiale formatosi in seguito alle prolungate pioggie invernali, crosta che oltre ad opporsi meccanicamente, isolava altresì la pianta dagli strati profondi del terreno, ove non difettava l'umidità.

L'andamento della vegetazione ha pienamente confermato l'efficacia del trattamento proposto, essendosi le piantine languenti completamente rimesse.

Dai risultati di questo trattamento e dalle osservazioni microscopiche surriferite appaiono evidenti le differenze tra questa e la forma tipica di ofiobolo, contro la quale sarebbe inutile ricorrere alle pratiche usate con successo nel caso attuale.

Ho fatto segnare le zone occupate dalle radure, e nell'autunno prossimo alcune di esse verranno assoggettate a iniezioni di solfuro di carbonio, in vista di distruggere i germi della crittogama sudescritta; intanto ho creduto non del tutto privo di interesse descrivere questo malanno cui è facile rimediare, ed affermare la necessità di andar molto guardinghi nel pronunciarsi intorno alla causa dei deperimenti primaverili del frumento, non essendo prudente di generalizzare le pratiche colturali riconosciute efficaci in casi ben determinati, ma che potrebbero in altri essere inutili o non convenienti dal punto di vista economico.

Zoologia. — *Osmosi ed assorbimento nelle reazioni a soluzioni anisotoniche* (*Protozoi e Limnaea stagnalis*). Nota del dott. PAOLO ENRIQUES, presentata dal Socio EMERY.

Come dall'osservazione dei fenomeni particolari che si presentano allo sguardo dello sperimentatore, si traggono direttamente leggi particolari riguardanti determinati oggetti e determinate condizioni, così dall'osservazione di molti fenomeni somiglianti, ma non identici, derivano i concetti più vasti e le leggi più generali. Io mi propongo appunto, in questa Nota, di abbracciare con un solo sguardo quegli Infusorii e quelle *Limnaeae stagnales* che furono oggetto di ricerche riferite in tre Note precedenti a questa; e di esaminare i risultati generali, che forse non si potrebbero trarre da una sola serie di ricerche, fatte su un unico gruppo di animali. È la distanza grande che corre tra i Protozoi e i Molluschi, ciò che darà forza alle mie conclusioni generali, là dove fenomeni perfettamente simili si verificano in questi due gruppi di animali nelle mie esperienze.

Per mezzo di esse compaiono, nella reazione a soluzioni anisotoniche, due fenomeni, per natura loro differenti. Il primo, quello che si manifesta subito, è il fenomeno osmotico, che riguarda soltanto il passaggio dell'acqua. Esso dipende dalla semipermeabilità delle membrane che separano, nell'animale in esperienza, l'ambiente interno dall'esterno. Tale proprietà delle membrane è stata dimostrata direttamente soltanto per l'ingluvie dell'Aplisia (Bottazzi e Enriques); ma da quelle esperienze risulta anche un buon criterio per decidere se in queste da me ora riferite il fenomeno osmotico riguardi o no anche i sali. Noi trovavamo nella membrana dell'Aplisia un passaggio di acqua notevolissimo verso la soluzione ipertonica, quando sale non passava affatto in senso inverso; invece, se anche una piccolissima quantità di sale traversava la membrana, il passaggio dell'acqua si riduceva subito ad una quantità minima. Ora, quando si osserva una variazione di volume o di peso notevolissima in un animale sottoposto a variazioni di tonicità dell'ambiente, se ne deve dedurre che l'equilibrio si stabilisce senza che sale traversi le membrane. E dunque, nel caso delle nostre esperienze, che nella reazione osmotica la quale si produce come primo effetto nei Protozoi e nella *Limnaea stagnalis*, portati in ambienti più diluiti o più concentrati, le membrane agiscono come membrane semipermeabili.

Ma il mio intento non è di insistere troppo su questo concetto. Ciò che a me preme è di mettere nettamente in evidenza come nella reazione successiva, la quale si palesa assai più tardivamente, e per la quale le membrane dell'animale sono traversate da acqua e sale in maniera tale da com-

pensare la variazione di volume subìta, che in questa seconda reazione i sali passano per un meccanismo differente da quello dell'osmosi.

In primo luogo si tenga ben presente questo fatto, che tale seconda reazione non sempre si produce; quando la soluzione è troppo anisotonica, e la contrazione o dilatazione osmotica è stata troppo forte, l'animale non ripara a questo primo effetto, e muore, spesso lentamente, non incominciando nemmeno la seconda reazione compensatoria. Nei casi in cui la reazione compensatoria avviene, essa è sempre molto lenta e tardiva; vediamo p. es. degli Infusorii, portati in una soluzione ipertonica, rimanere contratti per ore o per un giorno intero (la contrazione insorge subito, in pochi secondi), e poi a poco a poco tornare alla grandezza primitiva; è evidente che il primo fatto esprime una reazione inevitabile, dannosa (spesso seguìta ben presto dalla morte), il secondo esprime invece un adattamento dell'organismo alle nuove condizioni. Il secondo fatto (questa è una condizione molto caratteristica e significativa), tanto negli Infusorii che nella *Limnaea*, oltrepassa per lo più, col suo effetto compensatorio, i limiti della grandezza primitiva; così l'animale, immerso in soluzioni ipertoniche, arriva, durante un certo periodo di tempo, a dimensioni maggiori delle iniziali. Nessun fenomeno di osmosi o di diffusione potrebbe rendere conto in maniera accettabile, di questo modo di comportarsi. È invece un carattere proprio della vita del protoplasma, quello di reagire a una condizione nuova con intensità maggiore di ciò che sarebbe necessaria per ottenere una esatta compensazione. Di più, e questo si vede bene specialmente negli Infusorii, mentre la reazione osmotica dei primi momenti è repentina, quella secondaria compensatrice è lenta e lunga. Addentrandosi più particolarmente nell'esame dei fatti, si osserva che proprio quando vi è differenza di concentrazione tra l'ambiente esterno e l'interno, i sali non passano attraverso alle membrane: e quando invece tale differenza non vi è più, perchè il passaggio dell'acqua l'ha compensata, allora i sali passano (insieme coll'acqua) per ricondurre l'animale alle condizioni primitive. Tutte queste considerazioni fatte sulla base dei risultati delle esperienze, *dimostrano*, a mio parere, che la seconda reazione non è affatto di natura osmotica, ma è la conseguenza di proprietà fisiologiche delle cellule. Noi la possiamo chiamare, a seconda dei casi, *assorbimento compensatorio*, o *escrezione compensatoria*; è evidente che questo fenomeno deve seguire le stesse leggi che seguono l'assorbimento e l'escrezione, anche nelle condizioni normali. Leggi, tra cui vi è una condizione di necessità non mai contraddetta dai fatti: la vita, anzi si potrebbe dire la *salute*, del protoplasma.

Se vogliamo fare un raffronto, consideriamo un uomo che abbia subìto un forte salasso. Esso è un animale in cui i liquidi organici scarseggiano, e devono essere repidamente reintegrati nella loro quantità, perchè la vita possa continuare. Ed allora (prescindendo dalla riformazione dei globuli rossi ecc.), fenomeni che insorgono più tardivamente, egli reagisce con un

assorbimento attraverso alla membrana del canale digerente, di acqua e di sali, non compensato da una corrispondente escrezione. Non è questo fenomeno nulla più che l'esagerazione di un processo normale; ordinariamente c'è da compensare soltanto le perdite che si subiscono per l'escrezione; in quelle condizioni patologiche che abbiamo supposto, si aggiungono a queste delle perdite artificialmente prodotte. Analogamente, nell' uomo che abbia subìto l'iniezione in circolo di una certa quantità di soluzione isotonica, si esagera il processo di escrezione, il quale normalmente compensava soltanto l'ingresso di sostanze dovuto all'assorbimento. Ed in questi due processi, di assorbimento e di escrezione esagerata, le membrane sono traversate da acqua e sali, per un processo fisiologico ancora molto avvolto nelle tenebre.

L'osmosi e l'assorbimento (o resp. l'escrezione) sono dunque due fenomeni antagonistici nelle reazioni ad ambienti anisotonici. E le membrane attraverso alle quali, in tempi differenti, ma nelle stesse, avvengono i due processi, hanno dunque la curiosa proprietà, in cui si include apparentemente una contraddizione, di essere permeabili ed impermeabili ai sali: sono impermeabili osmoticamente, permeabili per assorbimento; i sali non possono passare per il processo fisico della diffusione, ma possono passare per un meccanismo fisiologico, legato alla vita del protoplasma. Un fatto di anche più palese antagonismo potrò mettere in evidenza tra breve, per ciò che riguarda l'assorbimento nelle Oloturie; mi basta per ora di impostare la questione; si è lungamente discusso se l'assorbimento sia o no un processo fisico di diffusione; e si è dimostrato che non lo è; adesso c'è un passo di più da fare: decidere se nell'assorbimento la diffusione sia uno degli elementi del processo, o se esso ne sia del tutto indipendente. Nelle presenti ricerche, sebbene non vi sia una sicura risposta a questa questione, vi è qualche cosa in proposito; esse hanno infatti portato degli esempî in cui l'assorbimento, attraverso a membrane bagnate dalle due parti da soluzioni tra loro anisotoniche, comincia solo tardivamente, quando già la possibilità della diffusione è tolta, perchè il passaggio osmotico dell'acqua ha stabilito l'equilibrio di concentrazione tra dentro e fuori.

Mi preme anche di stabilire, rispetto agli animali privi di canale digerente, che è falso il concetto dell'assorbimento in essi per endosmosi. Esso deriva da una pura apparenza formale, ed è stato sempre tramandato dalla tradizione, senza tentare di sottoporlo alla critica. Le Opaline, Infusorii senza canale digerente, e che quindi si nutrono assorbendo i materiali attraverso alla membrana che limita esternamente il loro corpo, presentano, sottoposte all'azione di soluzioni anisotoniche, le medesime rapide variazioni di volume, per le quali si deve dedurre la impermeabilità osmotica ai sali. E, come gli altri Infusorii che ho sperimentato, e come la *Limnaea stagnalis*, i fenomeni successivi di compensazione insorgono tardivamente, e soltanto quando la pri-

mitiva reazione osmotica non sia troppo forte; passano dunque i sali attraverso alla loro membrana esterna, proprio quando la differenza di concentrazione tra dentro e fuori non esiste più. Insomma, esse mostrano gli stessi fenomeni che si osservano negli animali con canale digerente. Il fatto di avere gli altri animali la membrana assorbente (o almeno la membrana assorbente per eccellenza) introflessa dentro il corpo a formare il canale digerente, mentre questi non la hanno, non è una differenza che debba portare di necessità come conseguenza un diverso meccanismo di assorbimento nei due casi. Dunque *a priori* non si doveva ritenere che gli animali senza canale digerente si nutrano per endosmosi. Tanto più che vi sono molti organismi in cui non esiste un tal meccanismo di chiusura della *bocca*, da far sì che il canale digerente possa assumere dei rapporti coll'ambiente esterno diversi da quelli delle membrane limitanti il corpo. *A posteriori* poi quel concetto va completamente rigettato, ora che vediamo la stessa indipendenza tra endosmosi ed assorbimento in questi animali come negli altri.

Che vi siano esseri viventi capaci di assumere sali per osmosi, pare di sì. Alcuni Flagellati, tra cui gli *Oikomonas*, sembrano essere nel numero; probabilmente anche i Batterii vi sono compresi. Lo fa sospettare la facilità con cui si possono trasportare questi organismi da un ambiente ad un altro molto diverso per concentrazione, direttamente, senza che si osservino fenomeni di contrazione (resp. dilatazione), nei Flagellati, in cui è possibile una simile indagine, o la morte nei Batterii i quali per la loro piccolezza non si prestano ad essa. Forse anche certi vegetali inferiori, certi Nostoc e certe Diatomee, per simili ragioni, presentano le stesse condizioni. La differenza tra tutti questi organismi e gli altri che abbiamo fino ad ora preso in considerazione, consiste in questo: che in questi i sali attraverserebbero subito la membrana esterna, quando l'ambiente diviene ad un tratto più concentrato o più diluito; passerebbero subito per diffusione, senza attendere l'intervento delle funzioni cellulari.

Infine, due parole relativamente alla adattabilità del protoplasma a vivere in ambienti variamente concentrati. Tale questione è distaccata dallo studio della permeabilità e delle proprietà delle membrane. Si riannoda però alle esperienze da me fatte, in quanto osservavo la morte degli animali, ogni volta che conducevo la concentrazinne dell'ambiente ad una troppo elevata (anche se la accrescevo a grado a grado). Così le *Limnaeae*; ed è caratteristico il fatto che, quando il protoplasma già si trova in condizioni tali che non può più compiere la funzione dell'assorbimento compensatorio, ancora persiste la capacità della reazione osmotica con passaggio di acqua straordinariamente prevalente sul passaggio dei sali. Ben comprensibile, dal punto di vista dell'adattamento all'ambiente, che gli animali delle infusioni, i quali vivono in un ambiente molto variabile, resistano molto di più alle variazioni di concentrazione; e da ricordarsi un'ultima volta, l'aumento dei sali nell'in-

terno dei germi derivati da organismi fatti vivere artificialmente in un ambiente più concentrato del loro abituale.

Come conclusione generale delle ricerche di vario genere compiute su animali diversi, riferite nelle tre Note precedenti a questa, e qua prese in considerazione da punti di vista più generali, posso dire che:

Esistono animali e condizioni in cui le stesse membrane non lasciano passare i sali disciolti nell'acqua, durante un lungo tempo, in cui la concentrazione ai due lati di esse è diversa; e li lasciano passare dopo, insieme con l'acqua (passaggio per assorbimento), quando la concentrazione già era divenuta, ai due lati la stessa, a causa del passaggio osmotico dell'acqua.

Passaggio osmotico e passaggio per assorbimento significano cose che forse sono *completamente indipendenti tra loro.*

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci D'Achiardi e Pickering, e un volume intitolato: *Cinquantenaire scientifique de M. Berthelot (1851-1901).*

Il Socio Capellini fa omaggio della propria pubblicazione: *Balene fossili toscane.* I. *Balaena etrusca.*

PERSONALE ACCADEMICO

Colle norme prescritte dallo Statuto, l'Accademia procedette, nell'adunanza generale del 31 maggio 1902, all'elezione del Presidente. Lo spoglio dei voti venne fatto dai Soci Ciamician e Lanciani.

La votazione dette i risultati seguenti:

Votanti 62. — Villari P. 54; Comparetti 3; Guidi 2; Ascoli 1. Schede bianche o nulle 2. — Eletto Villari Pasquale.

Questa elezione, a termini dell'art. 15 dello Statuto, sarà sottoposta all'approvazione di S. M. il Re.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'Associazione australiana per l'avanzamento della scienza, di Sydney; le Società degli Spettroscopisti di Catania; le Società geologiche d'Ottawa e di Sydney; l'Istituto Smithsoniano di Washington; l'Università di Cambridge.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di Studi superiori di Firenze; il Ministero dell'Interno.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 31 maggio 1902.

Berthelot M. — 1851-1901. Cinquantenaire scientifique de M. B. 24 novembre 1901. Paris, 1902. 4°.

Brédikhine Th. — Su le rôle de Jupiter dans la formation des radiants composés. St. Pétersbourg, 1902. 4°.

Capellini G. — Balene fossili toscane. I Balaena etrusca. Bologna, 1902. 4°.

Clerici E. — Ancora sulle polveri sciroccali e sulle pallottole dei tufi vulcanici. Roma, 1902. 8°.

Id. — Una conifera fossile dell'Imolese. Roma, 1902. 8°.

D'Achiardi A. — Appendice alla Guida al Corso di mineralogia. Pisa, 1902. 8°.

Id. — Considerazioni sull'acqua di cristallizzazione. Pisa, 1902. 8°.

Giudice G. — Sintomatologia e semiotica clinica. P. 2ª. Livorno, 1902. 8°.

Hellmann G. — Regenkarte der Provinz Sachsen und der Türingischen Staaten. Berlin, 1902. 8°.

Julius W. H. ecc. — Preliminary Report of the Dutch Expedition to Karang Sago (Sumatra) for the Observation of the total Solar Eclipse of May 1901. Amsterdam, 1902. 8°.

Lussana S. — Descrizione di un manometro ad aria compressa utilizzabile a qualunque pressione. Pisa, 1900. 8°.

Id. e *Carnazzi P.* — Influenza di un dielettrico solido interposto fra le palline di uno spinterometro sulla lunghezza della scintilla. Pisa, 1902. 8°.

Mirabella-Fisichella G. — Caduta del pene per fibroma papillare (Papilloma ulceroso). Pisa, 1900. 8°.

Id. — Due casi di carbonchio sintomatico guariti col vaccino dell'ematico? Pisa, 1899. 8°.

Id. — La castrazione delle vacche in rapporto alla zootecnia. Catania, 1898. 8°.

Id. — L'afta epizootica e sua cura. Catania, 1902. 8°.

Mirabella-Fisichella G. — L'emoterapia in rapporto all'igiene ed alla terapia. Pisa, 1900. 8°.

Nosotti I. — La cura dell'afta col metodo Baccelli adottato alla Vaccheria di Villa Pamphili in Roma. Milano, 1902. 8°.

Passerini N. — Sopra la vegetazione di alcune piante alla luce solare diretta e diffusa. Firenze, 1902. 8°.

Pickering E. C. — Variable Stars of long period. Cambridge M., 1902. 8°.

Scudder S. H. e *Lambe L. M.* — Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. II, 2; IV, 2. Ottawa, 1900-1. 8°.

Total Eclipse of the Sun, May 18, 1901. Reports on the Dutch Expedition to Karang Sago, Sumatra. Amsterdam, 1902. 8°.

Whiteaves J. F. — Catalogue of the Marine Invertebrata of eastern Canada. Ottawa, 1901. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 giugno 1902.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Zoologia. — *La Zoologia secondo il nuovo regolamento delle facoltà di scienze.* Nota del Socio C. Emery.

Dividendo il complesso delle scienze zoologiche in *Zoologia e anatomia comparata degl'Invertebrati* e *zoolog. e anatomia comparata dei Vertebrati*, il nuovo regolamento si viene anzitutto a riconoscere che zoologia sistematica e morfologia sono inseparabili, la pura sistematica, disgiunta dalla morfologia, essendo disciplina che non deve insegnarsi nelle università. Si viene altresì a riconoscere che lo studio della zoologia è tanto vasto che abbisogna di essere diviso, ma in modo differente da quello, oramai non rispondente al punto di vista moderno, e che va espresso con la separazione della zoologia dall'anatomia comparata. Io ho discusso la questione, nella prelezione al mio corso di zoologia di quest'anno, e accennato ivi a varie soluzioni, tutte migliori a mio parere della condizione attuale.

E poichè non si può pretendere di raggiungere l'ideale, bisogna contentarsi di trovare nel regolamento un miglioramento che ne permetta degli altri in avvenire.

Uno di quei miglioramenti, proposto anche da me nella citata prelezione, è l'istituzione di un corso di *biologia generale*, accennato fra i corsi complementari nel nuovo regolamento della facoltà di scienze. A mio avviso esso dovrebbe essere un insegnamento fondamentale, e tale spero divenga in

avvenire. Per ora, sono contento di vederlo accettato come complementare. Una volta avviato, la sua estrema importanza non tarderà ad essere riconosciuta.

Con questo, vengo a rispondere ad un particolare genere di biasimo che si fa al regolamento, ed è quello di avere accentuato il carattere morfologico nel titolo dell'insegnamento della zoologia, sopprimendo le parole « *e fisiologia* » comparate. In fatti non si è soppresso nulla, perchè, eccezione fatta forse pel defunto Boll, nessun professore di anatomia comparata in Italia ha mai insegnato sul serio fisiologia comparata. Il nuovo cambiamento di titolo non ha fatto altro che seppellire un morto.

E nel seppellire il morto, ha annunziato la nascita di un nuovo ramo, più fisiologico del primo, cioè della biologia generale, nella quale molto meglio troveranno posto quelle nozioni generali e comparative sui fenomeni elementari della vita che sono il ramo nuovo, rigogliosamente crescente della fisiologia.

Se, accanto a questo, dovesse sorgere un altro insegnamento di fisiologia comparata sarebbe anche il benvenuto, e noi morfologi ed etologi saluteremmo con gioia il fiorire, nelle nostre scuole, di tal ramo di studî.

Ai colleghi fisiologi rivolgo dunque un esortazione: quello di non ostacolare l'estendersi e il perfezionarsi dello insegnamento morfologico. Anche questo tende a collegarsi sempre più con lo studio delle condizioni d'esistenza degli organismi e quindi con l'etologia. E questa ultima non può divenire scientifica, senza collegarsi a sua volta con la fisiologia generale, e quindi con la fisica e la chimica.

Ma sento venirmi dagli stessi zoologi un'altra obiezione. Invertebrati e Vertebrati non sono due sezioni naturali, equivalenti, opponibili l'una all'altra del regno animale; quindi non sono nomi da sciegliere per dividere modernamente il campo di due rami d'insegnamento. In fatti, se fossi stato chiamato a scegliere i nomi, avrei preferito lasciare al corso degl'Invertebrati il nome indeterminato di zoologia generale o *zoologia e anatomia comparata* senz'altro, determinando per l'altro corso che esso invece deve trattare specialmente dei *Vertebrati*. Il mio concetto è quello che i Vertebrati hanno bisogno di un insegnamento separato, senza il quale è impossibile che gli studenti acquistino una sufficiente conoscenza della loro complicata organizzazione e dei problemi che vi si connettono. Che il nome sia più o meno corretto è cosa d'importanza secondaria. Spetterà ai titolari delle cattedre fare in modo che i loro programmi corrispondano all'indirizzo moderno delle discipline affidate a ciascuno di essi.

Fisica. — *Sul fenomeno Majorana.* Nota del Socio W. Voigt.

Il sig. Majorana ha presentato a codesta Accademia nella seduta del 4 maggio il primo risultato delle sue osservazioni sopra un fenomeno magnetico analogo all'elettrostatico di Kerr, e mi ha poi comunicato per iscritto i suoi risultati ulteriori. Mi sia permesso di mostrare che i fenomeni osservati si possono facilmente trattare in via teoretica seguendo i principî da me adoperati nella spiegazione dell'effetto Kerr.

La teoria moderna della dispersione opera con grandezze vettoriali K_h, le quali sono caratteristiche delle vibrazioni proprie delle particelle ponderabili — elettroni — e le collega con le forze elettriche K propagantesi nell'etere, mediante relazioni lineari fra le rispettive componenti X_h, Y_h, Z_h e X, Y, Z della forma

$$X_h + a_h \frac{\partial X_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 X_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h X \quad \text{etc.} \tag{1}$$

in cui a_h, b_h, ε_h sono costanti.

Si può ora introdurre nelle formole l'azione di un campo magnetico R sopra queste vibrazioni, in via puramente fenomenologica, riunendo le ipotesi: 1° che le equazioni restino lineari nelle componenti di vibrazione; 2° che le forze agiscano solo sopra i vettori *vibranti* K_h; 3° che i termini di aggiunta non implichino consumo di energia. Limitandosi allora alle derivate, secondo il tempo, del grado più basso si ottengono necessariamente come termini del primo ordine rispetto alle componenti A, B, C del campo i seguenti:

$$c_h\left(C\frac{\partial Y_h}{\partial t} - B\frac{\partial Z_h}{\partial t}\right) \quad \text{etc.}$$

i quali, come io ho mostrato altrove, contengono la spiegazione dell'effetto Zeeman e dei fenomeni che l'accompagnano. Però essi non sono sufficienti per condurre ai fatti trovati dal Majorana, principalmente perchè l'ordine di grandezza dei parametri c_h è, nei corpi da lui studiati, assai troppo piccolo per dar luogo ad effetti così cospicui.

I termini di aggiunta del secondo grado hanno, colle medesime restrizioni di prima e per ragioni di simmetria, la forma

$$\frac{\partial^2 X_h}{\partial t^2}(A^2 d_h + B^2 d'_h + C^2 d'_h) + \left(\frac{\partial^2 Y_h}{\partial t^2} B + \frac{\partial^2 Z_h}{\partial t^2} C\right) A\,(d_h - d'_h) \quad \text{etc.}$$

e rappresentano, come pare, i risultati del Majorana in modo soddisfacente sotto tutti i punti di vista. Per mostrarlo, io trascurerò i termini del primo

ordine a causa dei fattori c_h, che hanno nel caso attuale valore appena apprezzabile.

Facendo allora coincidere l'asse Z con la direzione del campo, le formole (1) così completate, suonano:

$$(2)\qquad \begin{cases} X_h + a_h \dfrac{\partial X_h}{\partial t} + (b_h + d'_h R^2) \dfrac{\partial^2 X_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h X \\ Y_h + a_h \dfrac{\partial Y_h}{\partial t} + (b_h + d'_h R^2) \dfrac{\partial^2 Y_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h Y \\ Z_h + a_h \dfrac{\partial Z_h}{\partial t} + (b_h + d_h R^2) \dfrac{\partial^2 Z_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h Z \end{cases}$$

colle quali si dovranno combinare le formole Maxwell-Hertz nell'ipotesi che le componenti di polarizzazione, che compaiono in queste, abbiano i valori $X + \Sigma X_h$, $Y + \Sigma Y_h$, $Z + \Sigma Z_h$.

Da quelle formole si ricava per un' onda piana propagantesi normalmente alle linee di forza i seguenti valori degli indici di rifrazione n_n, n_p, e degli indici di assorbimento $\varkappa_n$, $\varkappa_p$ per vibrazioni elettriche normali e rispettivamente parallele alle linee di forza:

$$(3)\qquad \begin{cases} n^2_n (1 - \varkappa^2_n) = 1 + \Sigma \dfrac{\varepsilon_h\, \vartheta^2 \Delta'_h}{N'_h} \quad , \quad 2\, n^2_n\, \varkappa_n = \Sigma \dfrac{\varepsilon_h\, a_h\, \vartheta^3}{N_h} \\ n^2_p (1 - \varkappa^2_p) = 1 + \Sigma \dfrac{\varepsilon_h\, \vartheta^2 \Delta_h}{N_h} \quad , \quad 2\, n^2_p\, \varkappa_p = \Sigma \dfrac{\varepsilon_h\, a_h\, \vartheta^3}{N_h} \end{cases}$$

in cui

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta_h = \vartheta^2 - (b_h + d_h R^2) \quad , \quad \Delta'_h = \vartheta^2 - (b_h + d'_h R^2) \\ N_h = \Delta^2_h + a^2_h\, \vartheta \quad , \quad N'_h = \Delta'^2_h + a^2_h\, \vartheta^2 \end{cases}$$

e $2\pi\, \vartheta = \tau$ rappresenta il periodo di vibrazione.

Dunque il corpo, nel campo magnetico, diventa birifrangente e pleocroitico come un ordinario cristallo uniasse. Il Majorana ha potuto infatti, dietro mio consiglio, constatare direttamente questo pleocroismo.

Ammettendo, nei corpi studiati e nel campo delle osservazioni, $\varkappa$ piccolo rispetto all'unità, n_n e n_p poco differenti fra di loro in modo da potere sostituire $2n_0$ ad $n_n + n_p$ (intendendo con n_0 il valore originario, senza campo, dell'indice di rifrazione) e di poi supponendo $R^4 \vartheta^4 d_h^2$ piccolo rispetto a $(\vartheta^2 - b_h)^2$, si ottiene dalle (3) e (4) con facile riduzione:

$$(5)\qquad \begin{cases} n_n - n_p = \dfrac{R^2 \vartheta^2}{2n_0} \Sigma \dfrac{\varepsilon_h (\Theta^2_h - a^2_h\, \vartheta^2)(d'_h - d_h)}{N_h\, N'_h} \\ n_n\, \varkappa_n - n_p\, \varkappa_p = \dfrac{R^2 \vartheta^3}{n_0} \Sigma \dfrac{\varepsilon_h\, a_h\, \Theta_h (d'_h - d_h)}{N_h\, N'_h} \end{cases}$$

in cui si è posto $\vartheta^2 - b_h = \Theta_h$. Si può interpretare in queste formole la grandezza $n_n - n_p$ come la *misura della birifrangenza* ed $n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p$ come la *misura del pleocroismo.*

Le formole (5) si semplificano di molto, se si ammette che il mezzo sia caratterizzato principalmente da *una* riga d'assorbimento nell'ultravioletto; ciò che si verifica in molti casi. Allora il quoziente fra pleocroismo e birifrangenza prende il valore speciale:

$$\text{(6)} \qquad \frac{n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p}{n_n - n_p} = \frac{2a\,\Theta\vartheta}{\Theta^2 - a^2\vartheta^2}$$

in cui naturalmente non compare più l'indice h.

Ora segue dalle (3) che senza azione del campo

$$\text{(7)} \qquad \frac{2n_0^2\,\varkappa_0}{n_0^2 - 1} = \frac{a\,\vartheta}{\Theta};$$

se quindi si pone:

$$\text{(8)} \qquad \frac{2n_0^2\,\varkappa_0}{n_0^2 - 1} = \operatorname{tg}\varphi,$$

si avrà

$$\text{(9)} \qquad \frac{n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p}{n_n - n_p} = \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Le osservazioni del Majorana hanno condotto alle seguenti leggi per la birifrangenza: che questa è proporzionale al quadrato del campo, proporzionale alla concentrazione delle soluzioni molto diluite ed indirettamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda.

La prima legge è contenuta senz'altro nella (5); la seconda segue pure da questa, poichè in soluzioni diluite, in cui le molecole attive non agiscono sensibilmente l'una sopra l'altra, a, b, d sono indipendenti dalla concentrazione, ed ε cresce proporzionalmente con questa. La terza segue pure dalla (5), se, come è per solito, la sostanza è caratterizzata in prima linea da righe di assorbimento nell'ultravioletto, giacchè allora Θ_h è sensibilmente proporzionale a ϑ^2, N_h ed N'_h a ϑ^4.

Per ciò che riguarda l'assorbimento, il Majorana ha trovato che all'onda più lenta corrisponde l'assorbimento maggiore. Questo segue in fatti dalla formola (9); poichè siccome nelle sostanze cimentate $\varkappa_0$ era piccolo e $n_0 > 1$, si ha φ piccola e quindi

$$\frac{n_n \varkappa_n - n_p \varkappa_p}{n_n - n_p} > 0.$$

Geologia. — *I terreni terziarî della Provincia di Roma.* I. *Eocene.* Nota del Corrispondente CARLO DE STEFANI.

Fin dal 1878, per mia semplice istruzione, cominciai a studiare i terreni terziarî della provincia romana. Se avessi pubblicati prima i risultati, per quanto sommarî, certe questioni che tuttora durano sarebbero forse già state risolute; perciò mi risolvo a pubblicarli ora.

La linea di divisione fra l'Appennino settentrionale ed il centrale da me proposta nel 1881 è stata poi accettata in massima da Giovanni Marinelli e dai geografi, ed ha a favor suo ragioni anche più numerose di quelle già state accennate. Quand'anche fondamento alla divisione fosse stata la pura morfologia, questa non avrebbe portato a conclusioni diverse da quelle cui portarono gli studî litologici, geologici e stratigrafici. Ora appunto i monti del circondario di Civitavecchia appartengono all'Appennino settentrionale, gli altri della provincia all'Appennino centrale.

Base ai terreni terziarî è quasi esclusivamente la Creta. Nei monti di Civitavecchia al Fosso Cupo, alla Tolfa, è base il Neocomiano, con ittioliti, che, ritenuti prima resti vegetali, furono studiati dal De Bosniaschi. Nella rimanente provincia è base universalmente la Creta, rappresentata da calcari coralligeni a Rudiste, con frammenti di Briozoi, Lamellibranchi, ed altri organismi, qualche volta da Dolomite, di *facies* che dirò *balcanica*, diffusa nella penisola Balcanica ed in tutto l'Appennino centrale, per contrasto alle altre *facies* che si trovano a settentrione e a mezzogiorno. Nella valle del Licenza, sotto l'Eocene, invece de' calcari cretacei a Rudiste trovasi un calcare rosso con vene spatiche, talora con selce rossa, spesso screziato, con frammenti di Molluschi e parmi, anche, di Rudiste, piuttosto argilloso e schistoso, che è riunito ai calcari del Lias superiore di Tivoli; ma che io credo probabilmente equivalente alla *Scaglia* cretacea (1).

Ed ora passiamo, con ordine cronologico, ai terreni terziarî.

L'Eocene è rappresentato da due *facies* ben differenti, quasi corrispondenti a quelle della Creta. Una è la facies *nord apenninica*, costituita per lo più da terreni di mare profondo, comprese le marne e le arenarie formate coi materiali frammentizi portati in alto mare in rispondenza ai terreni cri-

(1) La *Scaglia* in alcune parti delle Alpi, p. es. nel Vicentino, è certamente in parte cretacea. Nell'Apennino centrale è in parte eocenica. Il Lotti ha trovato nella *Scaglia* a Titignano presso Orvieto un *Inoceramus* che dalla descrizione pare l' *I. Monticuli* Fugg. et Kast. e ne induce l'età cretacea di quella. La sua induzione è possibile; però il detto *I.* trovasi anche alla Costa dei Grassi nella montagna di Reggio-Emilia con l' *I. Cripsii* Mant. in terreno eventualmente eocenico.

stallini delle Alpi occidentali, delle grandi isole tirrene e delle minori isole esistenti nell'area dell'Appennino settentrionale.

Questa *facies* è rappresentata quasi esclusivamente nel circondario di Civitavecchia, cioè nei monti della Tolfa, poi nei monti di Viterbo e in quelli di Trevinano, ultime pendici del monte di San Casciano e di Cetona al confine con la provincia di Siena.

L'altra è una *facies* essenzialmente propria alle catene assiali dell'Appennino centrale e meridionale, e forse di Sicilia, che direi *facies ausonia*.

Questa, così diversa da quella *nord-Apenninica*, ed un po' meno da quella *greca* e pure garganica, è coerente alle immense rocce calcaree che ne formano il substrato, alla mancanza di rocce cristalline circonvicine e forse alle profondità maggiori, alle quali probabilmente si deve anche la mancanza dell'Eocene in tanti luoghi della provincia e dell'Appennino a sud. Essa trovasi solo in alcune valli secondarie dell'Aniene e forse, raramente, nella valle del Sacco.

Il calcare nummulitico che nell'Appennino settentrionale rappresenta la parte inferiore dell'Eocene, nei monti di Civitavecchia non l'ho trovato; nè ho studiato il contatto fra il calcare neocomiano del Fosso Cupo e le rocce eoceniche sovrincombenti [1].

Nei monti della Tolfa il terreno eocenico più antico è dunque l'arenaria (*Macigno*) non molto abbondante, ma formante quà e là piccole cupole (Furbara, Santa Teresa, Santa Marinella, ecc.) [2].

È senza fossili, ma identica per situazione e per costituzione a quella che forma la parte media dell'Eocene medio nell'Appennino settentrionale [3].

[1] Probabilmente il luogo più vicino nel quale è rappresentata la parte inferiore dell'Eocene sono i monti di Roccasecca sul Liri, dove, nella valle della Melfa, trovai ghiaie di calcari con *Alveolina* di quella *facies greca* che si estende dalla Grecia fino alla Dalmazia ed in Italia al Gargano ed alla Maiella; è questo l'unico luogo del bacino del Liri nel quale sia indicato l'Eocene in modo sicuro.

[2] Nella *Carta della Campagna Romana*, pubblicata dall'*Ufficio geologico*, si attribuisce l'arenaria un poco più sfatta dei dintorni di Santa Severa e di Furbara presso il littorale al Miocene inferiore, terreno che in queste regioni non si conosce.

[3] Contiene banchi di Nummuliti e di Orbitoidi nell'Umbria, dove il Bonarelli esprime il dubbio che sia Oligocenica, e Nummuliti scarse in varie parti dell'Appennino, specialmente nei dintorni di Firenze. Quivi sono in banchi nella parte superiore (Madonna del Sasso, a sud di Vinci), o sperse nell'arenaria (Monte Ceceri, S. Andrea a Sveglia): furono indicati in altri luoghi dei dintorni di Firenze; ma non provengono dal Macigno, bensì da lenti di calcare arenaceo, nummulitico, che fa parte della formazione sovrastante. A S. Andrea a Sveglia il Marinelli trovò per primo *Nummulites Lucasana* Def., *N. Faesulana* Trab. (= *N. Tchihatcheffi* D'Arch. var. a camere più fitte), *N. Beaumonti* D'Arch., *N. subbeaumonti* De la H. (= *N. Cocchii* Trab.), *Assilina, Orbitoides*. I cavatori chiamano anche i fossili *aglie* o *agliotti*, cioè ghiaie, ghiaiotti, non perchè li abbiano mai conosciuti, ma perchè li confondono con le altre ghiaiette della minuta puddinga poligenica. Il Bonarelli ritiene oligocenico anche il Macigno di Val di Magra che pure in

Succede ed in parte equivale al Macigno, nei monti predetti, e forma anche il monte Jugo presso Viterbo, una alternanza di arenaria calcarifera compattissima (*Pietraforte*), di schisti argillosi, di calcari compatti rosei o bigi (*Palombino*) ricchissimi di fucoidi, e calcari screziati con Nummuliti indicati nella massima parte dei monti di Civitavecchia, secondo l'eccellente carta geologica di Tommaso Tittoni integralmente riportata nelle Carte dell'Ufficio geologico, ed appartenenti alla parte superiore dell'Eocene medio. Nella *pietraforte* dei dintorni di Civitavecchia trovai i *Bathysiphon*, fossili senza importanza paleontologica, in quella di Monteromano un *Inoceramus Cripsii* Mant. Nei calcari screziati dei dintorni di Canale Monterano distinsi *Alveolina* cfr. *oblonga* Duj., *Nummulites curvispira* Mgh.. *N. subirregularis* De la H. Sono rocce e fossili identici a quelli che occupano simile piano nei dintorni di Firenze e nell'Appennino romagnolo (¹) ed equivalenti

---

vecchie carte, contro il parere di persone competenti, era indicato sovrastante ai terreni schistoso-calcarei della vallata. Questo scambio di stratigrafia fu la vera causa dei gravi errori commessi per la galleria del Borgallo, come errori stratigrafici consimili lo furono per quasi tutte le grandi gallerie del nostro Appennino, i cui studî geologici erano stati affidati a persone non competenti, o per le quali non si tenne conto di alcuno studio geologico. Il Lotti poi, parte perchè unisce all'Eocene arenarie mioceniche, parte perchè non riconosce alcune ripetizioni di strati dovute a pieghe, divide l'arenaria eocenica dell'alto Appennino, specialmente Tosco-Modenese-Bolognese, in due zone; ma questa divisione dell'arenaria eocenica non esiste in alcun luogo e ce lo dice l'accurato esame degli spaccati naturali: bensì « la zona calcareo-argillosa » detta intermedia alle due zone arenacee è invece superiore ad anticlinali diversi di unica zona.

La *facies* eocenica *nord-Apenninica*, all'opposto di quanto sostiene il Lotti, è grandemente uniforme dalle Alpi Apuane, anzi da Sestri-Ponente alla Valle Tiberina. Dopo le cose esposte nelle presenti Note è inutile soggiunga, non perchè creda migliore il mio modo di vedere, ma per constatare le differenze, che della classificazione che il Lotti propone per varî tratti dell'Eocene apenninico in 25 diverse colonne divise ciascuna in quattro parti, io non convengo pure in una sola, per la successione stratigrafica, per la paleontologia, nè per l'età. Io non trovo da cambiare la successione dei terreni eocenici da me riassunta nel 1881, del resto dopo esame di tutta la regione, cioè: 1. calcare nummulitico che si potrebbe dire *Hauptnummuliten kalk.* e schisti policromi; 2. arenaria e calcare ad *Helminthoida*; 3. argille galestrine e zona serpentinosa.

(¹) Sulla presenza dell'*Inoceramus*, che se non fosse il *Cripsii* Mant. dovrebbe portare il nome di *I. eocenus* Mgh., nell'Eocene medio, e sulla alternanza di strati a *Inocerami* con strati a Nummuliti, coerentemente a quanto ha sostenuto il Lotti, non ho il menomo dubbio. Lo spaccato di S. Andrea a Sveglia, fra gli altri, differente dalla interpretazione, che credo in varî modi errata, datane recentemente da alcuno, ne è secondo me una chiara riprova.

Il calcare minutamente screziato a *N. subirregularis* De la H. non è da confondere col calcare a più grosse *Nummuliti* che si trova pure in questa stessa zona, per lo più immediatamente sopra l'arenaria o in mezzo all'arenaria, come nel Chianti e in generale nell'Appennino aretino e fiorentino, p. es. a Mosciano. In questa classica località esiste una inversione che non si estende ai luoghi vicini, per la quale il calcare Nummulitico

in molta parte al calcare ad *Helminthoida* di questo e del rimanente Appennino (¹).

Potrebbe darsi che da questa zona di calcari nummulitici sovrastanti al Macigno, anzi che da calcari della zona più antica derivassero le ghiaie di calcare nummulitico che riempiono i depositi quaternarî intorno Canino e Artena di Castro e quelli alla base delle colline di Cerveteri.

Soltanto nei monti di Trevinano appariscono calcari grigi compatti (*alberese*) ed argille schistose (*galestri*) contenenti qualche minimo lembo, che ritengo tufo gabbroso, il più meridionale di questo Appennino, scoperto dal Verri, costituito da minuti frantumi agglomerati di gabbro e serpentino derivanti dalle maggiori eruzioni della Maremma settentrionale. Cotali terreni qui pure appartengono all'Eocene superiore (²).

A levante e a mezzogiorno i terreni dell'Eocene medio di *facies nord-Apenninica* non appariscono più; anzi, nella provincia romana, ad est e a sud l'Eocene manca od è ridotto a pochissimi strati di *facies ausonia*. Questi appaiono in pochi punti a sinistra dell'Aniene (³), e con tratto continuo nella

---

locale pare sottostante all'arenaria. Ben la vide e tale lo giudicò il Murchison che però suppose dalla parte del piano un anticlinale non esistente. Quando il Lotti riconobbe che i calcari nummulitici dei luoghi contigui sono sovrastanti all'arenaria, disconobbe la giustissima osservazione del Murchison, e così fece il Trabucco. Forse per via di questa rettificazione fatta nei dintorni di Mosciano il Lotti sminuisce l'importanza dei calcari nummulitici sottostanti all'arenaria, e tali calcari, costituenti un estesissimo ed importante piano dell'Eocene inferiore nord-appenninico, sono talora attribuiti alla Creta inferiore, p. es. nei monti di Barga, nelle carte pubblicate dall'Ufficio geologico, redatte da Lotti e da Zaccagna; come, ripetutamente, i galestri rossi nei quali alterna la parte superiore dei detti calcari nummulitici, vengono tenuti artificiosamente separati, e col nome di *scaglia rossa* attribuiti alla Creta superiore.

(¹) Da prima univo questo calcare all'Eocene superiore; ma dopo le Nummuliti trovatevi e descritte dal Marinelli, lo attribuisco alla parte superiore dell'Eocene medio.

(²) Su tale età sono ormai d'accordo i geologi italiani, salvo qualche recente eccezione. Se talora la disposizione stratigrafica non si può osservare per mancanza di altri terreni, od assai raramente rimane incerta, quasi universalmente essa è tale da non ammettere dubbî nell'osservatore. Trabucco recentemente attribuì a differenti piani dell'Eocene le serpentine dei dintorni di Firenze: però quelle dell'Impruneta non fanno eccezione alle altre perchè anch'esse fan parte della zona sovrastante ai calcari ad *Helminthoida* con *N. subirregularis* de la H., dei Falciani.

Lo Zaccagna nei dintorni di Montecatini e Monsummano, ed altri, hanno talora attribuito alla presente zona serpentinosa le brecciole che qualche volta accompagnano il calcare nummulitico delle zone più antiche e che sono glauconiose, e formate da frantumi di rocce antichissime, come *gneiss*, graniti, dioriti o diabasi talora serpentinizzati ma con caratteri diversi dalle serpentine derivanti da Peridotiti; talora vi saranno forse anche frantumi di serpentine, ma d'origine e d'età diverse da quelle eoceniche.

(³) Il De Angelis mi attribuì una confusione di strati nummulitici di Castel Madama col Miocene; ma per verità questa è la prima volta che io parlo dei calcari nummulitici della provincia di Roma fuori di Civitavecchia.

valle del suo affluente Licenza, specialmeute a destra, a Roccagiovane, Licenza, e rimpetto Percile.

Essi sono perfettamente concordanti sopra il calcare rosso con selce che credo Cretaceo, e sono banchi regolari di calcare selcifero, grigio chiaro o scuro, compatto o anche ceroide, più spesso screziato, alternativamente fino e grossolano, organogenico, e principalmente costituito da *Nummulites* e da *Orbitoides* con frammenti di Coralli e di Briozoi che gremiscono tanto il calcare quanto la silice nella quale sono eventualmente convertiti. Vi sono rappresentati varî piani dell'Eocene, come risulta dalle seguenti specie determinate tutte dal mio assistente dott. Alessandro Martelli.

Rimpetto Percile, in strati bassi, si trovano insieme *Alveolina* sp., *Orbitoides aspera* Gümb., *O. papyracea* Boub., *Nummulites Guettardi* D'Arch. et H., *N. biaritzensis* D'Arch., *N. sub Beaumonti* De la H., *N. Lamarcki* D'Arch. et H., *N. laevigata* Lck., *N. elegans* Sow., *N. planulata* Lck. Questi strati con la coppia *Lamarcki* e *laevigata*, appartengono alla parte più antica dell'Eocene medio, se non anche alla più alta di quello inferiore. Da Roccagiovane, da un frammento di calcare proveniente da strati più alti, provengono *Nummulites variolaria* Sow., *N. Guettardi* D'Arch. et H., *N. biaritzensis* D'Arch., *N. Lucasana* Defr., et var. *obsoleta* De la H., var. *granulata* De la H., *N. perforata* D'Orb. var. *Renevieri* De la H., et *obesa* Leym., fossili appartenenti alla zona media dell' Eocene medio, come l'arenaria di Civitavecchia.

Alla stessa zona o ad ogni modo all'Eocene medio, appartiene il calcare di Guadagnolo sulla sinistra dell'Aniene con la coppia *N. Lucasana* e *perforata* determinata dal Tellini al De Angelis.

Negli strati superiori, lungo tutta la valle del Liceuza, dominano grandemente le *Orbitoides* con Briozoi; talora anzi esse costituiscono l' intera massa, anche della silice. Alle specie di *Nummulites* dette sopra, subentra una piccola Nummulite striata con *Orbitoides aspera* Gümb., *O. papyracea* Boub., typus et var. *Fortisi* D'Arch., *O. dispansa* Sow., *O. applanata* Sow., *O. radians* D'Arch., *Heterostegina* sp., *Anomalina* sp., *Operculina* sp., il quale complesso è attribuibile, per l'abbondanza delle *Orbitoides*, alla parte più alta dell' Eocene medio, od all'Eocene superiore. De Angelis lo accenna a Castel Madama sulla sinistra dell'Aniene. È possibile che a questo piano, se non ad altro più recente, appartengano i calcari a piccole *Orbitoides* di Veroli, Collepardo, Trisulti, nella valle del Sacco, dei quali non ho raccolto nè studiato esemplari (1).

(1) Ad Alatri, a Fumone, ed in varî luoghi dei monti Ernici, calcari cretacei a *Hippurites* e *Radiolites* con minuti e svariati frammenti organici, identici a quelli della Creta superiore (Turoniano e Senoniano) della Grecia e della Dalmazia, furono talora appellati calcari nummulitici; ma di *Nummulites* non vi è traccia alcuna. Nemmeno sono nummulitici ma cretacei i calcari screziati della Valle di S. Marta tra Fumone e Ferentino. A

L'altezza totale di questi calcari nummulitici è di non più che 500 m. Con eguali caratteri si ripetono a settentrione a Orvinio e nelle vicinanze entro i confini dell' Umbria, a levante nelle Marche, a mezzogiorno in Basilicata e nelle Calabrie per lo meno nei dintorni di Stilo.

Matematica. — *Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali con due variabili indipendenti.* Nota del dottor TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In questa Nota espongo un procedimento che permette di trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè due equazioni lineari, a due variabili indipendenti, d'ordine qualunque, delle quali una è omogenea, abbiano almeno una soluzione comune (1). Indico poi alcune applicazioni del risultato ottenuto (2).

1. Sia Φ una funzione di x, y, e consideriamo le equazioni lineari:

$$\mathfrak{D}_1 z = \sum_0^m{}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \, \partial y^j} = \Phi \ (^3) \tag{1}$$

$$\mathfrak{D}_2 z = \sum_0^n{}_{ij}\, a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \, \partial y^j} = 0\,, \tag{2}$$

ove le a, a' sono coefficienti costanti, e z è una funzione incognita di x, y.

Supponiamo poi dapprima che le espressioni $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ non abbiano a comune, come fattore, nessuna espressione differenziale, cioè che siano *prime*

Guarcino sono indicati calcari con *Orbitoides* e *Nummulites*. Calcari nummulitici non ve ne ho trovati; le *Orbitoides* appartengono alla Creta superiore, come quelle che Marinelli ha trovato nella Creta del Monte Conero ad Ancona e del Monte Iudica in Sicilia, e come quelle di Pachino pure in Sicilia: il De Gregorio distinse queste col nome generico di *Simplorbites*; ma Douvillé e Schlumberger serbano anzi ad esse il nome di *Orbitoides* attribuendo a sottogeneri diversi le specie più recenti.

(1) Nel caso di due equazioni di 2° ordine, anche non lineari, la questione è stata trattata dal prof. Bianchi. Cfr. Bianchi, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali di 2° ordine con due variabili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 4ª, vol. II, 2° semestre 1886).

(2) I calcoli relativi si troveranno esposti per disteso in una Memoria di prossima pubblicazione.

(3) Scrivendo $\sum_0^m{}_{ij}$ intendiamo che ad i, j, bisogna dare quei valori (interi e positivi o nulli) la cui somma è $\leq m$; quando invece scriveremo $\sum_0^{m}{}'_{ij}$ intenderemo di dare ad i, j solo i valori (interi e positivi o nulli) la cui somma vale m.

tra loro; allora io dico che: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le* (1), (2) *abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione:*

$$\mathfrak{D}_2\,\Phi = 0. \tag{3}$$

È intanto facile vedere che questa condizione è necessaria.

Infatti si ha, dalla (1):

$$\mathfrak{D}_2\,\mathfrak{D}_1\,z = \mathfrak{D}_2\,\Phi = \mathfrak{D}_1\,\mathfrak{D}_2\,z$$

onde, per la (2):

$$\mathfrak{D}_2\,\Phi = 0,$$

come si era asserito.

2. Mostriamo ora che quella condizione è pure sufficiente.

Prendiamo perciò le derivate parziali successive dei primi $n-1$ ordini della (1) e dei primi $m-1$ ordini della (2); otteniamo così le equazioni:

$$\sum_0^m{}_{ij}\, a_{ij}\, \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h}\,\partial y^{j+k}} = \frac{\partial^{h+k}\Phi}{\partial x^h\,\partial y^k} \quad , \quad (h+k<n-1)$$

$$\sum_0^n{}_{ij}\, a'_{ij}\, \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h}\,\partial y^{j+k}} = 0 \quad , \quad (h+k<m-1)$$

$$\sum_0^m{}_{ij}\, a_{ij}\, \frac{\partial^{i+j+n-1} z}{\partial x^{i+h}\,\partial y^{j+k}} = \frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x^h\,\partial y^k} \quad , \quad (h+k=n-1)$$

$$\sum_0^n{}_{ij}\, a'_{ij}\, \frac{\partial^{i+j+m-1} z}{\partial x^{i+h}\,\partial y^{j+k}} = 0 \quad , \quad (h+k=m-1);$$

ponendo, per brevità:

$$p_{r,s} = \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r\,\partial y^s} \quad , \quad (r+s<m+n-1)$$

$$\varphi_{r,s} = \frac{\partial^{m+n-1} z}{\partial x^r\,\partial y^s} \quad , \quad (r+s=m+n-1)$$

possiamo scrivere:

$$\sum_0^m{}_{ij}\, a_{ij}\, p_{i+h,j+k} = \frac{\partial^{h+k}\Phi}{\partial x^h\,\partial y^k} \quad , \quad (h+k<n-1) \tag{4}$$

$$\sum_0^n{}_{ij}\, a'_{ij}\, p_{i+h,j+k} = 0 \quad , \quad (h+k<m-1) \tag{5}$$

$$\sum_0^m{}'_{ij}\, a_{ij}\, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1}{}_{ij}\, a_{ij}\, p_{i+h,i+k} = \frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x^h\,\partial y^k} \quad , \quad (h+k=n-1) \tag{6}$$

$$\sum_0^n{}'_{ij}\, a'_{ij}\, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1}{}_{ij}\, a'_{ij}\, p_{i+h,j+k} = 0 \quad , \quad (h+k=m-1). \tag{7}$$

Le equazioni (6), (7) sono $n+m$ in tutto, onde supposto diverso da zero il determinante A formato coi coefficienti delle funzioni φ, esse determinano le $m+n$ funzioni φ in funzione delle p.

3. Ciò posto, è chiaro che basta determinare le $p_{r,s}$ in modo che siano soddisfatte le equazioni ai differenziali totali:

$$(8)\qquad \begin{cases} dp_{r,s} = p_{r+1,s}\,dx + p_{r,s+1}\,dy \quad , \quad (r+s < m+n-2) \\ dp_{r,s} = \varphi_{r+1,s}\,dx + \varphi_{r,s+1}\,dy \quad , \quad (r+s = m+n-2)\,. \end{cases}$$

Indichiamo poi con f una funzione di x, y e delle $p_{r,s}$ (queste quantità essendo ora riguardate come variabili indipendenti) e consideriamo le equazioni:

$$(9)\qquad \begin{cases} Xf = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \displaystyle\sum_{0}^{m+n-3}{}_{rs}\, p_{r+1,s}\frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0}^{m+n-2}{}'_{rs}\, \varphi_{r+1,s}\frac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0 \\ Yf = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \displaystyle\sum_{0}^{m+n-3}{}_{rs}\, p_{r,s+1}\frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0}^{m+n-2}{}'_{rs}\, \varphi_{r,s+1}\frac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0\,. \end{cases}$$

Allora, in virtù di una nota proprietà, affinchè il sistema (8) sia integrabile è necessario e sufficiente che il sistema (9) sia Jacobiano, cioè che sia identicamente:

$$X(Yf) - Y(Xf) = 0\,;$$

ora si ha

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{0}^{m+n-3}{}_{rs}(Xp_{r,s+1} - Yp_{r+1,s})\frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0}^{m+n-2}{}'_{rs}(X\varphi_{r,s+1} - Y\varphi_{r+1,s})\frac{\partial f}{\partial p_{rs}}\,,$$

e poichè dalle (9) si deduce: $Xp_{r,s+1} = p_{r+1,s+1} = Yp_{r+1,s}$, ne viene che dovrà essere identicamente:

$$(10)\qquad X\varphi_{r,s+1} - Y\varphi_{r+1,s} = 0 \quad , \quad (r+s = m+n-2)\,.$$

Queste equazioni sono in tutto $m+n-1$; giova però notare che esse non sono tutte indipendenti, perchè ora mostreremo che se è soddisfatta una di esse, lo saranno pure tutte le altre.

Infatti prendendo l' X e l' Y di ambo i membri delle (6), (7) otteniamo:

$$(6')\quad \sum_{0}^{m}{}'_{ij}\, a_{ij}\, X\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0}^{m-1}{}'_{ij}\, a_{ij}\,\varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_{0}^{m-2}{}_{ij}\, a_{ij}\, p_{i+h+1,j+k} = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{h+1}\,\partial y^k}\,,$$

$$(h+k = n-1)$$

$$(6'')\quad \sum_{0}^{m}{}'_{ij}\, a_{ij}\, Y\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0}^{m-1}{}'_{ij}\, a_{ij}\,\varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_{0}^{m-2}{}_{ij}\, a_{ij}\, p_{i+h,j+k+1} = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{h}\,\partial y^{k+1}}\,,$$

$$(h+k = n-1)$$

$$(7') \quad \sum_0^{n}{}'_{ij} a'_{ij} \, X\varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1}{}'_{ij} a'_{ij} \, \varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_0^{n-2}{}_{ij} a'_{ij} \, p_{i+h+1,j+k} = 0$$

$$(h+k=m-1)$$

$$(7'') \quad \sum_0^{n}{}'_{ij} a'_{ij} \, Y\varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1}{}'_{ij} a'_{ij} \, \varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_0^{n-2}{}_{ij} a'_{ij} \, p_{i+h,j+k+1} = 0 \, ,$$

$$(h+k=m-1) .$$

Dalle (6'), (6'') si ha sottraendo:

$$(6_1) \qquad \sum_0^{m}{}'_{ij} a_{ij} \, (X\varphi_{i+h,j+k+1} - Y\varphi_{i+h+1,j+k}) = 0 \quad , \quad (h+k=n-2) ,$$

e, dalle (7'), (7''):

$$(7_1) \qquad \sum_0^{n}{}'_{ij} a'_{ij} \, (X\varphi_{i+h,j+k+1} - Y\varphi_{i+h+1,j+k}) = 0 \quad , \quad (h+k=m-2) ;$$

onde le $m+n-1$ quantità $X\varphi_{r,s+1} - Y\varphi_{r+1,s}$ sono legate dalle $m+n-2$ equazioni (6_1), (7_1), che sono lineari ed omogenee; inoltre i determinanti d'ordine $m+n-2$ estratti dalla matrice dei coefficienti non possono essere tutti nulli, perchè se ciò accadesse dovrebbe pure essere nullo A, ciò che si è escluso; risolvendo pertanto le (6_1), (7_1) rispetto ad $m+n-2$ incognite, i cui cofficienti costituiscano uno di questi determinanti non nulli, avremo queste incognite espresse come funzioni lineari ed omogenee della rimanente, onde se questa è nulla, sono pure nulle tutte le altre $m+n-2$; e ciò prova il nostro asserto.

4. Ora mostreremo che dalle (10) si deduce la (3), e viceversa.

Infatti dalle (6'), dall' ultima delle (6'') (cioè quella corrispondente ad $h=0$) e dalle (6), (4), si ricava facilmente:

$$\sum_0^{m}{}'_{ij} a_{ij} \Big[\sum_0^{n-1}{}_{k} a'_{n-k,k} \, X\varphi_{i+n-1-k,j+k} + a'_{0n} \, Y\varphi_{i,j+n-1} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \, \varphi_{i+h,j+k} +$$

$$+ \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} \, p_{i+h,j+k} \Big] + \sum_0^{m-1}{}'_{ij} a_{ij} \Big(\sum_0^{n}{}'_{hk} a'_{hk} \, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1}{}_{hk} a'_{hk} \, p_{i+h,j+k} \Big) +$$

$$+ \sum_0^{m-2}{}_{ij} a_{ij} \Big(\sum_0^{n}{}_{hk} a'_{hk} \, p_{i+h,j+k} \Big) = \sum_0^{n}{}_{hk} a'_{hk} \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h \, \partial y^k} ,$$

ora, in virtù delle (5), (7) le espressioni entro le (...) sono entrambe nulle, quindi rimane:

$$(11) \quad \sum_0^{m}{}'_{ij} a_{ij} \Big[\sum_0^{n-1}{}_{k} a'_{n-k,k} \, X\varphi_{i+n-1-k,j+k} + a'_{0n} \, Y\varphi_{i,j+n-1} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \, \varphi_{i+h,j+k} +$$

$$+ \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} \, p_{i+h,j+k} \Big] = \mathfrak{D}_2 \, \Phi .$$

Ora osserviamo che se nelle (7') al posto di h si legge $h-1$, e poi si permutano h, k con i, j si ha:

$$\sum_0^n{}'_{hk} a'_{hk} \mathrm{X}\varphi_{i+h-1,j+k} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} p_{i+h,j+k} = 0\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m \quad ; \quad i + j = m)\,;$$

e dall' ultima delle (7'') (cioè quella corrispondente ad $h = 0$) permutando h, k con i, j si ottiene:

$$\sum_0^n{}'_{hk} a'_{hk} \mathrm{Y}\varphi_{h,m+k-1} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \varphi_{h,m+k} + \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} p_{h,m+k} = 0\,.$$

Sostituendo nella (11) e riducendo, si deduce:

$$(12) \qquad -a'_{0n} \sum_0^{m-1}{}_k a_{m-k,k} (\mathrm{X}\varphi_{m+k-1,n+k} - \mathrm{Y}\varphi_{m-k,n+k-1}) +$$

$$+ a_{0m} \sum_0^{n-1}{}_k a'_{n-k,k} (\mathrm{X}\varphi_{n-k-1,m+k} - \mathrm{Y}\varphi_{n-k,m+k-1}) = \mathfrak{D}_2 \Phi\,.$$

Ora, se le (10) sono soddisfatte, le quantità entro le (...) sono nulle e così otteniamo la (3). Inversamente, se la (3) è soddisfatta, l'equazione precedente unita alle (6_1), (7_1) dà un sistema di $m+n-1$ equazioni, lineari ed omogenee fra le $m+n-1$ incognite $\mathrm{X}\varphi_{r,s+1} - \mathrm{Y}\varphi_{r+1,s}$, e siccome è facile vedere che il determinante dei coefficienti, a meno del segno, vale A, il quale è stato supposto diverso da zero, si conclude che devono necessariamente esser nulle tutte le incognite; e così otteniamo le (10), come avevamo asserito.

In tal modo il nostro teorema è completamente dimostrato.

Abbiamo supposto che il determinante A fosse diverso da zero; però il teorema, in generale, continua ancora a sussistere anche se $\mathrm{A} = 0$.

5. Supponiamo ora che le espressioni $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ non siano prime tra loro; sia cioè:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}' \mathfrak{D} \quad , \quad \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}'' \mathfrak{D}\,,$$

ove $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ sono espressioni prime tra loro.

Le (1), (2) diventano allora:

$$(1') \qquad \mathfrak{D}' \mathfrak{D} z = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}'' \mathfrak{D} z = 0\,;$$

orbene *la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni precedenti abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione*:

$$\mathfrak{D}'' \Phi = 0\,.$$

Infatti, posto $\mathrm{Z} = \mathfrak{D} z$, le equazioni (1') possono scriversi:

$$\mathfrak{D}' \mathrm{Z} = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}'' \mathrm{Z} = 0\,,$$

e applicando il teorema del § 1 a queste due equazioni, si conclude la proposizione enunciata.

6. Vediamo alcune applicazioni del teorema del § 1.

Indichiamo con $\mathfrak{D}$ un'espressione lineare analoga a $\mathfrak{D}_1$, e con $u(x, y)$ una funzione di x, y, e calcoliamo $\mathfrak{D}(xu)$; è chiaro che si avrà un risultato della forma:

$$\mathfrak{D}(xu) = x\,\mathfrak{D}u + \mathfrak{D}_x u\,,$$

$\mathfrak{D}_x$ essendo un'espressione lineare di un tipo analogo a $\mathfrak{D}$ [1].

Se la funzione u soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}u = 0$, si trae:

$$\mathfrak{D}^2(xu) = 0\,.$$

Se $v(x, y)$ è una funzione che verifica l'equazione $\mathfrak{D}v = 0$, e si pone:

$$\mathrm{U} = x\,u + v\,, \tag{13}$$

si ha $\mathfrak{D}^2\mathrm{U} = 0$.

Supponiamo ora che le espressioni $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ siano prime tra loro, allora si può dimostrare che: *Ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}^2\,\mathrm{U} = 0$ *può rappresentarsi colla* (13).

È chiaro che basta per ciò dimostrare che, data la funzione U, si può sempre determinare una funzione u che soddisfa alle equazioni:

$$\mathfrak{D}(\mathrm{U} - xu) = 0 \quad , \quad \mathfrak{D}u = 0\,,$$

ossia, posto $\Phi = \mathfrak{D}\mathrm{U}$:

$$\mathfrak{D}_x u = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}u = 0\,.$$

Dall'espressione di Φ risulta $\mathfrak{D}\Phi = 0$; quindi pel teorema del § 1 possiamo affermare che esiste sempre la funzione u, e così il teorema è dimostrato.

Supponendo sempre $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ prime tra loro, si può dimostrare che *ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}^p\mathrm{U} = 0$ *può rappresentarsi colla formola:*

$$\mathrm{U} = x^{p-1}\,u_1 + x^{p-2}\,u_2 + \cdots + xu_{p-1} + u_p\,,$$

le u *essendo funzioni che soddisfanno all'equazione* $\mathfrak{D} = 0$ [2].

[1] Se $\mathfrak{D} = \sum a_{ij} \dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\,\partial y^j}$, si ha $\mathfrak{D}_x = \sum a_{ij}\, i \dfrac{\partial^{i+j-1}}{\partial x^{i-1}\,\partial y^j}$, cioè $\mathfrak{D}_x$ non è altro che la *derivata funzionale*, rispetto ad x, dell'espressione $\mathfrak{D}$.

[2] Se l'equazione $\mathfrak{D} = 0$ si riduce all'equazione di Laplace $\Delta^2 = 0$, questo teorema è del prof. Almansi. Cfr. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$ (Annali di Matematica; serie III, t. II, a. 1898).

7. Poniamo ora: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$. Allora si può dimostrare, procedendo come nel § precedente, che *ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}U = 0$, *può esprimersi colla formola* $U = U_1 + U_2$, *ove* U_1, U_2 *sono funzioni che verificano le equazioni* $\mathfrak{D}_1 U_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 U_2 = 0$.

Da quanto precede risulta che ogni funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}_1^p \mathfrak{D}_2^q U = 0$, può rappresentarsi mediante funzioni che verificano le equazioni $\mathfrak{D}_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 = 0$.

Si può pertanto dire: *Se l'espressione* $\mathfrak{D}$ *è decomponibile nel prodotto di altre espressioni lineari, l'integrale generale dell'equazione* $\mathfrak{D} = 0$ *può esprimersi mediante gli integrali di altre equazioni più semplici.*

8. Le proprietà precedenti possono estendersi ad equazioni lineari a coefficienti variabili, aggiungendo però la condizione della commutabilità fra le varie espressioni lineari che si considerano.

Per quanto riguarda il teorema del § 1, bisogna supporre che $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ siano commutabili, cioè che $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1$; relativamente ai teoremi del § 6, bisogna aggiungere la condizione che $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ siano commutabili; per i teoremi del § 7, bisogna che $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ siano commutabili, e così pure siano commutabili $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_{1x}$ e $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_{2x}$.

Meccanica. — *Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota IV del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In una Nota precedente, la terza di questa serie [1], aveva stabilito le equazioni differenziali che reggono il moto dei varî strumenti sismici, supponendoli costituiti ciascuno da un'unica massa sospesa almeno per un punto al terreno e soddisfacente a certe condizioni relative agli assi principali d'inerzia. Quanto alle forze aveva ammesso il seguente postulato sperimentale, che non richiede alcuna ipotesi sulla loro natura e che per la sua generalità è applicabile a tutte le specie di strumenti considerati: « *Qualsiasi strumento sismico è soggetto alla gravità e ad un sistema di resi-*

[1] V. pag. 472.

stenze passive che hanno per risultante una coppia di momento infinitesimo rispetto al peso della massa oscillante » [1].

Arrivati a questo punto, sarebbe impossibile procedere alla integrazione delle equazioni differenziali trovate, perchè il precedente postulato lascia indeterminata la forma analitica delle forze. Però, senza analizzarle dal punto di vista fisico, si può facilmente risolvere la difficoltà che qui si presenta; e ciò appunto mi propongo di fare in questa Nota, ottenendo un risultato che mi sembra abbastanza notevole, perchè evita l'analisi sopra accennata, la quale si concreterebbe poi in altre ipotesi speciali più o meno verosimili ma sempre arbitrarie [2].

16. Per raggiungere lo scopo propostomi, basta ricorrere a un secondo postulato sperimentale, che è verificato con grandissima approssimazione da tutti gli strumenti registratori dei movimenti microsismici:

« *Se uno qualunque degli strumenti considerati si muove mentre il terreno è in quiete, le componenti del suo moto sono oscillazioni isocrone smorzate secondo la legge del decremento logaritmico* » [3].

Per vedere come una tale premessa sia sufficiente, seguo un metodo analogo a quello già seguito in altri lavori. Si noti che le resistenze compariscono soltanto negli ultimi termini delle equazioni (16), (16_1), (17) e (19_1), cioè in quelle funzioni Φ, Ψ, ..., Ω, che sono definite dalle posizioni (R), (R_1), (S), (T) e che furono messe in evidenza perchè non contengono esplicitamente le componenti del moto sismico. Ora le equazioni differenziali citate valgono qualunque sia il movimento del terreno; quindi, in particolare, anche quando il terreno è in quiete, cioè quando tutte le componenti del moto sismico sono nulle insieme con le loro derivate. Ma in tal caso si annullano identicamente tutti i termini delle equazioni, esclusi gli ultimi; ossia il movimento strumentale non perturbato da azioni sismiche soddisfa alle equazioni:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \ldots, \quad \Omega = 0.$$

Ciascuna di queste equazioni contiene esplicitamente una sola componente del moto relativo, ed è della forma

$$N = \varepsilon'' + I\varepsilon + J = 0,$$

rappresentando genericamente con ε una delle variabili λ, μ, ν, ω, con I

(1) V. al numero 11, pag. 473.

(2) A questa analisi aveva ricorso nella mia I Nota *Sulla determinazione dei moti sismici*, Rendic. Acc. Linc., vol. X, pag. 143. Sebbene i risultati allora ottenuti concordino con quelli che otterrò al presente, pure riconosco che molte obbiezioni si potrebbero fare alle ipotesi ammesse sulle singole forze, specialmente sugli attriti delle leve scriventi, che sono la parte più importante delle resistenze passive.

(3) S'intende che le conseguenze alle quali arriverò sono applicabili soltanto agli strumenti che non si scostano sensibilmente dalla legge enunciata.

una funzione nota del *peso*, che può essere anche nulla, e con J una funzione lineare delle forze incognite.

Poichè si ammette che il moto rappresentato dalla variabile ε e retto dall'equazione $N = 0$ è un'oscillazione smorzata secondo la legge del decremento logaritmico, ε deve avere la forma

$$\varepsilon = e^{Ht}(P \operatorname{sen} Kt + Q \cos Kt) \equiv f(t); \tag{20}$$

e quindi la funzione N, con la quale si rappresenta genericamente una delle Φ, Ψ, ..., Ω, deve essere del tipo

$$\varepsilon'' - 2H\varepsilon' + (H^2 + K^2)\,\varepsilon. \tag{21}$$

Per dimostrarlo basterà provare: *a*) che la ε definita dalla (20) è la funzione più generale soddisfacente alle condizioni impostele dalla natura del movimento strumentale; *b*) ch'essa è appunto l'integrale generale della equazione

$$\varepsilon'' - 2H\varepsilon' + (H^2 + K^2)\,\varepsilon = 0.$$

a) Qualunque siano le costanti P e Q, esiste sempre un istante t_0, definito dalla condizione

$$\frac{Q}{P} = -\,tg\,K\,t_0,$$

nel quale la funzione $f(t)$ si annulla; ma allora essa si annulla anche in tutti e soli gl' istanti della forma

$$t_0 + m\tau,\ (m = \text{intero qualunque})$$

purchè risulti

$$K\tau = \pi;$$

quindi, prefissata mediante l'esperienza la costante τ, basterà prendere

$$K = \frac{\pi}{\tau} \tag{V}$$

perchè la funzione $\varepsilon = f(t)$ rappresenti un *movimento oscillatorio col periodo semplice eguale a* τ.

Resta determinato anche un istante t_1, definito dalla condizione

$$\frac{PK + QH}{QK - PH} = tg\,K\,t_1,\ (^1)$$

(1) Si può osservare che t_1 non è arbitrario, ma anzi dipende da t_0 e non differisce mai da t_0 per multipli interi di π. Infatti, ricordando la definizione di t_0, questa eguaglianza diventa:

$$tg\,K\,t_1 = \frac{H\,tg\,Kt_0 - K}{K\,tg\,Kt_0 + H}.$$

Se ora fosse

$$t_1 = t_0 + r\pi,$$

sarebbe

$$tg\,K\,t_1 = tg\,K\,t_0,$$

e la precedente identità porterebbe alla conseguenza assurda

$$K = 0.$$

nel quale si annulla la funzione

$$\varepsilon' = f'(t) = e^{Ht} [(PH - QK) \operatorname{sen} Kt + (PK + QH) \cos Kt],$$

e allora si trova ch' essa si annulla anche per tutti gl' istanti della forma

$$t_1 + m\tau \ (m = \text{intero qualunque}).$$

Ma le radici di $\varepsilon' = 0$ sono istanti di massimo o minimo per ε; i valori assoluti di questi massimi e minimi sono appunto le *ampiezze* delle oscillazioni semplici; e quindi se l'ampiezza d'una oscillazione qualunque è

$$\varepsilon_1 = |f(t_1)| = e^{Ht_1} | P \operatorname{sen} K\, t_1 + Q \cos K\, t_1 |,$$

l'ampiezza della successiva sarà

$$\varepsilon_2 = |f(t_1 + \tau)| = e^{H(t_1+\tau)} | P \operatorname{sen} K(t_1 + \tau) + Q \cos K(t_1 + \tau) |;$$

ossia ricordando che, per la (V), i coefficienti di e^{Ht_1}, $e^{H(t_1+\tau)}$ hanno identico valore assoluto, sarà

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot e^{H\tau}.$$

Siccome la legge del *decremento logaritmico* dice che deve essere costante e > 1 il rapporto $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$, prefissato coll'esperienza il valore h di questo rapporto, basterà prendere

$$(V_1) \qquad H = -\frac{\lg_e h}{\tau}$$

perchè la funzione ε rappresenti veramente il moto strumentale.

Resta ancora a dimostrare che ε è la funzione più generale dotata di questa proprietà. Infatti supponiamo invece che ne esista un'altra, v: allora v dovrà annullarsi soltanto negli istanti $t_0 + m\tau$ che annullano ε, e diventar massima o minima solo negli istanti $t_1 + m\tau$ che annullano ε'.

Ma qualunque sia v, possiamo sempre determinare una funzione u in modo che risulti

$$v = \varepsilon + u;$$

donde

$$v' = \varepsilon' + u'.$$

Perchè v e v' si annullino rispettivamente con ε e con ε' è necessario che anche u e u' si annullino con ε e con ε', cioè che sia

$$u = \varphi \cdot \varepsilon \quad , \quad u' = \psi\, \varepsilon'$$
$$[\varphi, \psi \text{ funzioni finite}];$$

e siccome dalla prima di queste egualianze si deduce

$$u' = \varphi'\, \varepsilon + \varphi\, \varepsilon',$$

questa non è compatibile con la seconda, se non è $\varphi' = 0$, ossia

$$\varphi = \psi = \text{costante}.$$

Ora si osservi che nell'espressione di ε esiste già un fattore costante arbitrario, perchè l'istante t_0 definisce il rapporto fra le costanti P, Q, non già il loro valore assoluto: dunque la ε definita dalla (20) è sostanzialmente identica a v, ossia è la funzione più generale che rappresenti il moto strumentale non perturbato.

Come si è veduto, le costanti H e K sono perfettamente determinate, essendo legate alle costanti strumentali (τ, h) dalle equazioni (V) e (V_1); invece le costanti P e Q restano arbitrarie, potendosi nei singoli casi attribuire loro valori opportuni perchè siano soddisfatte certe condizioni iniziali prestabilite. Dunque la (20) che *per ipotesi* deve essere un integrale della equazione $N = 0$, è appunto il suo integrale *generale*.

b) Questa osservazione permette di determinare subito la forma della funzione N. A tal fine basta ricordare la genesi delle equazioni differenziali del second'ordine; cioè derivare successivamente la equazione $\varepsilon = f(t)$ e fra le equazioni

$$\varepsilon = f(t)\,, \quad \varepsilon' = f'(t)\,, \quad \varepsilon'' = f''(t)$$

eliminare le costanti P e Q. Nel caso attuale l'eliminazione è facilissima perchè le equazioni sono lineari in P, Q e quindi basta eguagliare a zero il determinante dei coefficienti. Sopprimendo nel determinante i fattori comuni, in modo che il coefficiente di ε'' risulti eguale a $+1$, esso diventa identico all'espressione (21), come appunto si voleva dimostrare.

Ora sarebbe superfluo calcolare l'espressione analitica delle resistenze, poichè lo scopo finale di questa ricerca è di stabilire la forma definitiva delle funzioni $\Phi, \ldots, \Omega$. Ma siccome questa forma è appunto data dalla (21), nella quale le costanti H e K si determinano direttamente con esperienze eseguite sui singoli strumenti, si vede che le resistenze passive devono essere *funzioni lineari delle rotazioni e delle velocità apparenti*: la quale conclusione giustifica le ipotesi più restrittive che nei precedenti lavori mi avevano condotto allo stesso risultato.

17. Prima di passare alla *integrazione* delle equazioni differenziali, cioè alla *determinazione in funzione del tempo delle sei incognite sismiche* ξ, η, ζ, α, β, γ, la quale sarà oggetto d'un altro lavoro, chiuderò questa Nota con la dimostrazione d'un teorema da me già enunciato in un'altra pubblicazione [1], importante perchè può fornire un criterio sulla scelta delle disposizioni sperimentali più adatte alla determinazione del vero movimento sismico.

[1] *Lettera aperta al P. G. Alfani*, Bollett. Soc. Sism. Ital., vol. VII, fasc. 7°, nota 9.

Si supponga che le accelerazioni traslatorie del terreno ξ'', η'', ζ'', sulle quali finora non s'era fatta alcuna restrizione, siano d'un ordine di grandezza paragonabile a quello delle rotazioni; potendosi in tal caso trascurare i loro prodotti per π, χ, ϱ, tutte le equazioni differenziali si riducono alla forma

$$F + N = 0$$

essendo F una funzione lineare omogenea delle sei incognite e delle loro derivate seconde, ed N una funzione della forma (21), dipendente solo dal movimento apparente dello strumento. In pratica sarà generalmente nota la funzione N e si tratterà di determinare le incognite che compariscono in F; ma se supponiamo nota la natura del movimento sismico, si potrà invece determinare *a priori* la forma del diagramma, cioè il movimento apparente dello strumento, bastando a tal fine considerare F come funzione nota, e come incognita quella che comparisce in N. Il caso che presenta la massima importanza per le applicazioni pratiche è contemplato nel seguente teorema generale:

« Se il movimento del terreno consiste d'un numero finito di rotazioni e traslazioni simultanee, *tutte infinitesime e oscillatorie*, il movimento apparente di qualunque strumento sismico consiste d'una oscillazione strumentale smorzata sovrapposta ad altrettante coppie di oscillazioni coi periodi ordinatamente eguali a quelli delle oscillazioni sismiche ».

Una qualunque delle sei componenti, che indicherò genericamente con ϑ, sia la risultante di r oscillazioni coi semiperiodi T_i, e con le massime ampiezze a_i corrispondenti agli istanti t_i $(i = 1, 2, \dots r)$. Allora posto

$$k_i = \frac{\pi}{T_i},$$

avremo:

$$\vartheta = \sum_1^r {}_i\, a_i \cos k_i (t - t_i),$$

$$\vartheta'' = -\sum_1^r {}_i\, k_i^2 a_i \cos k_i (t - t_i);$$

e i termini della funzione F che dipendono dalla componente ϑ, e che sono della forma

$$a\vartheta + b\vartheta'',$$

si potranno raccogliere nella somma

$$\sum_1^r {}_i\, (a - bk_i^2)\, a_i \cos k_i (t - t_i).$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le componenti, sviluppando $\cos k_i (t - t_i)$, e ponendo

$$(22)\qquad \left.\begin{array}{l} p_i = (a - bk_i^2)\, a_i \operatorname{sen} k_i t_i \\ q_i = (a - bk_i^2)\, a_i \cos k_i t_i \end{array}\right\} i = 1,\ 2, \dots s$$

avremo infine una equazione differenziale della forma

$$(23)\qquad \sum_1^s p_i \operatorname{sen} k_i t + \sum_1^s q_i \cos k_i t + \varepsilon'' + A\varepsilon' + B\varepsilon = 0\,.$$

È facile provare che essa può essere soddisfatta dalla funzione

$$\varepsilon_1 = \sum_1^s m_i \operatorname{sen} k_i t + \sum_1^s n_i \cos k_i t:$$

infatti sostituendo nella (23) ad ε e alle sue derivate questa espressione di ε_1 e delle sue derivate, e raccogliendo i termini simili, si trova che la somma risultante è identicamente nulla se sono soddisfatte le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

$$(24)\qquad \left.\begin{array}{l} m_i (B - k_i^2) - n_i A k_i + p_i = 0 \\ m_i A k_i + n_i (B - k_i^2) + q_i = 0 \end{array}\right\} (i = 1\,, 2\,, \dots s).$$

Il determinante dei coefficienti di questo sistema di $2s$ equazioni a $2s$ incognite è un prodotto di s fattori della forma

$$(W)\qquad \Delta_i = (Ak_i)^2 + (B - k_i^2)^2\,;$$

e poichè nessuno dei fattori è identicamente nullo [1], il sistema stesso ammette una soluzione unica e determinata:

$$(24_1)\quad m_i = -\frac{p_i (B - k_i^2) + q_i A k_i}{\Delta_i}\,;\ n_i = \frac{p_i A k_i - q_i (B - k_i^2)}{\Delta_i}\,.$$

Dunque la funzione ε_1 è un integrale della (23). Ma essa è soddisfatta anche dalla funzione

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + e^{Ht} (P \operatorname{sen} Kt + Q \cos Kt) \equiv \varepsilon_1 + f:$$

infatti per tal valore di ε il primo membro della (23) diventa

$$\left[\sum (p_i \operatorname{sen} k_i t + q_i \cos k_i t) + \varepsilon_1'' + A\varepsilon_1' + B\varepsilon_1\right] + \left[f'' + Af' + Bf\right];$$

e mentre la prima di queste due somme si annulla per ciò che fu dimostrato

[1] Infatti Δ_i è somma di due quantità positive o nulle; ma mentre può annullarsi $(B - k_i^2)$, i fattori A e k_i sono sempre diversi da zero; perchè per le (Z) è $A = -2H = \frac{2}{\tau} \log_e h$, e $k_i = \frac{\pi}{T_i}$; ora τ e T_i sono quantità *finite*, h è > 1; quindi Ak_i non si annulla mai.

poco fa, la seconda si annulla per ciò che fu detto al numero precedente, purchè H e K siano tali da rendere

$$\text{(Z)} \qquad A = -2H, \quad B = H^2 + K^2.$$

Infine si può dimostrare che questa funzione

$$(25) \qquad \varepsilon = \sum_1^s (m_i \operatorname{sen} k_i t + n_i \cos k_i t) + e^{Ht} (P \operatorname{sen} Kt + Q \cos Kt)$$

è appunto l' integrale generale, cioè che per valori opportuni delle costanti arbitrarie P e Q possono essere soddisfatte certe condizioni iniziali prestabilite. Volendo infatti che nel tempo t_0 la funzione e la sua derivata abbiano valori prefissati ε_0, ε'_0, è necessario e sufficiente che P e Q siano radici delle equazioni

$$e^{Ht_0} (P \operatorname{sen} Kt_0 + Q \cos Kt_0) + \sum (m_i \operatorname{sen} k_i t_0 + n_i \cos k_i t_0) - \varepsilon_0 = 0$$

$$e^{Ht_0} ([PH - QK] \operatorname{sen} Kt_0 + [PK + QH] \cos Kt_0) + \\ + \sum (k_i m_i \cos k_i t_0 - n_i k_i \operatorname{sen} k_i t_0) - \varepsilon'_0 = 0 ;$$

il qual sistema ammette una soluzione unica e determinata, perchè il determinante dei coefficienti è eguale a $-K e^{2Ht_0}$ (¹).

Dunque la (25) definisce nel modo più completo la componente ε del moto apparente dello strumento; e poichè essa esprime analiticamente il contenuto del teorema, questo resta completamente dimostrato.

18. Si può dargli ora una forma alquanto diversa che mette in maggiore evidenza le relazioni fra il diagramma e il movimento sismico.

Determinando convenientemente $2s$ costanti b_i, τ_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, si può mettere la somma

$$\sum_{1}^{s}{}_i (m_i \operatorname{sen} k_i t + n_i \cos k_i t)$$

che comparisce nella (25), sotto la forma:

$$\sum_{1}^{s}{}_i b_i \cos k_i (t - \tau_i) ;$$

al qual fine è necessario e sufficiente che sia

$$m_i = b_i \operatorname{sen} k_i \tau_i, \quad n_i = b_i \cos k_i \tau_i$$

ossia

$$b_i^2 = m_i^2 + n_i^2, \quad \operatorname{tg} k_i \tau_i = \frac{m_i}{n_i}.$$

(¹) Questo prodotto non può annullarsi perchè è $K = \frac{\pi}{\tau}$ e il periodo d'oscillazione strumentale τ è sempre finito, e d'altra parte il fattore esponenziale e^{2Ht_0} non si annulla mai.

D'altra parte le (24_1), tenuto conto della (W), danno:

$$m_i^2 + n_i^2 = \frac{p_i^2 + q_i^2}{\Delta_i},$$

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{\frac{p_i}{q_i}(B - k_i^2) + Ak_i}{-\frac{p_i}{q_i}Ak_i + B - k_i^2};$$

e siccome per le (22) è

$$p_i^2 + q_i^2 = a_i^2 (a - bk_i^2)^2, \frac{p_i}{q_i} = \operatorname{tg} k_i t_i,$$

così avremo

$$(26) \qquad \begin{cases} b_i = \pm \frac{a_i}{\sqrt{\Delta_i}}(a - bk_i^2) \\ \operatorname{tg} k_i \tau_i = \frac{\operatorname{tg} k_i t_i (B - k_i^2) + Ak_i}{-\operatorname{tg} k_i t_i Ak_i + B - k_i^2} \end{cases}$$

e si potrà porre

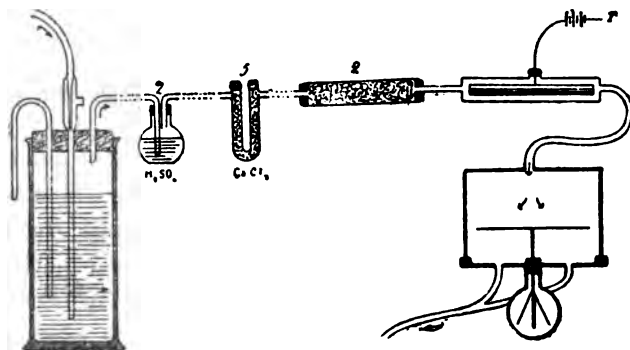
$$(25_1) \qquad \varepsilon = \sum_1^s {}_i\, b_i \cos k_i (t - \tau_i) + e^{Ht} (P \operatorname{sen} Kt + Q \cos Kt).$$

Al teorema dunque si potrà dare anche la forma seguente: « Ferme restando le ipotesi precedenti circa la natura del moto sismico, il diagramma che ne risulta consiste di un'oscillazione strumentale smorzata sovrapposta ad s oscillazioni sinnsoidali di periodo ordinatamente eguale a quello delle onde sismiche; le massime ampiezze ed i tempi ad esse corrispondenti delle onde sismiche e delle oscillazioni registrate sono legate dalle relazioni (26) ».

Fisica. — *Conduttività elettrica acquistata dall'aria proveniente da una soffieria ad acqua.* Nota di A. POCHETTINO ed A. SELLA, presentata dal Socio BLASERNA.

1. In un lavoro sulla pretesa perdita di carica elettrica per evaporazione di un liquido elettrizzato (Pochettino e Sella, Rend. d. Acc. dei Lincei IX, 2, p. 3, 1900) noi avevamo notato che l'aria proveniente da una soffieria ad acqua e poi accuratamente essiccata, diselettrizzata e privata di pulviscolo, mostrava una conduttività maggiore di quella posseduta dall'aria atmosferica, che veniva immessa nella soffieria. Questa conduttività veniva tolta o per lo meno fortemente diminuita, se la corrente d'aria passava in un palloncino, nel cui fondo si trovava dell'acqua in leggera ebollizione, poi attraverso un lungo tubo di vetro ripieno di pezzetti di pomice imbevuta d'acqua e quindi per un serpentino di vetro.

L'interpretazione che allora avevamo dato del fenomeno, era che fossimo in presenza di aria ionizzata dal trattamento che aveva subito nella soffieria, confermandoci in questa veduta il fatto della perdita della conduttività, se in seno all'aria si produceva un processo di condensazione di vapore acqueo, essendo ben noto che gli ioni servono da nuclei di condensazione. La cosa pareva degna di uno studio più accurato, ed il risultato delle nostre ricerche esponiamo brevemente nelle linee che seguono.

2. Noi riprendemmo le esperienze col seguente concetto: fare passare in un apparecchio di misura di dispersione aria soffiata semplicemente con un mantice o con una pera di gomma elastica, ovvero aria proveniente da una soffieria ad acqua. Si regolavano le cose in modo da avere nei due casi una corrente della medesima intensità, e così si poteva misurare nelle stesse condizioni la dispersione dell'aria atmosferica della stanza o della medesima aria stata violentemente sbattuta e fatta gorgogliar nell'acqua.

L'aria, prima di entrare nell'apparecchio a dispersione, sia nell'un caso, sia nell'altro, passava per 2 bocce ad acido solforico, per 5 tubi ad U ripieni di cloruro di calcio, poi per due tubi pieni di ovatta leggermente compressa. Nella figura è anche segnato un condensatore cilindrico; l'aria passava nello spazio anulare fra due cilindri concentrici, isolati fra di loro, tra i quali si poteva mantenere, in alcune esperienze, una differenza di potenziale costante. L'apparecchio di misura era costituito da un piattello metallico del diametro di circa 14 cm. circondato da una scatola metallica al suolo. La scatola era costituita da una base inferiore, su cui si adagiava un cilindro rovesciato coll'orlo immerso in un anello di mercurio, in modo da aversi tenuta d'aria. Il piattello era sostenuto da un'asta metallica infissa in un tappo di dielettrina, che attraversava per andare poi a costituire l'asta di sostegno delle due foglioline d'alluminio di un solito elettrometro alla Exner. La corrente d'aria entrando nella scatola dal centro della parete superiore, investiva il piattello e poi usciva per due forellini nella base inferiore.

Le deviazioni delle foglioline venivano lette puntando, con un microscopio fornito di micrometro oculare mobile con vite e tamburo graduato, una punta di una delle foglioline; si misurava lo spostamento orizzontale di essa in un dato tempo.

Era da escludersi che l'aria proveniente dalla soffieria potesse per la sua maggiore umidità peggiorare l'isolamento della dielettrina. Prima di tutto questo isolante, quando è preparato con cura (si ottiene versando polvere di zolfo bene essiccato e caldo in paraffina pura, ad una temperatura di poco superiore al punto di fusione e mescolando sino ad ottenere una pasta che indurisce col raffreddamento e col tempo), può sopportare a lungo un'atmosfera anche molto umida, se la sua superficie è fresca; ma poi la lunga serie di tubi di essiccamento portava l'aria circa allo stesso stato igrometrico, sia che provenisse dalla pera, sia che provenisse dalla soffieria. Ce ne accertammo ponendo dopo l'apparecchio a dispersione un tubo a cloruro di calcio, che veniva pesato dopo che la corrente d'aria era passata per un tempo determinato.

3. Riferiamo ora i risultati delle esperienze.

In primo luogo si cominciò coll'esaminare se la dispersione ottenuta soffiando l'aria con la pera era la medesima come lasciando poi l'aria in quiete. Il fatto constatato con una concordanza molto soddisfacente semplificava d'ora in poi le ricerche, potendosi ammettere che soffiando con la pera per qualche tempo sino a rinnovazione dell'aria, e poi facendo una misura di dispersione, si avesse il medesimo risultato come seguitando sempre a soffiare con la pera durante la misura.

Ciò posto le esperienze hanno dimostrato che *la dispersione dell'aria proveniente dalla soffieria è enormemente cresciuta.*

Riportiamo dalle nostre numerose serie di misure due sole esperienze, scelte a caso. I numeri riportati esprimono il numero delle divisioni micrometriche che misurano lo spostamento della fogliolina durante 30′.

Elettricità positiva.

Si soffia aria con pera per 15′ e poi si misura con aria ferma. 10,4
Si misura con aria proveniente dalla soffieria in azione continua . . . 50
Si soffia con pera per 5′ e poi si misura con aria ferma 13

Elettricità negativa.

Aria pera	come sopra	15
Aria soffieria	»	69
Aria pera	»	20
Aria soffieria	»	66

Il potenziale a cui si operava era di circa 180 volt; in quella posizione un millimetro di spostamento orizzontale della punta della foglia corrispon-

deva ad una variazione di 15 volt; e nelle condizioni delle misure un millimetro di spostamento corrispondeva a 150 divisioni del tamburo micrometrico. Così la dispersione è salita nella prima serie, passando da aria ordinaria ad aria dalla soffieria, da 1,2 a 5 volt per 30′; e nella seconda da 1,75 a 6,75; ossia si ebbe per l'aria proveniente dalla soffieria una dispersione *quattro volte maggiore*.

Il medesimo risultato ottenuto con le due specie di elettricità dimostrano che l'aria era ben diselettrizzata nel passaggio per i tubi ripieni di ovatta. Questi erano necessari per eliminare l'elettrizzazione dovuta al gorgoglìo nell'acqua (Kelvin).

4. Restava ora a ricercare se la proprietà di conduttività acquistata dall'aria era dovuta a semplice ionizzazione prodottasi nel processo del gorgoglìo nella soffieria. Veramente il fatto che l'aria manteneva questa sua proprietà dopo così lungo percorso di tubi e filtri, non era atta a confermarci in questa opinione, perchè l'aria ionizzata per cause, dirò così, esterne e temporanee, conserva per poco tempo le sue proprietà e di più gli ioni vengono facilmente arrestati da stoppaccetti di ovatta.

Il modo di decidere la questione era semplice; fatta una misura con aria proveniente dalla soffieria in azione, interrompere la corrente d'aria e ripetere la misura per la solita mezz'ora cimentando così aria proveniente dalla soffieria, ma non rinnovata durante la misura. Il risultato dell'esperienza fu che alla seconda misura, con aria ferma, la conduttività era la medesima come alla prima, o diminuiva in piccola misura; alcune volte fu notato anche un leggero aumento di conduttività (risultato non insolito in questo campo). La conduttività cresciuta è dunque persistente.

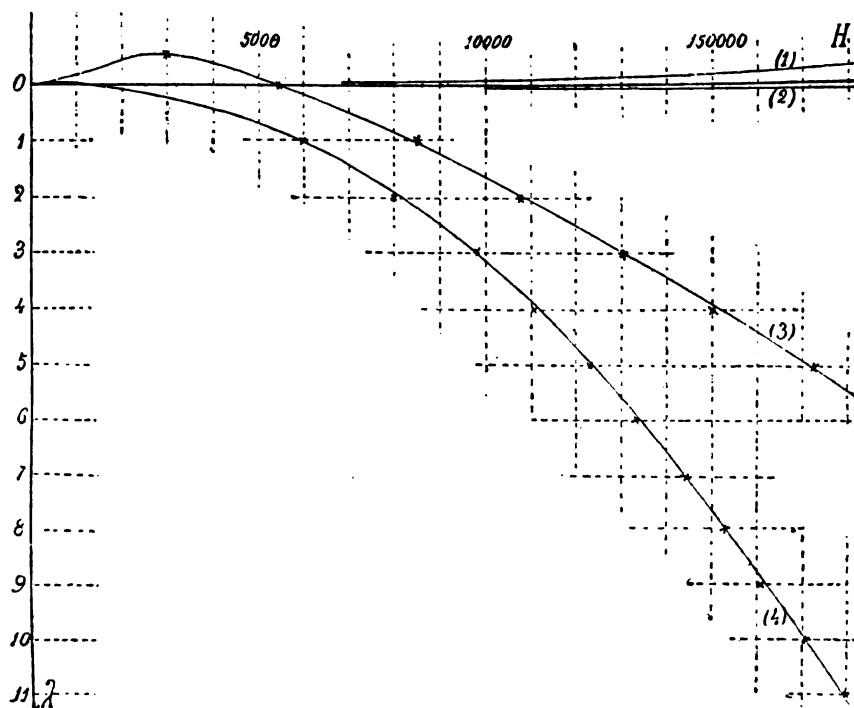
Però dobbiamo aggiungere che portando ora le armature del condensatore cilindrico ad una differenza di potenziale costante, durante il passaggio dell'aria proveniente dalla soffieria, l'aria perdeva qualche poco delle sue proprietà conduttici.

5. L'interpretazione più semplice dei risultati, a cui siamo giunti, sarebbe l'ammettere che l'aria si carichi, nel gorgoglìo entro la soffieria, di un gas, o di una emanazione capace di passare attraverso filtri di ovatta compressa. E parrebbe così che nell'acqua da noi adoperata (Marcia, della condotta della città di Roma) sia contenuta qualche sostanza attiva, essendo conosciuto che l'aria gorgogliata in soluzioni di sali, p. e. di radio, acquista proprietà radioattive. Sarebbe allora molto interessante di provare se l'aria proveniente da una soffieria, in cui l'acqua agente fosse acqua distillata e pura, non cresce in conduttività. L'esperienza non è comoda; e non si può sostituire al trattamento subìto dall'aria nella soffieria un semplice gorgoglìo, quale si produce nelle ordinarie boccie di lavaggio dei gas: un semplice gorgoglio di questa natura non è abbastanza efficace.

Il fatto della diminuzione della conduttività, quando si produca nell'aria una condensazione di vapore acqueo, come abbiamo descritto nella

ricerca citata, non è in disaccordo con questa ipotesi della emanazione; ed il fatto della diminuzione nel passaggio attraverso il condensatore carico, può spiegarsi ammettendo che queste particelle costituenti l'emanazione abbiano una leggera carica propria, proprietà, anche questa, comune ad emanazioni consimili.

Fisica. — *Sulla birifrangenza magnetica e su altri fenomeni che l'accompagnano.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Espongo in questa Nota le principali misure eseguite, studiando la birifrangenza magnetica di campioni di ferro dializzato. Il metodo fu già da me descritto nella Nota precedente, e per maggior chiarezza ricordo che esso

consiste nel far sparire, mediante compressione di una lastra di vetro, interposta insieme con la vaschetta contenente il liquido, tra due nicol incrociati, la luce apparsa per l'azione del campo magnetico di senso arbitrario, quando i due nicol hanno le sezioni principali a 45° sulle linee di forza. Una graduazione precedente permette di conoscere immediatamente il valore, espresso in frazione di lunghezza d'onda (differenza di cammino dei raggi ordinario

e straordinario) della birifrangenza generata dal campo. Essendo il vetro adoperato *negativo per compressione*, una compensazione prodotta da compressione parallela alle linee di forza indica birifrangenza positiva, mentre quella normale indica la negativa. A meno che venga detto esplicitamente il contrario, si intende che le misure riportate si riferiscono alla lunghezza della vaschetta V (v. figura della Nota precedente), e cioè a 7 cm. Variando la intensità del campo sino ad un valore massimo di 18000 u., si sono costruite le curve della birifrangenza, di cui qualcuna è riportata nella annessa figura.

Ferro dializzato poco attivo. — Come ebbi già occasione di dire, campioni recenti di ferro dializzato, o non presentano la birifrangenza magnetica, o ne dànno solo una traccia positiva. Per cui tutte le preparazioni da me eseguite (dens. 1,002) non hanno mai birifrangenza superiore a 0,1 λ pel rosso, in un campo di 18000 u. Il fenomeno è poi quasi sempre inosservabile con 10000 u. Ferro dializzato appartenente al *primo tipo*, ma proveniente dal commercio, dà frequentemente fenomeni alquanto più accentuati. La curva (1) fornisce un esempio di ciò; a 18000 u. la birifrangenza ha un valore positivo di 0,33 λ (colore rosso); essa decresce col campo, e a 5 o 6 mila u. è pressochè inosservabile. Tra i ferri del primo tipo da me studiati, questo è il più attivo. È per tal ragione, e perchè i casi di birifrangenza negativa sono senza confronto più accentuati, che le curve della figura si svolgono principalmente dalla parte negativa. Ciò non pertanto è difficile trovare ferro dializzato del secondo tipo (semplice birifrangenza negativa). Solo due campioni fornirono esempio di esso (ferro Bravais di 1 o 2 anni), e la birifrangenza massima negativa, per la densità 1,002, arriva appena a 0,1 λ. Il fenomeno, rappresentato dalla curva (2) è dunque pochissimo accentuato, e per dippiù questi campioni dopo due giorni dalla diluizione (onde portarli alla densità 1,002) diventano positivi. Sicchè tralascio di occuparmi di fenomeni così deboli, giacchè, come si vede, alla difficoltà di misura, si aggiunge la instabilità del prodotto.

Ferro dializzato molto attivo. — È sempre, almeno per i casi da me studiati, quello del terzo tipo; per campi deboli si ha birifrangenza positiva, che si trasforma in fortemente negativa per campi più intensi. Un ferro Bravais vecchio, diluito a 1,001 perchè molto assorbente, mi ha dato la curva (3). Al crescere del campo cresce in principio la birifrangenza positiva; a 3000 u. essa arriva al massimo (0,6 λ), e successivamente decresce; a 5450 u. si ha il punto di inversione. Per cui, sottoponendo questo ferro all'azione di 5450 u., nel breve tempo che il campo impiega per raggiungere un tal valore, si vede apparire la luce attraverso i nicol incrociati, e successivamente sparire.

Continuando a far crescere il campo, incomincia il periodo negativo. A tal punto il metodo di misura, fondato sull'uso del compensatore a vetro compresso, non è più buono. E infatti già ad 8500 u., la birifrangenza ha un valore di una lunghezza d'onda nel rosso. Sarebbe difficile operare com-

pressioni così forti, da compensare tale birifrangenza; e a queste difficoltà si aggiunge il fatto che, trattandosi di valori considerevoli, si fanno sentire notevoli differenze tra le birifrangenze dei diversi colori. Per cui, abbandonando il compensatore, ho adoperato uno spettroscopio, posto tra l'occhio dell'osservatore ed il nicol analizzatore. Con questo istrumento si poteva constatare, per una data regione dello spettro, quando la birifrangenza valeva un numero intero di lunghezze d'onda, avendosi allora il campo oscuro. È così che a 8500 u., limitando una piccola regione intorno alla linea C, si vede comparire, eccitando il campo, due volte la luce, ottenendo infine oscurità. Il primo sprazzo luminoso corrisponde alla parte positiva della birifrangenza, il secondo al primo tratto della parte negativa; e, avendosi per quella intensità di campo una differenza di cammino di una lunghezza d'onda, si intende perchè si ottenga infine l'oscurità. Facendo crescere ancora il campo, ricomparisce la luce, e ogni volta che il valore della birifrangenza passa per un numero intero di lunghezze d'onda, si ha l'oscurità.

I valori del campo, ricavati dall'esperienza, che corrispondono alle successive sparizioni della luce, sono:

Campo	0	5450	8500	10725	13075	15000	17250
Birifr.	0	0	λ	2λ	3λ	4λ	5λ

La curva (3) è stata costruita servendosi di questi dati.

Tutti i ferri dializzati che ho studiato, all'infuori di quelli del quarto tipo (v. Nota prec.), e di cui non ci vogliamo occupare, offrono, sotto l'azione del campo magnetico, andamenti che si possono rappresentare con curve simili a qualcuna delle tre indicate. Volendo ricondurre tutti questi tipi al medesimo, e cioè con birifrangenza positiva per campi deboli, negativa per campi intensi, si potrebbero fare con ragione le seguenti asserzioni. Ferro dializzato recente dà debole birifrangenza positiva, e forse questa diventerebbe negativa, passando pel punto di inversione, se si disponesse di campi magnetici molto più intensi di quelli che nella pratica si possono raggiungere. Ferro dializzato non molto recente (2 anni) presenta birifrangenza negativa, e non è da escludersi che pei campi deboli possa presentare debolissimo fenomeno positivo, in misura da sfuggire alle più accurate osservazioni. Ferro dializzato molto vecchio (più di 10 anni) presenta punto di inversione, dando in principio notevole birifrangenza positiva e poi negativa. Un fatto interessante è l'invariabilità del punto di inversione; giacchè ho constatato che per lo stesso campione, comunque diluito, l'inversione corrisponde sempre ad una medesima intensità del campo, pur variando i valori della birifrangenza per una stessa intensità del campo.

Il fenomeno dell'inversione rende lo studio delle leggi della birifrangenza magnetica, abbastanza difficile. Non sarebbe così, se si potesse disporre d'un liquido tanto attivo come quello della curva (3), ma senza inver-

sione. Tale liquido non è stato da me rinvenuto, e forse esso non può esistere (almeno fra i ferri dializzati); ma trovai invece del ferro Bravais vecchissimo, il quale offre in principio solo una traccia di birifrangenza positiva, e relativamente, un punto basso di inversione. Diluito alla densità 1,001, esso fornisce la curva (4); e questa si riferisce ai valori della birifrangenza nel colore giallo (linea D). Si intende che il tratto positivo è stato studiato col compensatore a vetro compresso, e il resto collo spettroscopio, osservando le successive sparizioni della luce. La birifrangenza positiva massima si ha a 750 u. (0,02 λ), e il punto di inversione a 1550. Ecco i numeri relativi alle successive osservazioni:

Campo	0	1550	6000	8000	9800	11100	12250
			(5430)	(7670)	(9400)	(10860)	(12140)
Birifr.	0	0	λ	2λ	3λ	4λ	5λ

Campo	13300	14400	15300	16100	17100	18000
	(13290)	(14360)	(15390)	(16280)	(17160)	(18000)
Birifr.	6λ	7λ	8λ	9λ	10λ	11λ

Il fenomeno, indicato graficamente dalla curva (4), soddisfa con qualche approssimazione alla legge $\beta = a\,H^2$, essendo β la birifrangenza espressa in numero di lunghezze d'onda, a una costante, ed H l'intensità del campo. Calcolando il valore di a per $H = 18000$ e $\beta = 11$, si trova il numero $-34 . 10^{-9}$; ed in base a questa grandezza si sono determinati i valori che il campo dovrebbe avere, se la relazione suddetta fosse veramente sodisfatta. La serie così calcolata (quella tra parentesi) è abbastanza prossima all'osservata, e gli scartamenti, piccoli per i valori grandi di H, sono alquanto più grandi pei campi deboli. Ciò è dovuto evidentemente al fatto dell'inversione della birifrangenza; per cui qui posso concludere che: *Se il ferro dializzato appartiene al terzo tipo, e se esso ha il punto di inversione molto basso, i valori della birifrangenza negativa, sono sensibilmente proporzionali al quadrato dell'intensità del campo.* Questa legge vale, ma con minor sicurezza, anche pel ferro dializzato del primo e del secondo tipo; e infatti si è visto che mentre a 18000 u. il fenomeno è osservabile, spesso con un campo metà non lo è più. Ciò è spiegabile ammettendo una proporzionalità con una potenza del campo superiore alla prima.

Il ferro Bravais che ha servito per la costruzione della curva (4), ha anche fornito la verifica di altre leggi semplici, di cui ora dirò. Era ovvio anzitutto che i valori di β dovessero essere *proporzionali allo spessore del liquido, normalmente alle linee di forza.* Ciò fu infatti verificato, costruendo vaschette di lunghezze inferiori ai 7 cm. A parte errori provenienti dalla non assoluta uniformità del campo, in tutta la sua lunghezza, le cifre ottenute, e che per brevità non riporto, confermarono quella veduta.

Procedendo a varie diluizioni dello stesso campione di ferro dializzato, è anche facile constatare che: *la birifrangenza magnetica è direttamente proporzionale alla concentrazione;* o più semplicemente a $\delta - 1$, essendo δ la densità del liquido, riferita all'acqua.

Un'ultima legge era facile prevedere, pensando alle analogie col fenomeno Kerr elettrostatico. Ho già accennato al fatto che per forti valori della birifrangenza, si rendono palesi differenze notevoli del fenomeno per i varî colori. E anzitutto, senza far misure, il ferro Bravais della curva (4) e molti altri (fra cui anche campioni di ferro Erba) permettono immediatamente di verificare, che certamente la birifrangenza magnetica cresce col diminuire della lunghezza d'onda. Si osservi tutto lo spettro di assorbimento del liquido sottoposto all'azione del campo, invece di una semplice zona; la sua parte luminosa va dal rosso sino al verde. Orbene, quando si è ottenuto al crescere del campo l'oscurità in una data regione, non si può dire lo stesso delle altre. Chè anzi osservando il fenomeno dal suo inizio (dopo il punto di inversione), per intensità deboli del campo si comincia ad avere l'oscurità verso la regione più refrangibile, e successivamente si stacca una banda di assorbimento, che avanzandosi verso il rosso, vi si perde. Sicchè si intende come una stessa intensità del campo, mentre ha prodotto l'oscurità p. es. nel verde, non l'ha ancora prodotta nel rosso. Crescendo ancora il campo, una seconda banda si stacca dal verde e, come la prima, si va a perdere nel rosso; indi una terza ecc. Man mano che l'azione magnetica si fa più intensa, le bande di assorbimento si fanno ciascuna più stretta, e tutte più serrate l'una contro l'altra. In sostanza il fenomeno finale è analogo a quello che si osserverebbe, ponendo tra due nicol incrociati una lamina birifrangente, con l'asse convenientemente disposto; le bande di assorbimento corrispondono a quelle regioni dello spettro, per cui si hanno valori interi della birifrangenza.

Osservando ora lo spettro del ferro Bravais che ha fornito la curva (4), sotto l'azione del campo di 17300 u., in esso si notano quattro bande di assorbimento. Dalla scala dello spettroscopio si deducono i valori delle lunghezze d'onda, corrispondenti alle regioni medie di ciascuna banda andando dal rosso verso il verde:

$\lambda =$ micron 0,670 0.630 0,595 0,565

La prima di queste bande, quella che si trova sull'estremo rosso, è l'ottava tra tutte quelle che, per l'azione crescente del campo, sono passate su quel colore. Ciò è facile constatare, facendo crescere gradualmente l'azione magnetica. Per cui è chiaro che, per le superiori lunghezze d'onda, nelle condizioni indicate si hanno come valori di β, rispettivamente i numeri:

$\beta =$ 8 9 10 11

Si facciano i prodotti di ciascuno di questi, per i corrispondenti quadrati di λ, si ha:

$$\beta\lambda^2 = \quad 3,59 \quad 3,57 \quad 3,54 \quad 3,51$$

Questi prodotti sono tra loro abbastanza prossimi, perchè si possa ritenere come verosimile la legge che: *i valori della birifrangenza, per i diversi colori, a parità di altre condizioni, sono in ragione inversa dei quadrati delle lunghezze d'onda.* In complesso il fenomeno della birifrangenza, in un liquido magnetico, si può dunque rappresentare con la formula:

$$\beta = K \frac{l(\delta - 1) H^2 \lambda^2_{Na}}{\lambda^2},$$

dove K è una costante, l la lunghezza della vaschetta, δ la densità del liquido, H l'intensità del campo, λ la lunghezza d'onda del colore che si studia, e λ_{Na} quella della linea D. Con ciò le birifrangenze osservate, vengono sempre riferite a quelle che si osserverebbero pel colore giallo. La superiore relazione, per le ragioni viste, è soltanto approssimata, e lo è tanto più quanto più basso è il punto di inversione. In ogni modo essa non può applicarsi che ai tratti del fenomeno molto al di là di questo punto, qualora esso esista. Così, sostituendo i valori ottenuti dall'esperienza pel caso del ferro Bravais (4) nel campo di 18000 u., si ha $K = 0,0000048$. Tra tutti i campioni studiati, questo è il più attivo, sicchè è quello il valore massimo di K, almeno sinora. Per liquidi poco attivi (ferri dializzati recenti), K è in valore assoluto inferiore ad $^1/_{100}$ della grandezza riportata; e le esperienze da me istituite mi hanno fatto classificare come inattivi, quei liquidi per cui K è in valore assoluto inferiore a 2.10^{-8} circa.

Modificazioni dell'assorbimento luminoso sotto l'azione magnetica. — Si osservi lo spettro della luce proveniente da un arco voltaico, che riesce a traversare la vaschetta, posta tra le espansioni polari dell'elettromagnete. Se il liquido è discretamente concentrato, la sua parte visibile abbraccia principalmente la regione rossa, la gialla e una porzione della verde, e ciò in maniera continua, senza che si scorga nella parte luminosa alcuna banda di assorbimento. I bordi dello spettro, specie quello nel verde, sono spesso abbastanza netti. Se si esperimenta con liquidi così attivi come quelli delle curve (3) e (4) si osservano, eccitando il campo, importanti cambiamenti, sia dell'intensità che dell'estensione di quello spettro, le quali facilmente si riattaccano ai fenomeni di birifrangenza descritti. Altri campioni non danno fatti osservabili. Le esperienze seguenti possono ripetersi disponendo di un liquido simile a quello della curva (3), che presenti cioè in principio notevole bifrangenza positiva, e successivamente negativa.

1. Se il raggio luminoso traversa come nelle esperienze di birifrangenza, il liquido normalmente alle linee di forza, osservando lo spettro, senza l'uso

di alcun nicol, la sua parte luminosa diventa, eccitando il campo, più brillante e più larga. Ciò accade sempre, fuorchè in vicinanza del punto di inversione. Il fenomeno è molto marcato pel campo di 18000 u.

2. Si osservi la luce emessa dalla vaschetta attraverso un nicol, la cui sezione principale sia *parallela* alle linee di forza. Eccitando il campo sino a 3000 u. (birifrangenza positiva massima), essa diminuisce alquanto, e adoprando lo spettroscopio si vede restringere la parte luminosa dello spettro. Questo fenomeno non è molto marcato, giacchè corrisponde al valore $\beta = 0{,}6\lambda$, ma con molta accuratezza si riesce a constatarlo. Per campi maggiori di quello corrispondente al punto di inversione (birifrangenza negativa), e meglio pel campo massimo (18000 u.), la parte luminosa dello spettro si schiarisce in misura marcatissima, e si allarga.

3. Si proceda come in 2, ma ponendo la sezione principale del nicol normalmente alle linee di forza. Per 3000 u. si osserva aumento di luce, ed allargamento della parte luminosa dello spettro. Pel campo di 18000 u. si constata il contrario: diminuzione di luce, e restringimento. Anche qui la prime parte del fenomeno è poco visibile, la seconda è nettissima.

4. Le esperienze 1, 2, 3 lasciano prevedere che anche parallelamente alle linee di forza, si debbano osservare cambiamenti dei valori dell'assorbimento. Si sostituiscano alle espansioni lineari dell'elettromagnete, delle altre coniche forate. La vaschetta è anch'essa cambiata in altra quadrata di 1 cm. di lato, le cui quattro facce verticali di vetro sieno egualmente buone. Con essa si possono dunque fare osservazioni sia normalmente, che parallelamente al campo. Essendo più corto lo spessore del liquido, questo (è sempre quello della curva 3) è adoperato con concentrazione 7 volte maggiore. Studiando con tal disposizione l'assorbimento parallelamente al campo, e senza uso di nicol, inutile per ragioni di simmetria, si osservano fenomeni più semplici di quelli in direzione normale. Per birifrangenza positiva (3000 u.) si ha aumento dell'intensità luminosa, ed allargamento dello spettro visibile; per birifrangenza negativa (18000 u.) accade il contrario. In entrambi questi casi la luce che esce dal liquido, sottoposto all'azione del campo, è *luce comune*.

Incidentalmente osservo che, con questa disposizione alla quale si aggiungono due nicol, e adoperando luce leggermente convergente, è facilissimo osservare, eccitando il campo, la croce caratteristica dei cristalli ad un asse ottico.

Dall'esperienza 3 si deduce che i bordi dello spettro luminoso, della luce traversante un liquido con birifrangenza positiva, sotto l'azione del campo, e normalmente a questo, *sono nettamente polarizzati nel piano delle linee di forza;* infatti quello spettro si allarga, e l'allargamento, se osservato con un nicol, persiste solo se la sezione principale di questo è normale al campo. Per birifrangenza negativa, l'esp. 2 ci dice che i bordi predetti

sono invece polarizzati nel piano *normale* alle linee di forza. Dal confronto delle esperienze 4 con 2 e 3 si deduce infine che: *per birifrangenze positive l'assorbimento osservato parallelamente alle linee di forza, è minore di quello subìto da un raggio il cui piano di polarizzazione sia normale alle linee di forza. Per birifrangenze negative esso è maggiore.* A questa conclusione va aggiunta l'altra, dedotta da misure quantitative, di cui ora dirò.

In sostanza si vede che il comportamento di questi liquidi attivi, in un campo magnetico, è del tutto simile a quello di cristalli ad un asse, dotati di dicroismo. Le variazioni dell'assorbimento che si osservano in questi nelle diverse direzioni, corrispondono perfettamente a quelle ora studiate; e per dippiù è da osservarsi, che le attuali esperienze dicono che tanto nel caso di birifrangenza positiva che di negativa, *nella propagazione normale, l'onda più lenta è sempre la più assorbita.*

Se il liquido presenta forte birifrangenza, e propriamente se esso è simile a quello della curva (4), sotto l'azione di 18000 u. si possono eseguire misure abbastanza precise degli accennati fenomeni di assorbimento. Per cui esse non sono possibili che nei soli casi di forte birifrangenza negativa. Alla disposizione dell'esp. 4, si aggiunge un fotometro Lummer che serve a misurare l'intensità complessiva della luce traversante il liquido normalmente o parallelamente al campo; lo spettroscopio è dunque eliminato. La sorgente di luce campione è costituita da una fiamma costante, velata da un vetro rosso, onde eguagliare possibilmente le tinte delle due luci. Il liquido adoprato presenta, secondo precedenti osservazioni, una birifrangenza $\beta = 12\lambda$, col campo 18000. Detta 1 l'intensità luminosa senza il campo, facendo intervenire l'azione magnetica si ha:

normalmente al campo,	senza nicol	intens.	1,62
» »	con nicol con sez. princ. ∥ al campo .	»	2,74
» »	» » ⊥ » .	»	0,54
parallelamente »	senza nicol	»	0,56

Sicchè: *l'assorbimento subìto da vibrazioni propagantisi parallelamente alle linee di forza, è lo stesso di quello che subiscono vibrazioni propagantisi normalmente, il cui piano di polarizzazione sia parallelo al campo.* Ciò fu constatato per birifrangenze negative, ma secondo ogni probabilità vale anche per birifrangenze positive, benchè in questo caso non si abbiano osservazioni *quantitative* del fenomeno.

Le precedenti misure fotometriche, confermano molto bene il fatto che i fenomeni presentati da cristalli assorbenti, vengono descritti nel modo più semplice, supponendo ne sia caratteristico il solo vettore normale al piano di polarizzazione [1].

[1] Drude, Lehrbuch der Optik, 1900, pag. 233.

Molte delle esperienze e delle misure eseguite, che sono state riportate in questa Nota, furono già da me comunicate al prof. Voigt. Il quale, interessandosene, ha voluto iniziare lo svolgimento di una trattazione teorica, che è riportata in altra parte di questo Rendiconto.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell'estate del 1901.* Nota II di Ciro Chistoni, presentata dal Socio Blaserna.

II. *Risultati delle misure.* — Ai risultati delle misure pireliometriche fatte al Cimone nel 1901, credo conveniente fare precedere i risultati dei confronti fatti a Sestola fra l'attinometro Violle (che poi si usò al Cimone) ed il pireliometro di Ångström [1]. Come avvertii, per il termometro Ducretet 566 è $c = 1{,}111$ e l'apertura del foro di entrata dei raggi avendo per diametro cent. 1,489, si ha $\log s = 0{,}24088$; $\log \frac{c}{s} = \bar{1}{,}80483$.

Le misure si condussero così da avere sempre $t' = t_2$ e $t'' = t_1$. I valori della colonna intestata Q sono i risultati ottenuti col pireliometro Ångström, e quelli della colonna q sono i risultati ottenuti contemporaneamente coll'attinometro Violle, usato nelle condizioni suindicate.

Tavola A.

Giorno	Ora	t	t_1	t_2	θ_1	θ_2	τ	q	Q	$\frac{Q}{q}$
15 luglio	$10^h 0^m$	24,40	25,98	28,40	1,58	4,00	3,7	1,235	1,319	1,068
"	10,22	23,60	25,62	28,39	2,02	4,79	5,0	1,268	1,453	1,146
"	12,21	25,30	27,39	30,39	2,09	5,09	5,0	1,374	1,581	1,151
17 luglio	9,22	22,45	24,15	26,70	1,70	4,25	4,5	1,213	1,332	1,098
"	10,22	23,80	25,40	28,15	1,60	4,35	4,8	1,285	1,416	1,102
"	11,22	24,40	26,15	28,80	1,75	4,40	4,4	1,269	1,426	1,124
"	12,22	24,80	26,45	29,40	1,65	4,60	4,0	1,472	1,645	1,117
"	14,30	24,35	26,15	28,75	1,80	4,40	4,8	1,208	1,350	1,117
"	15,22	25,50	27,15	29,65	1,65	4,15	5,3	1,127	1,211	1,074
18 luglio	9,22	23,30	25,05	27,45	1,75	4,15	4,4	1,144	1,322	1,156
"	11,22	24,65	26,40	29,00	1,75	4,35	3,9	1,299	1,497	1,152
"	15,22	26,05	27,80	30,10	1,75	4,05	3,5	1,191	1,256	1,055

Media di $\frac{Q}{q} = 1{,}1133$

[1] Veggasi: C. Chistoni, *Misure pireliometriche fatte a Sestola nell'estate del 1901.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XI della serie 5ª, gennaio 1902, pag. 77 e segg.).

Nella seguente tavola stanno riuniti i risultati delle misure pireliometriche fatte al Cimone (lat. bor. 44°, 12′; long. E da Gr. 10°, 42′; 2165 metri sul mare). L'ora è espressa in tempo medio dell'Europa centrale; *h* indica (con due decimi di grado di approssimazione) l'altezza del Sole al momento dell'osservazione; B esprime la pressione atmosferica in millimetri di mercurio a 0°; *t* la temperatura dell'aria; *f* la forza elastica del vapore acqueo ed *u* l'umidità relativa nell'atmosfera.

La colonna intestata *q* contiene i risultati ottenuti direttamente coll'attino metro Violle, e quella intestata Q i risultati ridotti al pireliometro di Ångström.

Lo stato del cielo in prossimità del disco solare, si osservò mediante adatti vetri colorati.

Cimone 1901. TAVOLA B.

Giorno	Ora	*h*	*q*	Q	B	*t*	*f*	*u*	Note
24 luglio	h m 8,22	° 35,1	1,303	1,451	584,9	6.2	5,2	70	Nebbia e Cu all'orizzonte
"	9,22	45,6	1,454	1,619	585,1	7,5	5,9	75	Nubi sempre più alte
25 luglio	9,22	45,5	1,427	1,589	587,5	10,0	5,9	62	Aureola intorno al ⊙
7 agosto	9,22	43,2	1,318	1,467	586,3	10,1	7,9	84	Veli vaganti; aureola intorno ⊙
9 agosto	8,22	32,5	1,280	1,425	592,5	7,6	5,8	72	Limpido
"	9,22	42,8	1,330	1,481	592,6	9,3	5,7	64	Id.
"	10,22	52,1	1,414	1,574	592,8	10,3	6,4	66	Veli vaganti
"	12,22	61,8	1,421	1,582	593,1	11,1	6,2	61	Qualche Cu
"	13,22	59,1	1,397	1,555	592,7	11,9	6,5	61	Cu
"	14,22	52,1	1,516	1,688	592,3	12,5	6,8	61	Cu e veli sparsi
"	15,22	42,8	1,509	1,680	591,8	13,1	7,1	61	Id.
10 agosto	8,21	32,3	1,261	1,404	592,1	10,7	6,2	63	Cu e nebbia all'orizzonte
"	9,21	42,6	1,271	1,415	592.0	11,2	6,4	62	Cu e veli
"	10,21	51,8	1,468	1,634	592,0	11,6	6,5	62	Id.
"	15,21	42,6	1,427	1,589	591,9	13,6	8,5	72	Cu sparsi
"	17, 0	25,4	1,328	1,479	591,8	11,5	7,7	74	Id.
11 agosto	9,21	42,4	1,426	1,588	591,8	10,9	6,5	66	Nebbia all'orizzonte veli vaganti
12 agosto	8,21	31,9	1,089	1,212	588,9	11,7	5,8	55	Cu vaganti
"	9,21	42,2	1,325	1,475	589,0	12,0	6,0	56	Cu e veli sparsi
"	12,21	60,9	1,360	1,514	589,3	13,6	7,0	58	Id.
13 agosto	8,21	31,7	1,534	1,708	588,0	12,3	5,6	51	Cu e veli all'orizzonte; ⊙ chiaro
17 agosto	11,20	56,8	1,394	1,552	590,3	6,7	5,1	68	Cu all'orizzonte
"	12,20	59,4	1,479	1,647	590,0	7,0	6,1	70	Cu sparsi
"	15,20	41,0	1,494	1,663	590,8	7,1	5,7	74	Id.
18 agosto	9,20	40,8	1,434	1,597	591,7	7,7	7,3	90	Id.

Cimone 1901. TAVOLA B.

Giorno	Ora	*h*	*q*	Q	B	*t*	*f*	*w*	Note
	h m	°							
20 agosto	7,20	19,5	1,136	1,265	592,5	10,1	6,8	72	Limpido
»	8,20	30,1	1,429	1,591	592,7	10,9	4,2	43	⊙ bianchiccio
»	9,20	40,3	1,631	1.816	592,9	11,0	3,8	38	⊙ chiaro
»	10,20	49,3	1,509	1,680	593,1	12,7	5,5	48	Id.
»	11,20	55,8	1,401	1,560	593,0	11,3	8,4	83	Veli e Cu sparsi
21 agosto	8,19	29,9	1,318	1,467	593,0	11,3	6,9	68	⊙ chiaro
»	9,19	40,1	1,403	1,562	593,0	11,5	6,4	62	Cu sparsi ⊙ chiaro
»	10,19	49,0	1,372	1,527	593,0	11,7	7,4	71	Id.
»	11,19	55,6	1,322	1,472	593,0	12,0	8,5	80	Id.
23 agosto	8,19	29,4	1,345	1,497	593,5	9,2	8,9	77	Nebbia all'orizzonte
24 agosto	8,19	29,2	1,105	1,230	592,3	11,0	7,4	74	Nebbioso
»	9,19	39,3	1,130	1.258	592,8	10,5	7,9	82	Id. ⊙ bianchiccio
»	10,19	48,2	1,165	1,297	593,1	11,0	7,4	74	Veli sparsi
25 agosto	8,18	28,9	1,320	1,470	591,0	11,9	7,8	74	Nebbia all'orizzonte; veli sparsi
»	9,18	39,0	1,109	1,235	591,0	12,0	8,0	74	Cu all'orizzonte; veli vicini al ⊙
»	10,18	47,9	1,310	1,458	591,1	12,3	8,1	75	Id.
28 agosto	8,17	28,2	1,313	1,462	587,8	7,0	3,5	45	Veli sparsi; ⊙ bianchiccio
»	9,17	38,2	1,165	1,297	588,0	7,1	4,5	57	Cu da nord-ovest a sud-est.
»	10,17	47,0	1,342	1,494	588,1	7,2	4,4	55	Veli sparsi
29 agosto	9,17	38,0	1,427	1,589	587,8	5,1	4,3	63	⊙ chiaro; nebbia all'orizzonte
»	10,17	46,7	0,603	0,671	588,2	5,7	5,2	74	Veli sparsi e densi anche intorno ⊙
30 agosto	8,17	27,7	1,313	1,462	591,2	7,1	4,3	41	⊙ limpido
»	9,17	37,7	1,644	1,830	591,6	7,3	4,5	45	Id.
»	10,17	46,4	1,239	1,379	591,8	7,8	4,8	59	Cu e veli; ⊙ bianchiccio
»	11,17	52,2	1,572	1,750	592,0	8,3	5,8	70	Cu; ⊙ chiaro assai
31 agosto	8,17	27,5	1,105	1,230	591,0	9,7	7,2	79	Aureola intorno al ⊙
»	9,17	37,5	1,193	1,328	592,1	9,7	5,7	62	Veli sparsi
»	10,17	46,3	1,376	1,532	592,6	10,1	5,5	58	Id.
»	11,17	52,3	1,503	1,673	592,6	10,0	7,8	71	Cu e veli sparsi
»	12,17	54,6	1,491	1,660	592,7	10,0	7,3	78	Id.

Mineralogia. — *La Prehnite ed altre zeoliti nelle granuliti di Cala Francese* (1) (Isola della Maddalena — Sardegna). Nota del dott. C. RIMATORI, presentata dal Socio STRUEVER.

In una mia Nota precedente sulle Cabasiti di Sardegna (2) feci notare la grande analogia che passa fra le granuliti dell'isola della Maddalena e quelle di Striegau nella Slesia, analogia che riguarda non solo l'aspetto della roccia, la disposizione e relativa quantità de' componenti principali, ma si estende anche ad alcuni minerali accessori. Allo scopo di confermare vieppiù la somiglianza fra queste due formazioni granitoidi, ho continuato ad esaminare i numerosi campioni, che in più escursioni il prof. Lovisato ha raccolto specialmente alle Cave di Cala Francese all'isola della Maddalena, nella speranza di trovare in essi la fluorina come si riscontra nella granulite di Striegau.

Tutte le ricerche che ho fatto a tale riguardo sono riuscite infruttuose, ma, sebbene non possa presentare alcun nuovo fatto che renda più evidente l'analogia suddetta, le ulteriori osservazioni non furono inutili, poichè mi permettono di ritornare ancora sulla granulite della Maddalena e portare nuovo contributo alla conoscenza de' minerali accessorî che l'accompagnano. Ed invero, oltre a quelli citati nella mia Nota e nel lavoro pubblicato dal dott. Riva (3), questa granulite presenta, sebbene raramente, due varietà di Prehnite, di cui l'una verdognola e l'altra, assai più scarsa, quasi bianca.

La Prehnite verdognola, a differenza di molti altri minerali accessorî, non si presenta nelle fenditure o cavità, ma è in massa intercalata fra gli elementi feldspatici, il quarzo e l'epidoto. Dai primi nettamente si differenzia, non così avviene a contatto dell'epidoto, nel qual caso appare quasi come una graduale trasformazione di questo.

È una massa cristallina con individui indistinti, che presentano però evidenti le faccie di sfaldatura distinte parallelamente alla base ed altre meno nette secondo le faccie del prisma. La frattura è ineguale, subtrasparente, di durezza considerevole e polvere bianca. Dà acqua nel tubo chiuso, però in piccola quantità; dall'acido cloridrico, anche dopo prolungata ebollizione, appare intaccata soltanto parzialmente con separazione di silice gelatinosa. Non essendo perciò sicuro di poterla decomporre completamente per

(1) Lavoro eseguito nel Museo di Mineralogia e Geologia della R. Università di Cagliari.

(2) Rend. Acc. Lincei, agosto 1900.

(3) *I Feldspati del granito di Cala Francese ed alcuni minerali che li accompagnano*. R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano 1901.

la sola azione di quell'acido anche molto prolungata, ho preferito effettuare la determinazione delle basi intaccando la sostanza con acido fluoridrico e solforico, e quella della silice mediante la fusione con i carbonati alcalini.

I risultati dell'analisi sono i seguenti:

Densità a 25°,8 = 2,908	Durezza = 6,5
SiO^2	42,59
Al^2O^3	22,76
Fe^2O^3	3,02
CaO	27,02
MgO	tracce
Na^2O	1,06
H^2O	2,66
	99,11

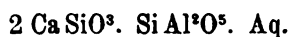
Confrontando fra loro i rapporti tra le percentuali trovate ed i pesi molecolari de' costituenti, e facendo astrazione delle piccole frazioni (circa 1 decimo), si deduce la formola che segue:

$$3\,SiO^2.\ Al^2O^3.\ 2\,(CaO.\,{}^1/_{10}\,FeO).\ {}^2/_3 H^2O$$

nella quale le quantità dell'ossigeno per RO, R^2O^3, SiO^2, H^2O stanno fra loro come:

$$2 : 3 : 6 : {}^2/_3$$

rapporti, i quali, ad eccezione di quello per l'acqua, che è minore, sono eguali a quelli citati dal Dana [1] per la composizione della *Prehnite* tipica e corrispondono inoltre alla formola:

$$2\,CaSiO^3.\ Si\,Al^2O^5.\ Aq.$$

secondo il Bombicci [2].

Non rimane perciò alcun dubbio sulla natura della specie mineralogica esaminata, poichè sia l'aspetto esterno, come la durezza, la densità, la natura e proporzione de' componenti concordemente conducono alla conclusione medesima..

L'altra varietà di Prehnite fu riscontrata finora in un solo nido; fatta astrazione del colore, che è quasi bianco, per il suo aspetto e le sue proprietà non devo che ripetere quanto ho detto per l'altra.

(1) *A System of Mineralogy* 1893, pag. 531.
(2) *Corso di mineralogia*, vol. II, parte 2ª, pag. 814.

Densità a 26°,2 = 2,924 Durezza 6,5.

Composizione centesimale	
SiO^2	43,01
Al^2O^3	28,77
CaO	25,26
MgO	0,88
Alcali	tracce
H^2O	2,08
	100,00

Per insufficienza di sostanza la silice fu dedotta per differenza. Questi dati sono molto vicini a quelli risultanti dall'analisi precedente, epperciò ancor essi corrispondono alla composizione tipica della *Prehnite*.

Questa specie mineralogica, che da alcuni viene considerata come una zeolite, mi richiama alla mente le altre zeoliti che compariscono nella granulite di Cala Francese. Esse, che, ad eccezione della Cabasite, furono da me solamente accennate, secondo lo studio posteriore del Riva [1] devonsi ritenere per *Stilbite* e *Laumontite*. Quest'autore fonda tali determinazioni sulle proprietà ottiche e, per l'ultima zeolite, anche su un semplice saggio qualitativo.

Ho creduto perciò opportuno sottoporre all'analisi quantitativa tutte le zeoliti che ho potuto riscontrare in quelle granuliti, per vedere se i risultati confermassero l'esistenza delle specie suddette, oppure ne dimostrassero ancora delle nuove.

Alcune fratture della roccia sono coperte da un'incrostazione talvolta spessa alcuni millimetri, costituite da un impasto di minuti cristalli tabulari poco distinti, che talvolta s'intarsiano, di color giallo-chiaro a splendore perlaceo tendente al resinoso. La sua separazione dagli altri elementi della roccia ha presentato difficoltà non lievi, ma, sebbene non possa asserire di avere operato su un materiale del grado di purezza richiesto per un'analisi esatta ed i valori trovati possano deviare da' veri più che ne' casi ordinarî, pure credo di poterli presentare perchè le cause d'errore non sono state tali da mascherare la vera composizione e da condurre ad una formula incerta.

Densità a 23°,6 = 2,27 [2].

Composizione centesimale	
SiO^2	56,40
$Al^2O^3 + Fe^2O^3$	15,97
CaO	5,87
Na^2O	2,28
H^2O	17,76
	98,28

(1) Loc. cit.

(2) La durezza di questa zeolite come delle seguenti, non si è potuta determinare perchè la sostanza non si presta a tale determinazione.

Da questi valori risulta la seguente formola:

$$6\,SiO^2 . Al^2O^3 . C^2/_3\,CaO . {}^1/_4\,Na^2O) . 6,3\,H_2O$$

in cui i rapporti fra le quantità dell'ossigeno dell'acido, delle basi e dell'acqua sono:

$$\frac{11}{12} : 3 : 12 : 6,3$$

molto vicini a questi:

$$1 : 3 : 12 : 6$$

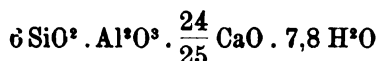
citati dal Dana [1] per la composizione tipica della *Stilbite*.

Nel lavoro del Riva viene citata la Stilbite come un aggregato fibroso-raggiato di color giallo pallido, cioè con un aspetto assai diverso da quello ora descritto. Probabilmente la Stilbite da lui esaminata è un'altra varietà più rara della precedente e che possiede i caratteri descritti dal Riva. Di questa ho potuto separare una quantità assai limitata, circa 9 centigrammi; ciò nondimeno, essendo pura, ne ho potuto determinare la composizione seguente:

Densità a 24°,2 = 2,27.

SiO^2	54,16
$Al^2O^3 + Fe^2O^3$	15,17
CaO	8,04
Alcali	2,87
H^2O e perdite	19,76
	100,00

Dati che conducono alla formola:

$$6\,SiO^2 . Al^2O^3 . \frac{24}{25}\,CaO . 7,8\,H^2O$$

in cui i rapporti dell'ossigeno per RO, R^2O^3, SiO^2, H^2O sono.

$$\frac{24}{25} : 3 : 12 : 7,8$$

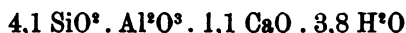
rapporti molto vicini ai precedenti specialmente per l'acido e le basi e tanto gli uni come gli altri non deviano di molto da quelli tipici per la *Stilbite*. Se si tien conto poi che, operando su piccola quantità di sostanza, come in quest'ultimo caso, oppure su sostanza non perfettamente pura, come nell'altro, gli errori sperimentali possono avere un'influenza più o meno sensibile, possiamo benissimo giustificare le deviazioni dalla formola teorica, ed eliminare ogni dubbio intorno alla natura di queste due varietà di *Stilbite*.

(1) Loc. cit., pag. 587.

Nel campione contenente la Prehnite verdognola ho riscontrato un piccolo nido d'un'altra zeolite finamente fibrosa, facilmente friabile, bianca ed a splendore sericeo, la quale ricorda per questi caratteri la Laumontite citata dal Riva. Questa zeolite, a differenza dell'altra mescolata all'epidoto, trovasi a ridosso della Perthite ed appare come un prodotto di alterazione di questa. Ciò risulta ancora più evidente in un campione ove il feldspato roseo trovasi in uno stato di avanzata trasformazione e nel quale, in alcuni punti, si osserva la zeolite fibrosa aderente alla Perthite in modo però che fra le due sostanze non v'è netta distinzione, ma come un graduale passaggio, nel quale il feldspato accenna ad una struttura finamente fibrosa. Questa zeolite è ancor più rara delle altre, ma, sebbene anche in questo caso la sostanza sia stata in piccola quantità, per la sua purezza, non ho trovato difficoltà nell'esecuzione dell'analisi che ha dato questi valori:

SiO^2	52,42
Al^2O^3	21,44
CaO	13,23
H^2O	14,42
	101,51

Ai quali corrisponde la formola:

$$4{,}1\ SiO^2 . Al^2O^3 . 1{,}1\ CaO . 3{,}8\ H^2O$$

con i seguenti rapporti per l'ossigeno:

$$1{,}1 : 3 : 8{,}2 : 3{,}8$$

molto vicini a questi:

$$1 : 3 : 8 : 4$$

che spettano alla *Laumontite* tipica. Così per altra via, posso confermare le determinazioni del Riva, sicuro anche, per i caratteri citati, che le sostanze da lui esaminate siano identiche a quelle che sono passate per le mie mani.

A queste zeoliti posso aggiungere un'altra specie, nuova finora per la Sardegna. Essa è di color giallo-chiaro a cristalli aciculari raggiati, che somiglia a prima vista alla Stilbite; all'analisi però è risultata diversa. Trovasi in piccoli nidi intercalati fra il quarzo ed il feldspato; talvolta è impastata con l'epidoto dal quale con difficoltà si può nettamente separare. Scegliendo le parti di color giallo chiaro omogeneo, ho potuto ricavarne circa due decigrammi contenenti però sostanze estranee in quantità non trascurabile; perciò oltre le difficoltà inerenti all'esiguo peso di sostanza disponibile, ho dovuto tener conto ancora delle impurezze. Fondandomi sul fatto che queste non vengono intaccate dall'acido cloridrico e che rimangono indietro con la silice, ho sottoposto questa a triplice trattamento a caldo con soluzione sa-

tura di carbonato sodico in modo che tutta la silice passasse in soluzione; ho potuto allora determinare la quantità del residuo e riferire quindi il peso dell'acido, delle basi e dell'acqua a quello della sostanza impiegata, meno le impurità trovate.

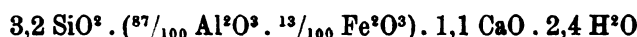
Dopo questi opportuni schiarimenti, espongo i risultati ottenuti:

Densità a $18°,5 = 2,52$.

Composizione centesimale.

SiO^2	47,83
Al^2O^3	22,16
Fe^2O^3	5,22
CaO	15,92
Alcali	tracce
H^2O	10,70
	101,83

Da' quali si deduce la formola:

$$3,2\ SiO^2 . (^{87}/_{100}\ Al^2O^3 . ^{13}/_{100}\ Fe^2O^3) . 1,1\ CaO . 2,4\ H^2O$$

con questi rapporti per le quantità dell'ossigeno:

$$1,1 : 3 : 6,4 : 2,4$$

i quali si accostano a quelli della *Scolecite*

$$1 : 3 : 6 : 3$$

più che ai rapporti riferentisi alle altre zeoliti calciche.

Riassumendo, dirò che questo studio ulteriore delle granuliti di Cala Francese mi ha condotto a confermare la presenza della Stilbite e Laumontite, date dal Riva, a constatare una seconda varietà di Stilbite, due varietà di Prehnite ed infine a segnalare una specie mineralogica, nuova per l'isola, la Scolecite.

Quindi nella roccia suddetta sinora sono state riscontrate cinque specie minerali appartenenti al gruppo delle zeoliti, comprendendo fra queste anche la Prehnite.

Anche questa volta sento il dovere di esprimere la mia gratitudine verso il prof. Lovisato che mi fornì il materiale necessario e che mi fu prodigo di consigli durante queste ricerche.

Mineralogia. — *Appunti sopra alcuni minerali di Casal di Pari.* (Comune *Campagnatico*, provincia *Grosseto*). Nota di G. de Angelis d'Ossat, presentata dal Socio G. Strüwer.

Nella provincia di Grosseto, nel comune di Campagnatico e presso la frazione di Casal di Pari e più precisamente fra questa e Pari, già da tempi remoti [1], era conosciuto un giacimento minerario. In questo ora sono attivate tre ricerche di minerali, cioè: antimonio, piombo e mercurio. Le tre località non sono molto lontane fra di loro ed appartengono a tre concessioni limitrofe. Dirò partitamente di ciascuna ricerca dopo aver abbozzato rapidamente la geologia della regione circostante.

I terreni geologici che affiorano presso Casal di Pari sono poco svariati e pochissimo conosciuti. Tuttavia, tenendo conto dei tipici caratteri litologici comuni alle altre rocce coeve della Toscana, non è difficile orientarsi nella geologia della regione. La maggior parte delle rocce, per la scarsezza o mancanza assoluta di fossili, non hanno un riferimento accertato; quindi anche io riporterò i valori cronologici con molte riserve.

Le rocce più antiche sono le permo-carbonifere; esse risultano di quegli stessi scisti ed anageniti (*Verrucano*), che affiorano largamente per tutto l'altipiano bagnato dall'Ombrone e dalla Merse. È l'identico tipo litologico che s'incontra nella Montagnola senese ed in molte altre località della Toscana.

Sopra le rocce del permo-carbonifero, con discordanza, si adagiano generalmente i calcari cavernosi, più o meno dolomitici, che i geologi toscani riportano al retico. Presso però la ricerca di galena, a s. Antonio, trovasi un calcare oscuro, con molte vene spatiche, ricco di residui di crinoidi. I fossili raccolti dal Novarese [2] e determinati dal di Stefano sono:

Encrinus liliiformis Bronn,
» cfr. *silesiacus* Beyr.,
Cidaris transversa Mayer.

Gasteropodi pochi, riconoscibile solo una specie di *Natica*,

Le due forme sicuramente determinate permettono di riferire al triasico medio (*Muschelkalk*) il calcare in parola: quindi esso si troverebbe sotto al calcare retico e fisserebbe la trasgressione sopra al verrucano al tempo del triasico medio.

(1) In un pozzo scavato anticamente fu rinvenuta una medaglia del 900.
(2) Novarese V., Boll. Soc. geol. ital., vol. XIII (1894), pagg. 15-17.

Anche io potei facilmente raccogliere parecchio materiale paleontologico, essendo i fossili isolati dalla erosione; ma ben poco avrei ora da aggiungere a ciò che è noto.

Sopra le rocce del retico, con chiara discordanza, poggiano quelle dell'eocene, anzi della parte più elevata di questo sistema. Sono calcari del più tipico alberese, intercalati con i soliti scisti.

Poco o punto importanti sono le rocce dei tempi più recenti.

La mineralizzazione è circoscritta specialmente nelle rocce del permo-carbonifero e del triasico.

Il giacimento più anticamente conosciuto è quello denominato *Selva* (antimonio), posto a 2 Km. a nord dell'abitato di Casal di Pari.

Il secondo è quello di s. Antonio e Val d'Aspra (galena), che si trova a 3 Km. dal caseggiato di Casal di Pari, misurati in direzione di Poggio Ornate.

Il terzo poi, chiamato la Miniera di Casale (cinabro), è situato a 2 Km. dallo stesso paese, in direzione nord-ovest e proprio all'incontro dei fossi della Riluccia e del Canneto.

SELVA.

Le notizie storiche della miniera della Selva (*Rel. Camera Commercio Siena*) rimontano ad epoca antica. Le prime informazioni scientifiche le apprendiamo dalla *Relazione del servizio minerario del 1880* e dal Lattes (1). Questi elogia la Ditta Scaniglia Carlo e C. di Siena per essere stata nel 1876 la promotrice della ripresa della lavorazione dell'antimonio.

Il minerale che si estrasse dopo il 1889 alla Selva non venne più spedito a Marsiglia ed a Newcastle, ma fu trattato in apposita fonderia impiantata dalla Ditta stessa presso Siena. Belli campioni del minerale figuravano all'esposizione industriale italiana 1881 in Milano. Molti dati tecnici si rilevano dalle relazioni del servizio minerario degli anni seguenti.

Ben presto però la lavorazione cessò a causa della scarsezza dei nuclei di minerale. Ora sono stati ripresi i lavori specialmente per riconoscere il giacimento verso il contatto fra gli scisti permo-carboniferi ed il retico, ritenendosi questo contatto come più ricco di minerale. Similmente si praticarono altri lavori a discreta distanza dall'abbattimento a giorno per riconoscere la vastità del giacimento.

Il minerale di antimonio si trova entro una roccia profondamente alterata presso al contatto delle rocce triasiche ed eoceniche e non lontano dalle rocce del permo-carbonifero.

La roccia alterata però pare che appartenga al triasico. Entro la terra giallastra o rossastra si rinvengono, insieme a frammenti di calcare retico

(1) Lattes O., *Le miniere*. Esposiz. ind. ital. 1881 Milano. Milano 1884.

e di scisti del paleozoico, noduli di minerale, impaniati od in una massa silicea od in un' argilla che proviene dall' alterazione degli scisti nominati. I noduli raggiungono talvolta notevoli dimensioni; il minerale è spesso alterato e trasformato in altri prodotti.

La stessa erosione meteorica mette a giorno parecchi blocchi di minerale, anzi in tempi passati gli indigeni si servirono di questi nella costruzione di un piccolo fabbricato, che poi naturalmente venne abbattuto.

Nella mia fugace escursione potei raccogliere alcuni minerali in questo e negli altri giacimenti. La cortesia poi del signor Ernesto Scaniglia mi rese possessore di altro materiale, di che vivamentre ringrazio l' egregio direttore.

Ora riferisco intorno ai minerali della Selva.

1. *Stibina*. — È il minerale industrialmente importante. Si trova in nuclei, talvolta notevoli, impaniati o in una massa quarzosa o nell'argilla o fra un materiale terroso diversamente colorato. Il minerale è spesso profondamente alterato e si presenta in varî aspetti:

a) in aggruppamenti di cristalli disposti a struttura fibroso-raggiata. Le dimensioni degli elementi variano di molto, dai più piccoli si arriva a quelli che misurano una lunghezza, sull' asse della z, di cm. 12 ed una larghezza di mm. 8. Spesso i cristalli sono ricoperti di una patina giallastra o rossastra. La sfaldatura è evidentissima ed i piani che si ottengono mostrano una lucentezza metallica vivissima.

b) in cristalli aciculari disseminati nella massa terrosa ed argillosa. Essi sono ben formati, con facce nitide e talvolta riuniti. Si potrebbero ripetere sopra di essi le stesse osservazioni che già l'Artini (1) fece sopra i cristalli di Stibina della non lontana miniera delle Cetine di Cotorniano e che poi confermarono il Pelloux (2) ed il d'Achiardi G. (3).

c) in cristalli prismatici trasformati superficialmente in *Cervantite*, trasformazione che talvolta si addentra sino a modificare tutto l' individuo.

d) in cristalli alterati e ricoperti di zolfo.

Debbo alla cortesia ed alla perizia del signor Romeo Mirolli le analisi chimiche quantitative di questo minerale, come tutte le altre che riporterò in seguito.

L' analisi (I) riguarda i cristalli più grandi e più inalterati di Stibina. Essi provengono dalla Galleria di s. Luisa.

(1) Artini E., *Appunti di mineralogia italiana. Antimonite di Cetine*. Rend. R. Accad. Lincei, vol. III, 2° sem., ser. 5ª, Roma 1894.

(2) Pelloux A., *Appunti sopra alcuni minerali delle Cetine di Cotorniano presso Rosia*. Rend. R. Accad. Lincei, vol. X, sem. 2°, ser. 5ª, Roma 1901.

(3) D'Achiardi G., *Cenni sui minerali delle miniere di antimonio delle Cetine di Cotorniano*. Atti Soc. tosc. sc. nat. Proc. verb., vol XII, pag. 232, 1901.

La (II) spetta ai cristalli più piccoli e superficialmente alterati, provenienti dalla stessa Galleria.

Finalmente fu sottoposta all'analisi (III) la Stibina profondamento alterata in un materiale terroso rosso-giallastro.

Dalle analisi che ora riporto si possono riconoscere alcuni fatti che indicano gli stadî diversi di alterazione della Stibina.

	I	II	III	
Sb.	68.000	52.0612	48.02	
S.	31.020	27.6360	43.05	
Fe.	0.002	0.0718	0.65	
Ca.	—	3.9270	1.42	
Al.	—	4.7360	—	
Res. ins.	1,030	9.4500	6.00	
	100.052	97.8820	99.14	C. 100°

(I) Anche la più pura Stibina presenta le alterazioni; invero essa contiene più zolfo del teorico (28,8 %); inoltre ferro e parte insolubile.

(II) La parte del materiale di alterazione aumenta con l'intervento dell'argilla ocracea e calcarea.

(III) Lo zolfo raggiunge quasi il doppio del teorico; il residuo si arricchisce di ferro; è presente il calcio.

Sono questi gli stadî che conducono la Stibina ai suoi naturali derivati. È da segnalarsi l'assenza dell'arsenico e del piombo, elementi che non furono rintracciati neppure con una analisi qualitativa; tale mancanza costituisce un pregio industriale della Stibina della Selva.

2. *Cervantite.* — È un prodotto di alterazione della Stibina, della quale spesso conserva la forma esterna. Frequentemente però si presenta come una massa più o meno compatta di color giallo-ruggine a giallo-chiaro. Corrisponde perfettamente a quella descritta dal Pelloux proveniente dalle Cetine di Cotorniano.

3. *Stibiconite* o *antimonocra.* — Anche questo minerale è molto abbondante e deriva dalla Stibina. Cristalli interi hanno subìto questa alterazione. Spesso è una massa bianco-giallastra mista a calcite. Invero ottenni viva effervescenza con l'acido cloridrico diluito e dalla soluzione la reazione evidente del calcio. Al tubo poi ebbi notevole svolgimento di acqua.

4. *Zolfo.* — Questo minerale si mostra specialmente in piccoli cristallini di cui alcuno raggiunge i tre mm. Essi si trovano specialmente nelle cavità lasciate dai diversi gruppi di cristalli di Stibina o sulla superficie di questi. Lo zolfo è di color giallo citrino; i cristallini sono nitidi. L'abito cristallino somiglia molto a quello descritto dal Pelloux per lo zolfo delle Cetine, invero la zona delle protopiramidi è la più ricca.

5. *Pirite.* — Vi sono piccole lenti di questo minerale che va ossidandosi ed inalzando la temperatura dei tratti di galleria che la tagliano. Un campione mi mostra una massa bollosa, entro la quale spiccano piccoli ottaedri che raggiungono anche 4 mm. di diametro. L'analisi ha dato:

Fe	47.10	
S.	52.97	
	100.07	C. 100°.

7. *Ematite.* — Spesso i cristalli di Stibina sono ricoperti da macchie rosse di questo minerale. Non ci meraviglia la presenza dell' Ematite avendo l'analisi della Stibina constatata sempre la presenza del ferro.

7. *Gesso.*

8. *Quarzo.* — I due ultimi minerali quantunque abbastanza diffusi pure non presentano nulla d'interessante, come gli altri di rame che raramente si trovano alla Selva.

S. Antonio e Val d'Aspra.

Anche la ricerca della galena nella località s. Antonio rimonta ad epoca antica. Ora è stata ripresa la lavorazione con qualche alacrità.

Sopra gli scisti permo-carboniferi giace un piccolo lembo di calcare magnesiaco, compatto, retico, con vene di galena senza alcuna direzione. Le vene sono sempre piccole. Nell' interno della massa calcarea si trovano non raramente cavità riempite di detriti e di argilla; fra questo materiale caoticamente ammassato si rinvengono grossi blocchi e noduli di galena, spesso rivestiti di cinabro. Altre piccole cavità sono tappezzate di belli cristalli di quarzo. Vicino a questa località giace il piccolo lembo di calcare del triasico medio. Interessanti sono le parole che scrive il d'Achiardi intorno a questo giacimento e che riferirò in seguito.

In due anni, con pochi operai, si estrassero circa 50 ton. di minerale che venne spedito a Pertusola.

1. *Galena.* — Si trova in blocchi più o meno vistosi, formati da cristalli cubici di discrete dimensioni. I noduli fra l'argilla mostrano anche esternamente i cubi ben formati e rivestiti di solfuro di mercurio e da ossidi di ferro.

Per escludere che la Galena potesse appartenere a quella varietà che il Bechi chiamò *Targionite*, e per riconoscere la presenza e la quantità dell'argento, ho fatto eseguire dal nominato analista lo studio chimico di un campione di minerale molto puro.

Pb.	85.76	
S.	12.95	
Fe.	0.50	
	99.21	C. 100°.

Da questo risultato appare che il minerale è una vera e propria Galena e che non contiene: argento, antimonio, zinco e rame.

La roccia incassante, presa a centim. 5 dal minerale, mostra i fossili presumibilmente identici a quelli menzionati. L'analisi di questa ha dato:

Fe.	4.155	
CaO.	28.790	
MgO.	16.421	
CO^2.	45.620	
H^2O.	0.145	
Res. ins.	4.713	
	99.844	C. 100°.

L'analisi fa ascrivere la roccia ad una vera dolomite,

2. *Cinabro.* — Riveste frequentemente, con sottili veli, i blocchi di Galena: il minerale però non può finora dar luogo ad una utile escavazione.

3. *Pirite.* — Entro la dolomite si trovano bei cristalli di Pirite (Mineralizzazione *a punteggiature*). Ne raccolsi un esemplare che rappresenta un caratteristico pentagonododecaedro. L'analisi qualitativa non vi ha svelato la preseza del rame.

4. *Calcopirite.* — In un campione di Quarzo, di Galena e di carbonati idrati di rame ho potuto riconoscere due piccole masserelle di Calcopirite.

5. *Fluorite.* — Misti al Quarzo si trovano cubi quasi incolori di Fluorite.

6. *Quarzo.* — Si hanno dentro la cavità del calcare bellissime cristallizzazioni di questo minerale. Si presenta con le forme caratteristiche e quasi sempre impiantato. Le dimensioni variano: vi sono cristalli che passano i centim. 10 di lunghezza. Raramente è trasparente, comunemente latteo. All'analisi si mostrò puro e con sole tracce di ferro.

7. *Limonite.* — Questo minerale riempie talvolta le fessure; non è mai puro.

8. *Azzurrite.* — In venuzze accompagna la Limonite ed il Quarzo, questo spesso ne è compenetrato.

9. *Malachite.* — Nella stessa giacitura del precedente. L'analisi della malachite tolta sopra una crosta di Limonite ha dato:

Cu.	40.00	
Fe.	38.00	
CO^2	17.70	
H^2O.	1.90	
Res. insol.	2.20	
	99.88	C. 100°.

Evidentemente non si riuscì a separare la Malachite dalla Limonite.

10. *Calcite.*

11. *Gesso.* — I due ultimi minerali e qualche altro ancora offrono poco o punto importanza al mineralista.

MINIERA DI CASALE.

In una diga di quarzo, fra gli scisti permo-carboniferi, si trova il Cinabro che tappezza i frammenti silicei. La roccia è tutta intimamente fratturata e localmente dà luogo a vene di argilla; in questa si rinviene il Cinabro, sotto forma di venuzze, con qualche frequenza. Le ricerche finora sono poco fruttuose. Nella Quarzite vi sono anche lenti di Pirite che si vanno ossidando.

1. *Quarzo.* — Costituisce la quarzite della diga.
2. *Pirite.* — Vene nella Quarzite.
3. *Zolfo.* Con la Pirite.
4. *Cinabro.* — In sottili veli di colore caratteristico. In un campione di argilla, infarcita da minuti frammenti di quarzo, fu trovato il 2,35 °/₀ di mercurio metallico. È questa una quantità più che sufficiente per il trattamento del materiale, posto che si rinvenisse in grande quantità e che si potesse estrarre con relativa tenue spesa. Il trattamento dovrebbe essere eseguito con i forni a caduta automatica Cermak-Spirek.

Poco ed incerto è ciò che possiamo dire intorno all'origine dei citati giacimenti.

Il d'Achiardi A. (1) scrisse intorno al giacimento di Val d'Aspra nei seguenti termini: « Singolarissima è questa giacitura della Galena in una cal- « caria cavernosa, che ha tutto l'aspetto di una massa eruttiva. I cristalli « cubici di Galena insieme a quelli di Blenda (2) gialla come l'ambra, sono « tenacissimamente impastati nella sostanza calcare, quasi che questa erom- « pendo, in quale stato ed in quale modo non so, abbia svelto e trasportato « includendoli in se medesima i minerali cristallizzati di filoni metalliferi « da esse attraversate..... ».

Il Toso (3) invece esprime un altro parere: sembra che egli ritenga lo stesso giacimento come di origine di contatto.

Il Lotti (4) infine, per non citare gli autori che investigarono la origine degli altri analoghi e vicini giacimenti, reputa che vi sia un strettissimo legame fra i nostri giacimenti e le rocce eruttive quaternarie.

(1) D'Achiardi A., *Mineralogia della Toscana*, vol. II, pag. 274, Pisa 1873.

(2) Non ho rinvenuto la *blenda* di cui qui si parla.

(3) Toso P., *Rivista del servizio minerario nel 1899*, pag. 145. Roma 1900.

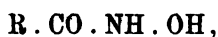
(4) Lotti B., *Die Zinnober und Antimon führenden Lagerstätten Toscanas, und ihre Beziehungen zu den quartären Eruptivgesteinen.* Zeitsc. f. prakt Geologie. 2. 1901. — (Rassegna mineraria, vol. XIV, 1901).

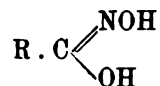
Io mi limito a ricordare che i nostri giacimenti non sono molto lontani dal Monte Amiata e meno dalle rocce eruttive di Radicofani. Sono ancora da notarsi la vicinanza e l'analogia geologica e mineralogica di altri giacimenti minerari, come: Monte Orsaio, Cetine di Cotorniano ecc. ecc. Finalmente non si deve dimenticare che prossima ai nostri giacimenti è la storica sorgente termale di Petriolo, coronata di putizze, le quali emettono zolfo e silice geyseriana.

Dalle osservazioni esposte ci sembra che, con tutte le riserve del caso, si possa attribuire l'origine delle miniere di antimonio e di galena a *metasomatismo*. Il cinabro poi deve ritenersi come *d'impregnazione metallifera* del filone quarzoso, con analoga formazione, quantunque con ricchezza diversa, dei filoni quarzosi cinabriferi di Almaden.

Chimica. — *Ricerche sopra alcuni acidi idrossammici* (1). Nota di A. Angeli, F. Angelico e F. Scurti, presentata dal Socio G. Ciamician.

Col nome di acidi idrossammici si indicano comunemente i derivati dell'idrossilammina della forma.

$$R.CO.NH.OH,$$

dove R indica un radicale qualunque; a queste sostanze sotto forma di sali, spetta con tutta probabilità la struttura:

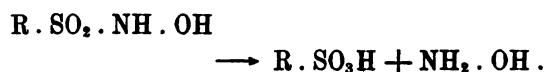
$$R.C\begin{matrix}\nearrow NOH \\ \searrow OH\end{matrix}$$

nella quale uno o tutti e due gli atomi di idrogeno possono venire rimpiazzati dai metalli. In soluzione alcalina sono molto stabili, mentre i mezzi acidi facilmente li idrolizzano con formazione di idrossilammina e del carboacido. Le ricerche ulteriori hanno dimostrato che anche gli acidi minerali possono fornire con l'idrossilammina composti di struttura analoga; così sono stati preparati l'acido idrossilamminsolfonico, l'acido nitroidrossilamminico e l'acido benzolsolfoidrossammico; anche a queste sostanze allo stato libero, oppure sotto forma di sali spettano strutture analoghe ai derivati dei carboacidi, però, nel loro comportamento differiscono da questi ultimi in modo notevole. L'acido benzolsolfoidrossammico e l'acido idrossilamminsolfonico per azione degli acidi, al pari degli acidi idrossammici del carbonio, si scindono facilmente in idrossi-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

lammina e nel corrispondente acido, solforico o benzolsolfonico; l'acido nitro-idrossilamminico invece perde subito una molecola di acqua per dare biossido di azoto. Per azione degli alcali invece tutti e tre si scindono in modo identico: nel residuo NOH che uno di noi ha chiamato *nitrossile* e rispettivamente negli acidi solforoso, benzolsolfinico e nitroso. Queste differenti scissioni operate dai mezzi alcalini, oppure acidi, si possono attribuire alla diversa ripartizione degli elementi dell'acqua:

$$\begin{matrix} R\,.\,SO_2\,.\,NH\,.\,OH \\ H \quad OH \end{matrix} \longrightarrow R\,.\,SO_2H + NH(OH)_2 \longrightarrow R\,.\,SO_2H + NOH + H_2O.$$

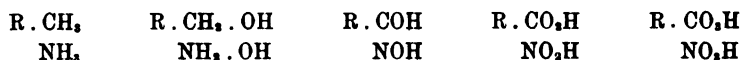
ovvero:

$$\begin{matrix} R\,.\,SO_2\,.\,NH\,.\,OH \\ OH \quad H \end{matrix} \longrightarrow R\,.\,SO_3H + NH_2\,.\,OH\,.$$

Nel primo caso al posto del residuo RSO_2— *nell'idrossilammina si porta un ossidrile; nel secondo invece va un atomo di idrogeno;* questo fatto importante, come vedremo in seguito, è di indole generale. Come è noto, nelle ordinarie scissioni (catalisi degli eteri, saponificazione delle ammidi, inversione dello zucchero ecc.) i mezzi acidi, oppure alcalini, conducono sempre agli stessi prodotti finali.

Il nitrossile, come uno di noi ha posto recentemente in rilievo, si può riguardare come una anidride della biossiammoniaca [1].

Allo scopo di meglio approfondire il meccanismo secondo cui si compiono queste interessanti trasformazioni, noi abbiamo esteso lo studio degli

[1] Ricordando le analogie che esistono fra molti composti che al posto di un atomo di azoto N contengono il residuo HC≡ oppure RC≡, dove R indica un radicale monovalente, si nota che i derivati che l'azoto fornisce con l'idrogeno e con l'ossigeno corrispondono ai prodotti che si ottengono dal carbonio. Ora che Adolfo Baeyer (Berichte XXXIII, 1569) ha completata la serie per i derivati del toluolo si vede subito che a ogni termine dei composti dell'azoto corrisponde un termine analogo per i derivati del carbonio. Prescindendo da ogni formola di struttura, i primi differiscono dai secondi per sostituzione dell'atomo di azoto con il residuo (R . C), dove per brevità R indica C_6H_5.

$R\,.\,CH_3$	$R\,.\,CH_2\,.\,OH$	$R\,.\,COH$	$R\,.\,CO_2H$	$R\,.\,CO_3H$
NH_3	$NH_2\,.\,OH$	NOH	NO_2H	NO_3H

Al toluolo corrisponde l'ammoniaca, all'alcool benzilico l'idrossilammina, all'aldeide benzoica il nitrossile, all'acido benzoico l'acido nitroso all'acido perbenzoico di Baeyer l'acido nitrico; oltre alle molte analogie che si osservano fra i termini corrispondenti delle due serie è notevole il fatto che la benzaldeide facilmente si polimerizza per dare il benzoino

$$2R\,.\,COH = (R\,.\,COH)_2$$

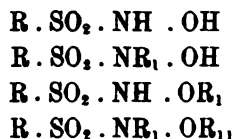
nello stesso modo che il nitrossile

$$2NOH = (NOH)_2$$

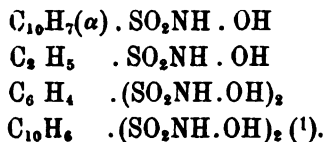
si trasforma in acido iponitroso.

acidi idrossammici cercando anche di utilizzare i risultati cui erano pervenuti altri sperimentatori.

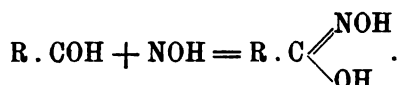
Noi abbiamo incominciate le nostre esperienze sopra gli acidi idrossammici dello zolfo, siccome quelli che più facilmente si prestano a queste reazioni. A tale scopo abbiamo preparati gli acidi

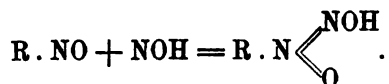
$$R.SO_2.NH.OH$$
$$R.SO_2.NR_1.OH$$
$$R.SO_2.NH.OR_1$$
$$R.SO_2.NR_1.OR_{11}$$

dove R rappresenta un residuo alifatico od aromatico, R_1 e R_{11} residui aromatici, alifatici oppure radicali acidi.

Per gli acidi del primo gruppo, analoghi all'acido di Piloty (Berichte XXIX, 1559)

$$C_{10}H_7(\alpha).SO_2NH.OH$$
$$C_2H_5.SO_2NH.OH$$
$$C_6H_4.(SO_2NH.OH)_2$$
$$C_{10}H_6.(SO_2NH.OH)_2$$ [1].

abbiamo potuto constatare che tutti e con eguale facilità subiscono le scissioni perfettamente identiche a quelle presentate dall'acido benzolsolfoidrossammico.

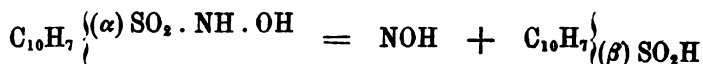
Nella scissione alcalina abbiamo operato in presenza di una aldeide che fissava il nitrossile per trasformarsi nell'acido idrossammico:

$$R.COH + NOH = R.C\begin{cases}NOH\\OH\end{cases}.$$

In modo analogo, operando in presenza di nitrosobenzolo, questo si trasforma nella nitrosofenilidrossilammina:

$$R.NO + NOH = R.N\begin{cases}NOH\\O\end{cases}.$$

Mentre però l'acido benzolsolfoidrossammico viene scisso in acido ben-

[1] Questi acidi si possono quasi tutti preparare secondo il metodo di Piloty; noi però abbiamo trovato più conveniente impiegare invece di una soluzione alcoolica di idrossilammina ed etilato sodico, una base che fosse capace di salificare un acido energico quale il cloridrico che si pone in libertà e d'altra parte forse così debole da non scindere gli acidi solfoidrossammici che si formano. La piridina corrisponde assai bene allo scopo; in tal modo queste preparazioni sono più rapide, meno costose ed i rendimenti molto maggiori.

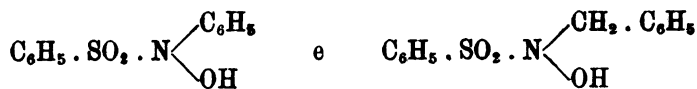
zolsolfinico e nitrossile, nel caso dell' acido α-naftalinsolfoidrossammico assieme al nitrossile si forma l' acido β-naftalinsolfinico:

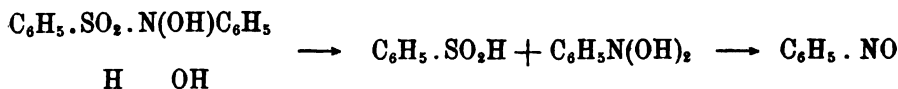
$$C_{10}H_7 \left\{ \begin{matrix} (\alpha)\, SO_2 . NH . OH \\ \; \end{matrix} \right. = NOH + C_{10}H_7 \left\{ \begin{matrix} \; \\ (\beta)\, SO_2H \end{matrix} \right.$$

Questa trasposizione del residuo dell' acido solforico è tanto più rimarchevole inquantochè si compie in modo istantaneo, a temperatura ordinaria ed in soluzione acquosa diluitissima. In modo identico, rispetto agli alcali, si comportano gli acidi solfoidrossammici nei quali i due atomi di idrogeno del residuo dell' idrossilammina sono sostituiti con radicali acidi, quali p. e.:

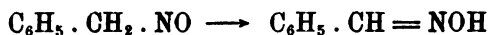
$$C_6H_5 . SO_2 . N \begin{matrix} \diagup O . CO . CH_3 \\ \diagdown CO . CH_3 \end{matrix} \quad e \quad C_{10}H_7 . SO_2 . N \begin{matrix} \diagup O . CO . CH_3 \\ \diagdown CO . CH_3 \end{matrix}$$

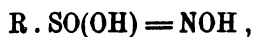
per azione degli alcali queste sostanze vengono dapprima saponificate, si rigenera l' acido solfoidrossammico primitivo, il quale viene tosto scisso nel modo prima accennato. Come è noto, anche l' acido dibenzidrossammico per azione degli alcali viene facilmente saponificato in acido benzoico ed acido benzidrossammico.

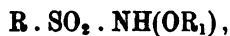
Scissioni analoghe presentano anche gli acidi preparati da Piloty:

$$C_6H_5 . SO_2 . N \begin{matrix} \diagup C_6H_5 \\ \diagdown OH \end{matrix} \quad e \quad C_6H_5 . SO_2 . N \begin{matrix} \diagup CH_2 . C_6H_5 \\ \diagdown OH \end{matrix}$$

Il primo fornisce acido benzolsolfinico e nitrosobenzolo, che in questo caso corrisponde al nitrossile:

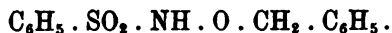
$$\begin{matrix} C_6H_5 . SO_2 . N(OH)C_6H_5 \\ H \quad OH \end{matrix} \longrightarrow C_6H_5 . SO_2H + C_6H_5N(OH)_2 \longrightarrow C_6H_5 . NO$$

Il secondo fornisce un nitrosotoluolo, il quale naturalmente tosto si trasforma nell' ossima della belzaldeide:

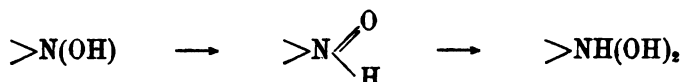
$$C_6H_5 . CH_2 . NO \longrightarrow C_6H_5 . CH = NOH$$

Tali scissioni si possono anche interpretare ammettendo che tutti questi composti, in soluzione alcalina, reagiscano secondo la forma tautomera:

$$R . SO(OH) = NOH ,$$

un comportamento molto differente si osserva invece per gli acidi idrossammici della forma:

$$R . SO_2 . NH(OR_1) ,$$

dove R_1 indica un residuo alcoolico.

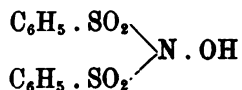
Noi abbiamo preso in esame l'acido

$$C_6H_5 . SO_2 . NH . O . CH_2 . C_6H_5 .$$

Esso si scioglie negli alcali e dalla soluzione si precipita inalterato anche dopo prolungato riscaldamento. Questo fatto dimostra che affinchè gli alcali determinino la scissione è necessario che sia libero l'atomo di idrogeno che nell'idrossilammina appartiene all'ossidrile. Ancora non ci è ben chiaro a qual ragione sia da attribuirsi tale comportamento; non ci sembra però improbabile che l'ossigeno ossimmico, in presenza di alcali, assuma la forma di un ossido:

$$>N(OH) \longrightarrow >N\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{matrix} \longrightarrow >NH(OH)_2$$

L'idrossilammina stessa, come è noto, in soluzione alcalina si comporta in tutt'altro modo che in soluzione acida; a questo riguardo ci basti ricordare che il cloridrato di idrossilammina riduce a ferroso il cloruro ferrico, mentre invece, in soluzione alcalina ossida l'idrato ferroso a ferrico (Haber, Berichte, XXIX, 2444). Il prodotto si comporta quindi ad un dipresso come una ammide, e le proprietà acide sono senza dubbio dovute all'atomo di idrogeno unito all'azoto, che probabilmente passa al residuo SO_2.

$$C_6H_5 . SO_2 . NH(OCH_2 . C_6H_5) \longrightarrow C_6H_5 . SO(OH) = N(OCH_2 . C_6H_5$$

Per azione ulteriore del cloruro benzolsolfonico sopra l'acido benzolsolfoidrossammico, ovvero per ossidazione moderata di quest'ultimo, Piloty ha preparato l'acido dibenzolsolfoidrossammico.

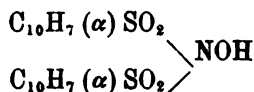
$$\begin{matrix} C_6H_5 . SO_2 \searrow \\ \\ C_6H_5 . SO_2 \nearrow \end{matrix} N . OH$$

il quale è perfettamente identico ad un acido che Koenigs [1] ha ottenuto facendo reagire l'acido nitroso sopra l'acido benzolsolfinico. Evidentemente in questo caso l'acido nitroso reagisce come triossiammoniaca $N(OH)_3$ e la reazione è analoga a quella che si compie fra solfiti e nitriti.

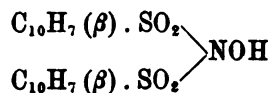
Siccome le esperienze fatte da Koenigs sopra questo acido interessante sono incomplete, noi abbiamo giudicato opportuno di sottoporlo ad uno studio ulteriore allo scopo di determinare in modo sicuro il suo comportamento e di porre in rilievo le analogie che passano fra esso e l'acido benzolsolfoidrossammico. Koenigs e Piloty assegnano all'acido da loro ottenuto il punto di fusione 109°; noi, invece, sopra un campione purissimo ed analizzato, preparato secondo le loro indicazioni, abbiamo trovato che fonde a 126°; non sappiamo a qual fatto attribuire tale differenza.

[1] Berl. Berichte XI, 615.

Secondo Koenigs, l'acido dibenzolsolfoidrossammico per azione degli alcali si scinde di nuovo in acido benzolsolfinico ed acido nitroso; egli non descrive l'esperienza ma noi abbiamo potuto convincerci in modo diretto trattando la soluzione alcalina dell'acido con cloruro di bario; precipita subito il sale baritico dell'acido benzolsolfinico ed il nitrito rimane in soluzione. Per trattamento con acido solforico Koenigs ottiene un liquido che ha proprietà riducenti; noi abbiamo trovato che tale proprietà è dovuta alla formazione di idrossilammina che noi riuscimmo ad identificare trasformandola nell'ossima del piperonalio. Anche l'acido benzolsolfoidrossammico di Piloty per trattamento con acido fornisce idrossilammina che identificammo del pari convertendola nell'ossima del piperonalio.

Sebbene il comportamento degli acidi benzosolfoidrossammico e dibenzosolfoidrossammico rispetto agli alcali sembri a tutta prima alquanto diverso, esaminando attentamente si osserva che esso presenta la più stretta analogia. E questa analogia si rende ancora più manifesta quando si prenda in esame il corrispondente derivato della naftalina

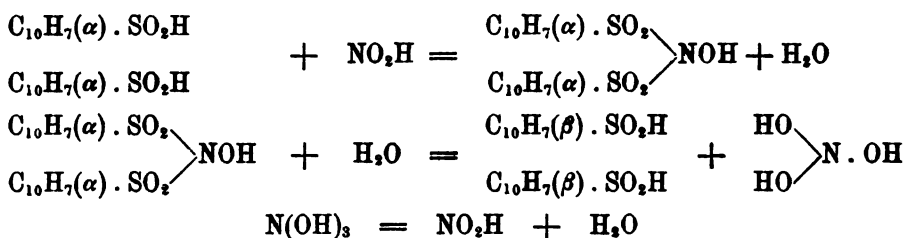
$$\begin{matrix} C_{10}H_7\,(\alpha)\,SO_2 \\ C_{10}H_7\,(\alpha)\,SO_2 \end{matrix} \Big\rangle NOH$$

che preparammo per azione dell'acido nitroso sopra l'acido α-naftalinsolfinico. Il prodotto fonde a 102°. Anche questo acido, al pari dell'acido dibenzosolfoidrossammico, quando venga trattato con alcali si scinde in acido nitroso ed in un acido solfinico; però non si forma l'acido α-naftalinsolfinico da cui si è partiti, ma bensì l'acido β-naftalinsolfinico in modo precisamente identico come dall'acido α-naftalinsolfoidrossammico per azione degli alcali si ottiene acido β-naftalinsolfinico. Acidificando nuovamente il liquido, l'acido β-naftalinsolfinico formatosi reagisce a sua volta con l'acido nitroso per dare origine ad un acido isomero a quello da cui si è partiti, l'acido di-β-naftalinsolfoidrossammico che fonde a 115°:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7\,(\beta)\,.\,SO_2 \\ C_{10}H_7\,(\beta)\,.\,SO_2 \end{matrix} \Big\rangle NOH$$

Anche in questo caso, nella scissione alcalina, *all'atomo di azoto per ogni residuo solfonico che si stacca si porta un residuo ossidrile:*

Il seguente schema chiarisce meglio le reazioni:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2H \\ C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2H \end{matrix} + NO_2H = \begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \\ C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \end{matrix} \Big\rangle NOH + H_2O$$

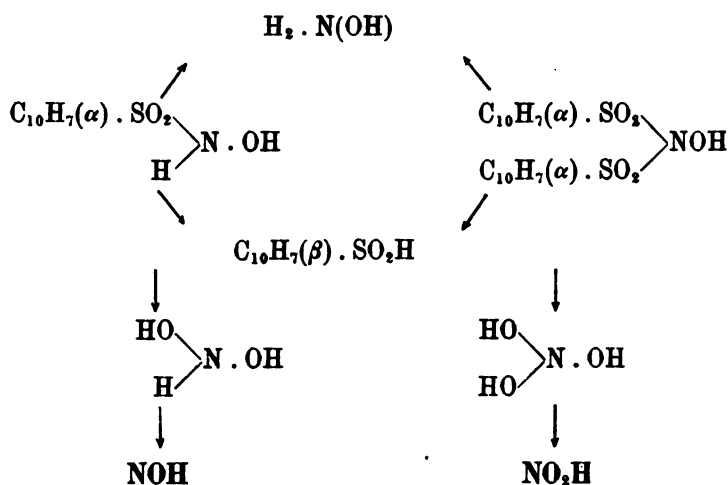
$$\begin{matrix} C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \\ C_{10}H_7(\alpha)\,.\,SO_2 \end{matrix} \Big\rangle NOH + H_2O = \begin{matrix} C_{10}H_7(\beta)\,.\,SO_2H \\ C_{10}H_7(\beta)\,.\,SO_2H \end{matrix} + \begin{matrix} HO \\ HO \end{matrix} \Big\rangle N\,.\,OH$$

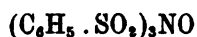
$$N(OH)_3 = NO_2H + H_2O$$

La stessa reazione e la stessa trasposizione molecolare del residuo solforico avviene come si è detto anche nella scissione dell'acido naftalin-α-solfoidrossammico; il seguente specchietto illustra bene il completo parallelismo che esiste fra queste interessanti trasformazioni:

HO
>N . OH
H

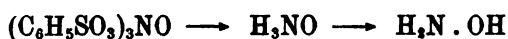
NOH

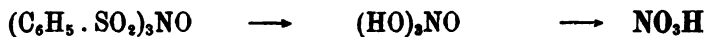
HO
>N . OH
HO

NO_2H

Il nitrossile (biossiammoniaca) e l'acido nitroso (triossiammoniaca) si formano quindi per mezzo di reazioni analoghe e che si compiono nell'identico modo. Diremo infine che anche la tribenzolsolfoidrossilammina di Koenigs

$$(C_6H_5 . SO_2)_3NO$$

può subire scissioni che con le precedenti presentano grande rassomiglianza.

Per azione degli acidi fornisce idrossilammina che, come nei casi precedenti, noi abbiamo caratterizzata trasformandola nell'ossima del piperonalio:

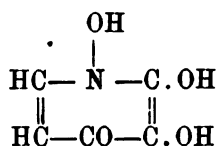
$$(C_6H_5SO_3)_3NO \longrightarrow H_3NO \longrightarrow H_2N . OH$$

Per azione degli alcali invece fornisce acido nitrico. In questo caso non ci fu possibile isolare l'acido benzolsolfinico che contemporaneamente si forma, giacchè dovendo insistere nell'ebollizione con alcali non si ottengono che i i prodotti di decomposizione. Anche in questa reazione, ad ogni residuo solfinico che si stacca, all'azoto si porta un ossidrile:

$$(C_6H_5 . SO_2)_3NO \longrightarrow (HO)_3NO \longrightarrow NO_3H$$

Reciprocamente la tribenzolsolfoidrossilammina si può preparare per azione diretta dell'acido benzolsolfinico sopra l'acido nitrico.

Il nitrossile, l'acido nitroso e l'acido nitrico si formano quindi per mezzo di reazioni analoghe.

Chimica. — *Azione dell'idrossilamina sull'etere dimetil-pirondicarbonico.* Nota del dott. Carlo Palazzo, presentata dal Socio E. Paternò.

Riprendendo lo studio dei derivati azotati dell'acido meconico, la costituzione di taluni dei quali rimaneva oscura, nonostante le diligenti ricerche di Ost [1], il prof. Peratoner si è fermato nel suo ultimo lavoro principalmente all'acido ossi-piromecazonico [2], o tetrossipiridina di Ost, ed, esaminandone il comportamento chimico, studiandone la genesi dall'acido nitrosopiromeconico, di cui con una precedente ricerca aveva chiarito la natura di isonitroso-composto [3], ha attribuito a quell'acido la costituzione

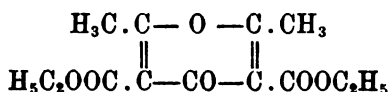
```
        OH
        |
HC— N —C.OH
 ||      ||
HC—CO—C.OH
```

secondo la quale è da riguardarsi come un « ossipiridone » con l'azoto ossimidico nel nucleo.

Questa nuova interpretazione farebbe intravedere la possibilità di passare facilmente, e con una reazione generale, cioè per mezzo dell'idrossilamina, dai composti pironici ad N-ossi-piridoni per sostituzione dell'ossigeno del nucleo mediante il gruppo ossimidico. Però risulta dalla letteratura relativa che l'idrossilamina lascia inalterati parecchi derivati del pirone [acido chelidonico [4], acidi comenico e piromeconico [5], dimetil-γ-pirone [6]] e fu questa appunto la ragione per cui, prima delle sintesi del pirone, si dubitasse della presenza del carbonile nel suo nucleo.

Ad ulteriore conferma della formula soprariferita, ho voluto tentare di preparare composti di costituzione analoga, e per ciò ho ripreso, dietro invito del prof. Peratoner, lo studio della reazione fra idrossilamina e composti

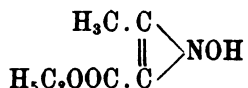
(1) Journal f. prakt. Chemie 19, 177.
(2) Questi Rendiconti, seduta del 20 aprile 1902.
(3) Questi Rendiconti, seduta del 16 marzo 1902.
(4) Be 17, I, 1061.
(5) Be 17, II, 2087.
(6) A. 257, 273.

pironici, scegliendo come primo termine l'etere dimetil- piron- dicarbonico, o etere di Conrad e Gushzeit (1):

$$\begin{array}{c} H_3C.C-O-C.CH_3 \\ \| \qquad \| \\ H_5C_2OOC.C-CO-C.COOC_2H_5 \end{array}$$

I risultati di questa ricerca, che comunico brevemente. furono del tutto inattesi.

L'etere cennato reagisce bensì con l'idrossilamina, però deve contemporaneamente subire una scissione. Infatti, come si rileva dai risultati analitici sottoriferiti, al prodotto della reazione si deve attribuire la formula $C_6H_9O_3N$; non è purtroppo altrettanto facile, almeno pel momento, assegnargli invece con tutta sicurezza una formula di struttura.

Dal suo comportamento, specialmente rispetto al permanganato, al bromo, al cloruro ferrico, al nitrato di argento, all'acido jodidrico nella determinazione di ossietile, si sarebbe indotti a preferire la formula seguente che meglio si accorda con i fatti osservati:

$$\begin{array}{l} H_3C.C \\ \quad \| \quad >NOH \\ H_5C_2OOC.C \end{array}$$

Tuttavia dò per ora questa costituzione con riserva e mi propongo di chiarirla con ulteriori ricerche, nelle quali spero di poter rintracciare anche gli altri prodotti che nella scissione dell'etere di Conrad e Gushzeit si devono formare contemporaneamente. Però, richiedendo la preparazione del materiale alquanto tempo, mi preme intanto di prendere data del lavoro.

Il seguente procedimento si mostrò in diverse esperienze il più soddisfacente.

L'etere di Conrad e Gushzeit in fini cristalli, o finamente polverato, si mescola con una soluzione di due molecole di idrossilamina ed una di carbonato sodico, fatta a caldo con una minima quantità di acqua, ed il miscuglio, portato in bagno-maria a 100°, si agita vivamente dall'esterno; in tal modo l'etere si fonde rapidamente e reagisce con l'idrossilamina. Infatti, alcuni minuti dopo, si separano dal liquido delle gocciole oleose, giallo-chiare, che, ben tosto, per il raffreddamento di esso sotto agitazione, si concretano in una massa mammillonare gialla con una tinta rossa. Questa, separata dal liquido, oramai trascurabile, viene lavata su di un filtro con poca acqua, spremuta alla pompa e mantenuta quindi sopra acido solforico — possibilmente al riparo dalla luce — fino a completa secchezza. Si esaurisce allora con benzolo per spogliarla dell'etere eventualmente inalterato ed il residuo

(1) Be 19, I, 22 e Be 20, I, 151.

indisciolto, nuovamente seccato, si cristallizza dall'acetone secco bollente. Si ottiene così una sostanza perfettamente bianca, di splendore sericeo, che nemmeno per ripetute cristallizzazioni dall'acetone o per ripetuti trattamenti con alcool assoluto può aversi assolutamente scevra di residuo.

Delle esperienze poste al fine di averla in uno stato di assoluta purezza e soprattutto esente di residuo fisso, mostrarono che si raggiunge benissimo l'intento quando la si cristallizzi dall'acido cloridrico caldo, di discreta concentrazione; infatti la sostanza vi si scioglie completamente e ne cristallizza per il solo raffreddamento, mentre nelle acque madri rimane disciolta la totalità del sodio. Cosicchè se la sostanza separata da queste si lava sopra un filtro con poca acqua, si ottiene perfettamente pura.

I) gr. 0,1928 di sostanza fornirono cmc. 16,3 di azoto, misurati a 22° ed a 763 mm.

Su 100 parti:

Trovato	Calcolato per le formule		
	$C_{13}H_{17}O_6N$	$C_{13}H_{18}O_6N_2$	$(C_6H_9O_3N)_n$
5,59	4,94	9,39	9,79

II) gr. 0,1925 di sostanza fornirono gr. 0,3523 di anidride carbonica e gr. 0,1224 di acqua.

III) gr. 0,1956 di sostanza fornirono gr. 0,3654 di anidride carbonica e gr. 0,1148 di acqua.

Su 100 parti:

	Trovato		Calcolato per le formule	
	I	II	$C_{13}H_{18}O_6N_2$	$(C_6H_9O_3N)_n$
Carbonio:	49,91	50,09	52,31	50,31
Idrogeno:	7,06	6,52	6,04	6,36

Delle diverse formule imaginabili è da preferirsi evidentemente quella semplice $C_6H_9O_3N$, infatti:

IV) gr. 0,1872 di sostanza abbassarono di 0°,49 il punto di congelamento di gr. 10,503 di acido acetico glaciale, donde, coefficiente di abbassamento = 0,279.

Grandezza molecolare	Trovata	139
	Calcolata per $C_6H_9O_3N$.	142

Allo stato di perfetta purezza il prodotto della reazione fra l'idrossilamina e l'etere dimetil- pirondicarbonico è una sostanza bianca formata da aghetti lucenti che contengono acqua di cristallizzazione. Il soggiorno sopra acido solforico nel vuoto è però sufficiente perchè questa vada perduta; la sostanza si trasforma allora in una massa granulare bianchissima, porosa, friabile. Questa si fonde a 164° colorandosi un poco e, immediatamente dopo la fusione, si decompone tumultuariamente lasciando un abbondante deposito

di carbone, il quale brucia però abbastanza bene. È solubile nell'acqua, nell'acetone, nell'acido cloridrico e nell'acido acetico, soprattutto a caldo; altri solventi non si cercarono per economia di sostanza. La soluzione acquosa ha debole reazione acida, sapore nettamente amaro, di base piridica; si colora in rosso sangue con una traccia di cloruro ferrico. Col nitrato di argento dà un precipitato bianco, voluminoso, insolubile in benzolo, alcool, acetone, etere, acido acetico, anche a caldo, solubilissimo in ammoniaca. Questo precipitato è abbastanza stabile alla luce diffusa e si fa maneggiare comodamente; alla luce diretta, invece, si colora rapidamente in violetto; riscaldato, si decompone tranquillamente senza prima fondere, e, calcinato in crogiuolo di porcellana, lascia una spugna di argento molto lucente.

Gr. 0,1965 di questo composto fornirono gr. 0,0746 di argento metallico.

Su 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_6H_8AgO_3N + 2$ aq
Argento:	37,96	37,76

Se ne deduce che un solo atomo di idrogeno fu sostituito. La sostanza $C_6H_9O_3N$ decolora il permanganato già a freddo, come l'originario etere, ed in soluzione acetica assorbisce anche bromo.

Trattata a caldo con acido jodidrico, svolge, quasi sull'istante, joduro di etile.

Gr. 0,2500 di sostanza fornirono, alla determinazione dell'ossietile, col metodo di Zeisel, gr. 0,3902 di joduro di argento, corrispondente a gr. 0,0749 di ossietile.

Su 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_4O_2N.OC_2H_5$
Ossitile:	29,96	31,46

Trattata con acido cloridrico, diluito o concentrato, non elimina idrossilamina nemmeno in tubi chiusi.

Chimica fisica. — *Sulla formazione di cristalli misti per sublimazione.* Nota di G. BRUNI e M. PADOA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN [1].

Tutti i cristalli misti che furono fin qui studiati vennero ottenuti da miscele liquide, e cioè o da soluzioni delle due sostanze isomorfe in un terzo corpo che funzioni da solvente, oppure da miscele binarie contenenti soltanto i due componenti allo stato fuso. Sono sopratutto i fenomeni di equilibrio eterogeneo fra queste soluzioni liquide e le soluzioni solide che ne prendono origine, che furono l'oggetto principale delle ricerche fin qui eseguite.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale dell'Università di Bologna.

Che nei casi di isodimorfismo cristalli misti si possano formare da altri cristalli misti senza passare per altri stati d'aggregazione, è noto, ed i fatti relativi vennero studiati da molti autori e sopratutto nel modo più esauriente da Bakhuis Roozeboom. Che però i cristalli misti possano formarsi direttamente dai componenti allo stato solido, è, per quanto teoricamente possibile, reso assai difficile dall'estrema lentezza della diffusione fra corpi solidi.

Resta ancora un terzo modo possibile di produzione delle soluzioni solide, e cioè passando attraverso ad una fase gassosa. Come già ebbe ad osservare uno di noi ([1]), la formazione di cristalli misti per sublimazione, per quanto debba apparire a priori verosimile e probabile, non venne finora constatata.

Ci è sembrato perciò non privo d'interesse l'eseguire talune ricerche a questo riguardo. È ovvio però come esse presentino varie e non lievi difficoltà. Il sottoporre alla sublimazione una miscela dei due corpi isomorfi e l'analizzare i cristalli sublimati, non può infatti esser ritenuto sufficiente; ma occorre insieme verificare che questi cristalli siano omogenei. Ora trattandosi di corpi aventi la stessa forma cristallina, anche un esame microscopico non può nella massima parte dei casi giovare. Come il mezzo più opportuno per risolvere questa difficoltà, abbiamo pensato di ricorrere all'artificio usato già da I. W. Retgers nello studio dell'isomorfismo, cioè alla formazione di cristalli misti colorati risultanti dall'unione di due sostanze isomorfe, di cui una sola colorata e l'altra incolora. In tal caso può assai bene essere osservato che i cristalli misti sono di un colore omogeneo sempre più pallido di quello del componente colorato puro.

Nelle varie esperienze da noi eseguite (e che ci hanno condotto alla constatazione della formazione di cristalli misti per sublimazione) procedemmo nel modo seguente.

La miscela delle sostanze da studiare veniva sottoposta a fusione; la massa fusa polverizzata era introdotta in un tubo di vetro del diametro di circa 1 $^1/_2$ cm. e terminato da un rigonfiamento sferico, avendo cura che la sostanza stesse tutta in quest'ultimo e non ne rimanesse aderente alle pareti del tubo. In questo recipiente (la cui estremità superiore veniva prima affilata) si provocava mediante una buona pompa ad acqua una forte rarefazione (da 12-14 mm. di mercurio), e quindi lo si chiudeva alla lampada. Il tutto veniva riscaldato in un bagno mantenuto costante ad una temperatura inferiore al punto di fusione più basso possibile per le miscele impiegate. Quando si era raccolta una quantità di cristalli sufficiente, ma non eccessiva, per non alterare troppo sensibilmente la composizione della miscela primitiva, si rompeva il tubo e si raccoglievano i cristalli sublimati che venivano esaminati con la lente ed al microscopio onde constatarne l'omogeneità,

([1]) G. Bruni, *Ueber feste Lösungen*. Ahrens's Sammlung. Band VI, Heft 12, pag. 5.

e quindi sottoposti all'analisi. Come sostanze su cui sperimentare scegliemmo dapprima due corpi organici di cui uno di noi mostrò già il completo isomorfismo e la capacità a dare cristalli misti in tutti i rapporti, l'azobenzolo e lo stilbene. Introducemmo perciò in un tubo come quello sopra descritto una miscela di gr. 1,01 di azobenzolo e gr. 1,02 di stilbene, e riscaldammo in bagno d'acqua a 65° (p. fus. dell'azobenzolo 69°, dello stilbene 124°).

I cristalli sublimati avevano un aspetto del tutto omogeneo, ed un colore alquanto più pallido di quello rosso intenso dell'azobenzolo puro. Per la troppo lenta sublimazione dei due corpi, non avemmo cristalli misti in quantità sufficiente per una analisi; però il loro punto di fusione trovato a 75°-76° dimostra che essi contenevano stilbene, per quanto in proporzione notevolmente minore della miscela primitiva.

Volendo però sperimentare su sostanze che sublimassero più facilmente e si prestassero bene ad una analisi, ricorremmo allo studio delle miscele di bromuro e ioduro mercurico. Come è noto, il ioduro mercurico cristallizza in due forme: una rossa stabile a bassa temperatura, ed una gialla che si forma dalla prima a 126°. Il bromuro dà cristalli incolori isomorfi colla modificazione gialla del ioduro. Possono esistere cristalli misti delle due forme, ed i relativi fenomeni di formazione dalle miscele fuse e di trasformazione allotropica furono studiati in modo completo da W. Reinders [1] nel laboratorio di Roozeboom. Dopo esserci assicurati con talune esperienze preliminari qualitative della formazione di cristalli misti per sublimazione, eseguimmo una serie di quattro esperienze su miscele di composizione diversa (dal 20 all'80 % circa di HgI_2). I tubi venivano scaldati in bagno di lega a 150°. La sublimazione avveniva assai rapidamente, e dopo una giornata si poteva raccogliere intorno ad un grammo e mezzo di cristalli misti sublimati. Questi venivano analizzati determinando il mercurio allo stato di solfuro; dalla percentuale di mercurio si calcolava la proporzione di $HgBr_2$ e HgI_2 in essi contenuta. I cristalli ottenuti erano sempre omogonei e colorati in giallo più o meno intenso secondo la quantità di ioduro presenti in essi. Essi restarono gialli anche dopo raffreddamento, e dopo essere stati conservati freddi per tre settimane: ciò che sta in buon accordo colle esperienze di Reinders. Questo fatto dimostra pure all'evidenza trattarsi di cristalli misti e non di miscele meccaniche, poichè i cristalli di ioduro sublimati nelle stesse condizioni, cominciarono a diventare rossi già pochi minuti dopo il raffreddamento. I cristalli misti così ottenuti contenevano sempre meno ioduro che non i primitivi, ciò che corrisponde ad una minore volatilità del ioduro in confronto del bromuro. Il rapporto fra le due concentrazioni ci dà anzi una misura del coefficiente di ripartizione delle sostanze impiegate fra la miscela solida riscaldata e il vapore misto che è con essa in equilibrio.

[1] Zeitschr. fur physik. Chemie XXXII, 494.

Eccone ora i risultati numerici:

I. Si riscaldò una miscela di gr. 9,6040 di $HgBr_2$ e gr. 2,3892 di HgI_2. Si sottoposero all'analisi gr. 0,9564 di cristalli sublimati, da cui si ebbero gr. 0,5932 di HgS.

II. Miscela primitiva: gr. 6,2934 di $HgBr_2$, gr. 4,8084 di HgI_2. Cristalli analizzati gr. 0,9716: HgS ottenuto gr. 0,5796.

III. Miscela primitiva: gr. 5,6452 di $HgBr_2$, gr. 8,4881 di HgI_2. Cristalli analizzati gr. 1,1068; HgS ottenuto gr. 0,6394.

IV. Miscela primitiva: gr. 2.4076 di $HgBr_2$, gr. 9,6492 di HgI_2. Cristalli analizzati gr. 1 0042; HgS ottenuto gr. 0,5519.

Da questi risultati si calcolano le concentrazioni ed i coefficienti di ripartizione esposti nelle tabelle seguenti, che vengono dati riferendoli nella prima a rapporti ponderali, nella seconda a rapporti molecolari.

	Ioduro mercurico in 100 parti in peso		
	della miscela primitiva (C_0)	dei cristalli sublimati (C_1)	Coefficiente di ripartizione $\alpha = \frac{C_1}{C_0}$
I	19,92	18.31	0,92
II	43,31	36,52	0,84
III	60,06	50,44	0,84
IV	80,02	71,74	0,90

	Molecole di ioduro mercurico in 100 molecole		
	della miscela primitiva (C'_0)	dei cristalli sublimati (C'_1)	Coefficiente di ripartizione $\alpha' = \frac{C'_1}{C'_0}$
I	15,89	14,96	0,94
II	37,73	31,35	0,85
III	51,95	44,67	0,86
IV	76,07	69,76	0,92

Oltre a queste esperienze ne abbiamo pure eseguite altre due sottoponendo a sublimazione miscele di ioduro mercurico col corrispondente cloruro, che è pure isomorfo colla modificazione gialla del primo. Abbiamo infatti constatata la formazione di cristalli misti contenenti meno ioduro di primitivi. Siccome però uno studio completo sulla formazione e sui limiti d'esistenza di questi cristalli misti in base alle moderne teorie non fu ancora fatto, ci riserviamo di dare i risultati numerici quando, come ci proponiamo di fare, avremo completamente studiato questo argomento. Vogliamo però fin d'ora far notare che la formazione di cristalli misti di cloruro e ioduro mercurico dalle

loro soluzioni acquose comuni, fu già osservata da varî autori, taluni dei quali considerarono però questi cristalli misti come combinazioni molecolari delle formule $HgI_2 . HgCl_2$ e $HgI_2 . 2HgCl_2$. Invece F. Selmi fino dal 1844, esponeva le sue osservazioni in proposito (¹) nel modo seguente: « Disciogliendo il biioduro di mercurio col bicloruro dello stesso metallo in acqua, si ha un liquido il quale concentrato fornisce cristalli colorati in giallo molto disparatamente, e facili in appresso a rosseggiare; le acque madri collo svaporamento danno nuovi cristalli, che sono scoloriti, ma tendenti a farsi rossigni, le ultime acque madri dei quali producono una terza qualità di cristalli, scoloriti ed inetti ad arrossare; negli ultimi cristalli si contiene meno di biioduro di mercurio che nei secondi, ed in questi meno che nei primi ». Riguardo all'interpretazione di questi fenomeni egli osserva più innanzi (pag. 132-133) che non si possono spiegare coll'ammissione di una combinazione chimica fra i due sali, ma che si deve invece ammettere trattarsi di una formazione di cristalli misti fra sostanze isomorfe. E anzi veramente da meravigliarsi come, dopo osservazioni di una precisione e acutezza mirabili per lo stato delle cognizioni di quell'epoca, si trovino in trattati di chimica più moderni (²), ed anche recentissimi (³), riportati i pretesi cloroioduri di mercurio come veri composti chimici.

Questo metodo potrà essere vantaggiosamente impiegato a constatare la formazione di cristalli misti in varî casi in cui altri metodi non possono essere impiegati: così ad esempio, evidentemente per le sostanze che sublimino senza fondere, o che non si sciolgano nei solventi comuni, o lo facciano soltanto alterandosi, e presenta inoltre il vantaggio di poter lavorare con quantità assai piccole di sostanza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Vicepresidente Blaserna presenta il 1° volume delle *Opere matematiche* di Eugenio Beltrami, e dà comunicazione di una lettera del prof. Alberto Tonelli, Preside della Facoltà di scienze dell'Università di Roma, che a nome della Facoltà fa omaggio all'Accademia del volume anzidetto.

Il Vicepresidente Blaserna aggiunge che questo dono riescirà molto gradito all'Accademia, la quale ricorda sempre i grandi meriti scientifici e personali del suo compianto ed illustre Presidente; e fa inoltre notare la grande delicatezza del prof. Tonelli, il quale ha voluto che l'Accademia ricevesse la prima copia edita delle *Opere* del Beltrami.

(¹) *Studi sperimentali e teorici di chimica molecolare*. Fascicoli 3° e 4°, pag. 117.
(²) Gmelin Kraut, Anorganische Chemie, 6ᵗᵉ Aufl. 1875. Band III, pag. 890.
(³) Dammer, Anorganische Chemie. 2 Band. 2 Theil, pag. 872.

V. C.

INDICE DEL VOLUME XI, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1902 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

E

INDICE PER MATERIE

M

N

P

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 6 luglio 1902.

Paleontologia. — *Sul rinvenimento di un teschio di Squalodontidi nel calcare bituminoso di Ragusa in Sicilia.* Nota preliminare del Socio G. G. GEMMELLARO.

Pochi giorni or sono il sig. A. P. Brown ha gentilmente donato al Museo di Geologia della Universià di Palermo un teschio di *Squalodontidi* rinvenuto nel calcare bituminoso del Miocene medio di Ragusa in Sicilia.

L'osso frontale, il temporale, lo jugale, l'intermascellare, il mascellare superiore ed il mascellare inferiore sono intieri; del parietale e dell'occipitale se ne vede soltanto porzione.

La serie dentale del mascellare inferiore è ben conservata, quella del mascellare superiore e dell'intermascellare conservata in parte.

La scoverta di questo teschio è interessante, perchè i suoi molari si allontanano per la forma da quelli dei veri *Squalodon;* mentre invece si avvicinano a quelli dello *Squalodon* (*Phocodon*) *Scillae* Agas.

L'Agassiz instituì il genere *Phocodon* sulla figura data da Scilla di tre molari provenienti dal Miocene medio di Malta. Oggi i paleontologisti sono d'accordo nel riferirli alla famiglia *Squalodontidae*, e con gran probabilità al genere *Squalodon*, precedentemente stabilito da Grateloup; però è incerta ancora la loro identificazione al genere *Squalodon*, perchè questi molari sono dentellati al margine anteriore e posteriore, e compressi lateralmente, come quelli del *Zeuglodon*.

La illustrazione del teschio di Ragusa, che ha i molari colla medesima forma di quelli di Malta, sebbene più piccoli, toglierà ogni dubbio sulla posizione sistematica dei denti provenienti da Malta, figurati dallo Scilla più di due secoli addietro.

Meccanica. — *Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie.* Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio VOLTERRA.

In una Nota di recente pubblicazione (1) risolvetti un problema relativo al moto di un punto in un piano: problema che consisteva nel determinare quei movimenti nei quali le ∞^2 traiettorie, che corrispondono ad uno stesso valore della costante delle forze vive, si possono distribuire in sistemi ortogonali. I risultati a cui pervenni sono i seguenti: la costante delle forze vive (tolto il caso del moto rettilineo uniforme) deve essere nulla, e la funzione potenziale soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 \lg U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lg U}{\partial y^2} = 0\,;$$

verificandosi queste condizioni, le traiettorie nel moto corrispondente si ottengono con due quadrature, ed i sistemi ortogonali, nei quali si possono distribuire, sono isotermi.

Non è difficile estendere al movimento di un punto sopra una superficie qualunque le considerazioni ed i risultati contenuti in quella Nota; ed è quanto mi propongo di fare nelle pagine che seguono.

1. Un punto di massa eguale all'unità si muova sopra una superficie di elemento lineare

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\,,$$

sotto l'azione di forze di potenziale U. La ricerca delle traiettorie, che corrispondono ad un medesimo valore della costante delle forze vive h, si può far dipendere dall'integrazione dell'equazione

$$(1) \qquad \varDelta_1\theta \equiv \frac{1}{H^2}\left[E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2\right] = 2\,(U + h)\,,$$

essendo

$$H^2 = EG - F^2\,;$$

poichè, come si dimostra ricorrendo, ad es., al principio della minima azione, il problema delle traiettorie per la data superficie equivale a quello delle geodetiche per un'altra superficie il cui elemento lineare sia dato da

$$ds'^2 = 2\,(U + h)\,ds^2\,,$$

(1) *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano*; Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XI, 1902.

e quest' ultimo problema dipende, come è noto, dall' integrazione dell' equazione

$$\Delta_1 \theta = 1 .$$

Ad ogni integrale θ della (1) corrisponderà dunque una famiglia di traiettorie del punto mobile, che saranno le linee ortogonali alla famiglia $\theta =$ cost., e si otterranno integrando l' equazione

$$\left(\mathrm{E}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) du + \left(\mathrm{F}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) dv = 0 .$$

Se poi si conosce un integrale della (1) contenente una costante arbitraria a, l' equazione

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{cost.}$$

rappresenterà tutte le traiettorie che corrispondono al valore fissato per h.

2. Ciò premesso, vogliamo vedere se esistono sulla superficie dei sistemi ortogonali composti unicamente di traiettorie. La risposta a tale questione è identica a quella che già ottenni nel caso del piano. Difatti se imaginiamo riferita la superficie ad un sistema ortogonale isotermo (φ, ψ), che dia al quadrato dell' elemento lineare la forma

$$ds^2 = \lambda\,(d\varphi^2 + d\psi^2),$$

l' identico calcolo fatto nel piano conduce al risultato che *condizione necessaria e sufficiente, affinchè le linee* $\theta =$ cost. *insieme colle linee ortogonali* $\theta_0 =$ cost. *costituiscano un sistema di traiettorie del punto mobile, è che* θ *verifichi simultaneamente le due equazioni*

$$\Delta_1\theta = 2\,(\mathrm{U} + h) \quad , \quad \Delta_2\theta = 0 . \tag{2}$$

Il sistema (θ, θ_0) *è allora isotermo.*

Le espressioni $\Delta_1\theta$, $\Delta_2\theta$ sono i parametri differenziali di Beltrami calcolati in coordinate (φ, ψ); per le proprietà ben note dei parametri differenziali sarà indifferente calcolarli con queste coordinate o colle primitive (u, v): quindi le condizioni (2) valgono in coordinate qualunque.

La questione è così ridotta a trovare le condizioni affinchè le (2) ammettano soluzioni comuni. Ora ponendo

$$\lambda\,(\mathrm{U} + h) = \mathrm{V},$$

le (2) si scrivono

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)^2 = 2\mathrm{V} \quad , \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2} = 0 ;$$

ma questo sistema coincide precisamente, nella forma, col sistema (3) della

mia Nota citata, ed un calcolo identico a quello svolto colà mostra che le condizioni domandate si riducono all'unica

$$\frac{\partial^2 \lg V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \lg V}{\partial \psi^2} = 0 , \tag{3}$$

ossia, sostituendo per V la sua espressione precedente, e introducendo la curvatura totale K della superficie, che è data da

$$2K = - \Delta_2 \lg \lambda , \tag{4}$$

$$2Kh^2 + (4KU - \Delta_2 U)\, h + (2K - \Delta_2 \lg U)\, U^2 = 0 .$$

Siccome U non deve dipendere da h, dovrà aversi, fintantochè h non è nulla,

$$K = 0 \ , \quad 4KU - \Delta_2 U = 0 \ , \quad 2K - \Delta_2 \lg U = 0 ,$$

ossia

$$K = 0 \ , \quad U = \text{cost.}$$

Adunque: *Salvo il caso che il movimento avvenga sopra una superficie sviluppabile sotto l'azione di forze nulle, non è possibile comporre le traiettorie in sistemi ortogonali (isotermi) se non a condizione che la costante delle forze vive sia nulla; affinchè la cosa sia possibile occorre di più che la funzione potenziale verifichi l'eguaglianza*

$$\Delta_2 \lg U = 2K . \tag{5}$$

Queste due condizioni sono anche sufficienti.

Evidentemente la (5) si può intendere scritta in coordinate (u, v) qualunque.

3. Si può osservare che si perviene alla (3) anche per un'altra via. Come si è già ricordato, le traiettorie della superficie data corrispondono alle geodetiche di un'altra superficie di elemento lineare

$$ds'^2 = 2\,(U + h)\, ds^2 :$$

la questione adunque di vedere se sulla prima superficie le traiettorie si possano distribuire in sistemi ortogonali, equivale a quella di riconoscere se sulla seconda si possano formare dei sistemi ortogonali colle geodetiche. Supposto che ciò sia possibile, e riferita la superficie ad un tale sistema ortogonale, la formola di Liouville [1]

$$K = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{G}}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{\varrho_1} \right),$$

che esprime la curvatura totale per l'angolo ω delle linee coordinate e le

[1] V. Bianchi, *Lez. di geom. diff.*, pag. 147.

curvature geodetiche $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\varrho_1}$ delle linee stesse, mostra senz' altro che la superficie è a curvatura nulla. La condizione che si cercava per le traiettorie della data superficie si esprimerà dunque scrivendo che è nulla la curvatura della forma

$$ds'^2 = 2(U + h) ds^2;$$

e se prendiamo per semplicità

$$ds^2 = \lambda (d\varphi^2 + d\psi^2),$$

troviamo come condizione

$$\frac{\partial^2 \lg \lambda (U + h)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lg \lambda (U + h)}{\partial v^2} = 0,$$

che è appunto la (3).

4. Facendo, nella (5), $K = 0$ si ricade nell' equazione che s' era trovata studiando il movimento di un punto nel piano [1]. Del resto anche nel caso che la superficie sia qualunque, si può sempre ritenere che U dipenda da un' equazione della forma (5) col secondo membro nullo; difatti le (2) dicono che per avere U basta integrare l' equazione $\Delta_2 \theta = 0$, dopo di che la U si ottiene dalla $\Delta_1 \theta = 2U$ senza ulteriori quadrature.

Prima di passare alla effettiva ricerca delle traiettorie nei movimenti che andiamo esaminando, notiamo ancora una proprietà che emerge dall' equazione (5) cui deve soddisfare la U. Riferendoci ad un sistema isotermo (φ, ψ), la (5) si può scrivere, in causa della (4):

$$\Delta_2 \lg U + \Delta_2 \lg \lambda = 0.$$

Ora questa equazione è simmetrica rispetto a λ e U, e quindi si ha il seguente notevole teorema di permutabilità:

Se sopra una superficie di elemento lineare

$$ds^2 = \lambda (d\varphi^2 + d\psi^2)$$

avviene un movimento della natura che consideriamo sotto l'azione di forze di potenziale U, *si avrà un movimento analogo sopra una superficie di elemento lineare*

$$d\sigma^2 = U (d\varphi^2 + d\psi^2)$$

sotto l'azione di forze potenziale λ. *Le traiettorie sia dell' una che dell' altra superficie corrispondono alle geodetiche di una stessa superficie il cui elemento lineare è dato da*

$$ds'^2 = 2\lambda U (d\varphi^2 + d\psi^2).$$

5. Vediamo ora come si ottengono le traiettorie quando, essendo nulla la costante delle forze vive, la funzione potenziale soddisfa alla condizione

[1] La formola (7) della mia Nota citata.

che abbiamo trovato, quando, cioè, le traiettorie si possono distribuire in sistemi ortogonali (isotermi). Il calcolo si può svolgere in modo analogo a quello svolto nel caso della superficie piana. Il problema consiste, in sostanza, nel trovare le soluzioni del sistema (2) con $h=0$, cioè le soluzioni comuni alle due equazioni [1]

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}{H^2}=2U\\ &\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{G\frac{\partial\theta}{\partial u}-F\frac{\partial\theta}{\partial v}}{H}+\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{E\frac{\partial\theta}{\partial v}-F\frac{\partial\theta}{\partial u}}{H}=0\,. \end{aligned}\right.$$

Posto

$$(7)\qquad \frac{G\frac{\partial\theta}{\partial u}-F\frac{\partial\theta}{\partial v}}{H}=\theta_1\quad,\quad \frac{E\frac{\partial\theta}{\partial v}-F\frac{\partial\theta}{\partial u}}{H}=\theta_2\,,$$

le equazioni precedenti si trasformano nelle altre

$$(6')\qquad \theta_1\frac{\partial\theta}{\partial u}+\theta_2\frac{\partial\theta}{\partial v}=2HU\quad,\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\frac{\partial\theta_2}{\partial v}=0\,;$$

d'altra parte le (7) si possono anche scrivere

$$(7')\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{E\theta_1+F\theta_2}{H}\quad,\quad \frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{F\theta_1+G\theta_2}{H}\,,$$

ed allora dalle (6′), (7′) eliminando θ si ottiene il sistema seguente, che equivale al sistema (6):

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &E\theta_1^2+2F\,\theta_1\,\theta_2+G\theta_2^2=2H^2U\\ &\frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\frac{\partial\theta_2}{\partial v}=0\\ &\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{F\theta_1+G\theta_2}{H}-\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{E\theta_1+F\theta_2}{H}=0\,. \end{aligned}\right.$$

Una volta calcolate θ_1 e θ_2, dalle (7′) si ha immediatamente θ con una quadratura. Se ora dalla prima delle (8) ricaviamo θ_2 e la sostituiamo nelle due rimanenti, si trovano per θ_1 le equazioni

$$(9)\left\{\begin{aligned} &2\frac{\partial\theta_1}{\partial u}=\pm\sqrt{2GU-\theta_1^2}\left[\frac{-2H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(F\frac{\partial\lg U}{\partial u}-E\frac{\partial\lg U}{\partial v}\right)\right]+\theta_1\frac{\partial\lg(GU)}{\partial u}\\ &2\frac{\partial\theta_1}{\partial v}=\pm\sqrt{2GU-\theta_1^2}\left[\frac{-2H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(G\frac{\partial\lg U}{\partial u}-F\frac{\partial\lg U}{\partial v}\right)\right]+\theta_1\frac{\partial\lg(GU)}{\partial v}, \end{aligned}\right.$$

[1] Un caso particolare di questo sistema si presentò, nel piano, al prof. Morera, nel § IV della sua Nota *Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto materiale su una superficie*; Atti della R. Accad. di Torino, 1881.

dove si sono introdotti per brevità i simboli di Christoffel

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}\quad,\quad\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{-F\frac{\partial G}{\partial v}+2G\frac{\partial F}{\partial v}-G\frac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}.$$

Osserveremo che la condizione d'integrabilità delle (9), tenendo presente che la curvatura K si può esprimere colla formola

$$K=\frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\right],$$

si scrive

$$\Delta_2 \lg U=2K,$$

che è precisamente l'equazione (5) trovata addietro.

Ed ora per integrare le (9) non vi è che da porre

$$\theta_1=\eta\sqrt{2GU},$$

col che le (9) si trasformano in queste altre:

$$\frac{2}{\pm\sqrt{1-\eta^2}}\frac{\partial\eta}{\partial u}=-\frac{2H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(F\frac{\partial \lg U}{\partial u}-E\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)$$

$$\frac{2}{\pm\sqrt{1-\eta^2}}\frac{\partial\eta}{\partial v}=-\frac{2H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(G\frac{\partial \lg U}{\partial u}-F\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right);$$

di qui integrando si ha

$$\pm \operatorname{arcsen}\eta=a+P,$$

dove a è una costante arbitraria, ed inoltre si è posto

$$2P=\int\left\{\left[\frac{-2H}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(F\frac{\partial \lg U}{\partial u}-E\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)\right]du+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{-2H}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{H}\left(G\frac{\partial \lg U}{\partial u}-F\frac{\partial \lg U}{\partial v}\right)\right]dv\right\}.$$

Si ha dunque

$$\eta=\pm\operatorname{sen}(a+P)$$

e quindi

$$\theta_1=\pm\sqrt{2GU}\operatorname{sen}(a+P).$$

Nota θ_1, la prima delle (8) ci fornisce θ_2:

$$\theta_2=\frac{\pm\sqrt{2GU}}{G}[-F\operatorname{sen}(a+P)+H\cos(a+P)],$$

ed infine dalle (7′) abbiamo

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u}=\dfrac{\pm\sqrt{2GU}}{G}\,[H\,\mathrm{sen}\,(a+P)+F\cos(a+P)] \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v}=\pm\sqrt{2GU}\cos(a+P)\,, \end{cases}$$

dalle quali otteniamo θ con una quadratura.

Si può dare a queste equazioni un' altra forma introducendo l' angolo ω delle linee coordinate. Si ha infatti

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}\ ,\quad \mathrm{sen}\,\omega=\frac{H}{\sqrt{EG}}\,,$$

onde

$$H\,\mathrm{sen}\,(a+P)+F\cos(a+P)=\sqrt{EG}\cos(a+P-\omega).$$

Le (10) diventano quindi

$$(10')\quad \frac{\partial\theta}{\partial u}=\pm\sqrt{2EU}\cos(a+P-\omega)\quad ,\quad \frac{\partial\theta}{\partial v}=\pm\sqrt{2GU}\cos(a+P)\,.$$

Il confronto di queste formole e dell' espressione di P colle analoghe che si son trovate nel piano mostra che queste rientrano in quelle generali ora ottenute.

6. I sistemi ortogonali isotermi di cui trattiamo, costituiti di sole traiettorie del punto, si avranno dunque, come si sa, associando all' equazione $\theta(u\,,v\,,a)=\mathrm{cost.}$ (con a fissa una qualunque) l' altra $\dfrac{\partial\theta}{\partial a}=\mathrm{cost.}$ [1]. Facendo poi percorrere ad a tutti i valori, quest' ultima equazione rappresenta tutte le traiettorie del punto.

Ma anche qui vi sarà da fare la stessa osservazione che già si fece nel caso del piano, che, cioè, anche l' altra equazione $\theta(u\,,v\,,a)=\mathrm{cost.}$ deve rappresentare le traiettorie [2]. La cosa si verifica senz' altro sulle nostre equazioni; poichè se scriviamo distesamente le equazioni θ cost., $\dfrac{\partial\theta}{\partial a}=\mathrm{cost.}$, otteniamo, per le (10′):

$$\int\Big\{\sqrt{EU}\cos(a+P-\omega)\,du+\sqrt{GU}\cos(a+P)\,dv\Big\}=b$$
$$\int\Big\{\sqrt{EU}\,\mathrm{sen}\,(a'+P-\omega)\,du+\sqrt{GU}\,\mathrm{sen}\,(a'+P)\,dv\Big\}=b',$$

[1] L' ortogonalità dei sistemi $\theta=\mathrm{cost.}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial a}=\mathrm{cost.}$ risulta subito direttamente osservando che la derivazione, rispetto ad a, dell' equazione $\Delta_1\theta=2U$ a cui soddisfa θ, conduce alla relazione $\nabla\left(\theta\,,\dfrac{\partial\theta}{\partial a}\right)=0$, dove ∇ indica il parametro differenziale misto di Beltrami; e questa relazione esprime appunto l' ortogonalità dei due sistemi considerati.

[2] Nota citata, n. 5.

e dalla seconda si passa alla prima colla sostituzione

$$a' = a + \frac{\pi}{2} \quad , \quad b' = -b$$

In conclusione si ha: *Le condizioni, affinchè nel movimento di un punto su una superficie le* ∞^2 *traiettorie corrispondenti ad un medesimo valore della costante delle forze vive si possano distribuire in sistemi ortogonali, sono che la costante delle forze vive sia nulla (tolto il caso che il movimento avvenga su una sviluppabile con forze nulle), e la funzione potenziale soddisfi all' equazione*

$$\Delta_2 \lg U = 2K ;$$

le traiettorie si ottengono allora con due sole quadrature, ed i sistemi ortogonali a cui danno luogo sono isotermi.

Matematica. — *Contributo alla teoria degli insiemi.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio U. DINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Alcune esperienze sull'arco cantante di Duddel.* Nota di M. ASCOLI e R. MANZETTI, presentata dal Socio BLASERNA.

Il Janet (1) ha proposto recentemente lo schema dell'arco cantante di Duddel, come un metodo per la determinazione dei piccoli coefficienti di autoinduzione. Se nel circuito derivato sull'arco e contenente la capacità e l'autoinduzione è noto il valore della capacità, dell'intensità di corrente, e della differenza di potenziale agli estremi dell'autoinduzione e se si ammette la condizione di risonanza si ha

$$L = C \frac{E^2}{I^2} \cdot$$

Ci siamo occupati di esaminare entro quali condizioni questo metodo potesse essere adottato nella pratica; ed avendo osservato delle divergenze troppo forti fra i valori veri di L e quelli misurati con questo metodo, ne abbiamo ricercato le ragioni.

Una prima quistione che si presenta in queste misure è quella degli istrumenti da adoperarsi per misurare l'intensità di corrente e la differenza di potenziali. Nel solito schema di Peuckert (2) si posero in serie un con-

(1) Comptes Rendus, 1902.
(2) E. T. Z. 1901.

densatore di 6,96 m. f., un elettrodinamometro con coefficiente di autoinduzione di $1,080.10^{-3}$ henry, un amperometro termico Hartmann e Braun, ed un amperometro Hummel a falce avente l'avvolgimento sopra una bobina metallica.

Si ottennero i seguenti risultati per diversi valori della corrente oscillante del circuito derivato.

Amp. Termico	Elettrodin.	Amp. Hummel
12,0 A.	5,0 A.	2,4 A.
10,5 A.	4,75 A.	2,1 A.
7,0 A.	3,68 A.	1.9 A.

L'elettrodinamometro dà i valori veri della corrente: si vede che le indicazioni degli altri istrumenti sono straordinariamente diverse. Tale comportamento si spiega perfettamente: nell'amperometro termico il filo sottile che si riscalda è percorso da una corrente derivata sopra uno shunt che è di filo molto grosso ed ha una certa autoinduzione. Si capisce che nello shunt aumenta sia la resistenza ohmica per lo skin-effect, sia l'impedenza, quindi il filo sottile è percorso da una corrente maggiore della normale, e le indicazioni dello strumento sono maggiori del vero.

Nell'amperometro Hummel non shuntato, le correnti di Foucault che si generano nella bobina metallica assorbono la più gran parte dell'energia e l'istrumento dà indicazioni minori del vero.

Per ciò che riguarda i potenziali è esatto un voltmetro elettrostatico Carpentier, mentre dà indicazioni minori del vero un voltometro a filo caldo.

Si possono quindi adottare in queste misure solo l'elettrodinamometro e il voltmetro elettrostatico.

Il coefficiente di induzione da misurarsi era quello dell'ettrodinamometro.

Per ottenere l'arco fischiante era preferibile questo metodo: Si cominciava a produrre l'arco molto corto e molto intenso; poi si diminuiva con continuità la corrente con un reostato a liquido che era posto in serie coll'arco, fino ad avere il suono puro cercato. In tali condizioni furono fatte una serie di misure determinando l'intensità di corrente e il potenziale agli estremi dell'elettrodinamometro. Ottenemmo i seguenti risultati:

V	63,2	63,2	65,2	62,7	62,7	60,7	61,0	72,2	72,2	68,5
I	3,83	3,83	3,83	3,83	3,80	3,80	3,70	3,22	3,13	3,13
C	$6,96 . 10^{-6}$	—	—	—	—	—	—	$3,37 . 10^{-6}$		
L (calc.)	$1,89 . 10^{-3}$	1,89	2,02	1,88	1,91	1,89	2,70	1,69	1,80	1,62
L (vero)	$1,080 . 10^{-3}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Si vede subito che il valore di L misurato con questo metodo è ben diverso da quello vero, e le variazioni son tali da non potersi spiegare con errori di misura.

Per avere una ragione di questa divergenza così forte, provammo se essa

poteva essere spiegata col fatto che la resistenza del circuito non era trascurabile. Si avrebbe in tal caso:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

ma è $\omega^2 = \frac{V}{IL}$ onde

$$R^2 = \frac{4L}{C} - \frac{4V^2}{I^2}$$

dalle misure fatte si deduce

$V^2 : I^2 =$	1090	1090	1160	1070	1090	1080	1080	2010	2130	1920
$4L : C =$	620	—	—	—	—	—	—	1280	—	—

Si vede che R^2 è *negativo*. Ciò significa che non è possibile spiegare questo fatto col supporre *non* trascurabile la resistenza ohmica del circuito.

Calcoliamo il valore della capacità supponendo noto il coefficiente di autoinduzione.

Si ottiene in media:

C misurato	$3{,}30 \cdot 10^{-6}$	$1{,}84 \cdot 10^{-6}$
C vero	$6{,}97 \cdot 10^{-6}$	$3{,}37 \cdot 10^{-6}$

Se ne deduce che se le divergenze fra le misure con questo metodo e quelle eseguite con altri metodi (adottando cioè frequenze più basse) si dovessero ascrivere a variazioni di capacità per la variabilità della costante dielettrica della carta paraffinata del condensatore, essa dovrebbe diminuire colla frequenza. Ora tutte le esperienze fatte sopra diverse sostanze, vetro, ebanite ecc. dimostrano invece che la costante dielettrica cresce col crescere della frequenza, quindi sembra altamente improbabile che questa sia la causa del fatto constatato.

Se ne può concludere che, analogamente alle esperienze Righi [1], anche il circuito derivato all'arco cantante non si comporta come un circuito percorso da correnti alternate col periodo determinato dalle costanti del circuito, e che le divergenze non si possono spiegare nè colla variazione delle costanti del circuito stesso per effetto della frequenza, nè col tener conto di un termine trascurato nell'ipotesi Janet (la resistenza del circuito).

Non resta altra ipotesi che la causa del fenomeno sia dovuta alla forma della corrente, o, ciò che è lo stesso, che la corrente non sia data da una oscillazione semplice, ma dalla sovrapposizione di almeno due oscillazioni semplici; ed abbiamo allora ricercato se lo stroboscopio ci permettesse una tale analisi.

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1902.

Si abbia un disco di circa 25 cm. di diametro diviso in 16 settori alternativamente colorati in bianco e nero; il disco ruoti con una velocità variabile fino a circa 50 giri al secondo.

Allorquando il disco rotante viene illuminato colla luce di un arco cantante, si può osservare questo fenomeno: In determinate condizioni di velocità si vede il disco come fermo, e composto da settori alternativamente grigio chiari e grigio scuri. Il numero dei settori non è lo stesso di quelli disegnati nel disco come nella ordinaria esperienza stroboscopica con un arco a corrente alternata, ma un numero multiplo di essi, ed il multiplo varia a seconda della velocità del disco ed a seconda delle condizioni dell'arco.

L'esperienza era condotta così:

Si faceva ruotare il disco con velocità approssimativamente uniforme: si portavano a contatto i carboni dell'arco, e poi si allontanavano gradatamente in modo da produrre il fischio. Seguitando ad allungare l'arco comparivano man mano sul disco i settori secondo diversi multipli generalmente di 2 e 6, poi si seguitava a sentire il fischio ancora per un certo tratto, ed infine cessava anche il suono. Oppure:

Si manteneva costante la velocità del disco e la lunghezza dell'arco, e si faceva variare con continuità l'intensità della corrente: anche in questo caso si otteneva il fenomeno sopra descritto.

L'esperienza era nettissimamente visibile.

La spiegazione del fenomeno stroboscopico impreveduto non poteva essere data dalla supposizione di una sola vibrazione luminosa esistente nell'arco. Pensammo quindi di verificare sperimentalmente con lo stroboscopio stesso se vi fossero 2 o più velocità del disco per cui fossero visibili i settori in numero uguale a quelli esistenti, essendo in tal caso il periodo della oscillazione luminosa uguale al periodo di riapparizione in un punto di uno dei settori.

E difatti coll'arco nelle condizioni precedentemente dette, per velocità del disco molto piccole (corrispondenti forse a 40-50 alternazioni) si poterono osservare i settori fermi e nello stesso numero di quelli disegnati.

Il fenomeno è ancora nettamente visibile, ma più sbiadito.

Nell'ipotesi che una delle oscillazioni luminose avesse il periodo determinato dalle costanti del circuito, cercammo osservare di nuovo il disco fermo crescendo la velocità. Per osservarlo però (non potendo giugere col disco a quella frequenza) si dovette diminuire la frequenza dell'oscillazione propria del circuito introducendo nel circuito derivato un'autoinduzione maggiore, da 2-3 10^{-3} henry, ed una capacità di circa 40 mf. (era allora $n = 300$ circa).

In tali condizioni il fenomeno si ebbe nettissimo.

Aumentando gradatamente la velocità del disco e mantenendo costanti le

condizioni dell'arco, si osservavano ad un primo istante i settori nello stesso numero, poi i multipli successivamente crescenti da un numero elevato fino al doppio dei settori disegnati, poi di nuovo i multipli crescenti, ed infine i settori di nuovo fermi nello stesso numero. In questo ultimo caso i settori avevano una differenza di tinta straordinariamente marcata e vi poteva mantenere questo effetto (restando costante la velocita) anche variando sensibilmente le condizioni dell'arco, mentre nella prima porzione la più piccola variazione delle condizioni dell'arco produceva la sparizione del fenomeno.

Che una delle oscillazioni, la più bassa nelle nostre esperienze, dipendesse esclusivamente dall'arco, poteva essere dimostrato collo stesso stroboscopio. Se si illumina il disco girante a bassa velocità con l'arco a corrente continua (essendo escluso da un interruttore *bipolare* il circuito derivato) il disco si osserva solo uniformemente grigio.

Ma se si comunica all'arco un impulso iniziale p. es. tenendo aperto il circuito derivato con un interruttore *semplice*, allora l'arco vibra per proprio conto e si osserva allo stroboscopio il fenomeno solito. Però non si osservano mai i multipli, ciò che indica non esservi la vibrazione dell'altro circuito come nel caso precedente.

Il fenomeno è visibile, ma relativamente pallido.

In queste esperienze preliminari non abbiamo potuto eseguire delle misure per sapere entro quale approssimazione la oscillazione più rapida coincidesse col periodo proprio del circuito, e dentro quali limiti variasse quella più lenta, riserbandoci di farlo in appresso. Si può ritenere però assodato sperimentalmente, che nel fenomeno dell'arco di Duddel siamo in presenza di almeno due oscillazioni luminose e quindi sonore ed elettriche di diverso periodo.

Una di periodo più basso, che diremo propria dell'arco, che dipende essenzialmente dalle condizioni di questo e cioè dall'intensità di corrente, dalla natura dei carboni, dalla lunghezza, e molto probabilmente anche dalle condizioni del circuito derivato che influisce per effetto della sua corrente che si scarica attraverso l'arco; un'altra di periodo più elevato che dipende dalle costanti del circuito derivato.

È semplice allora la spiegazione del fenomeno.

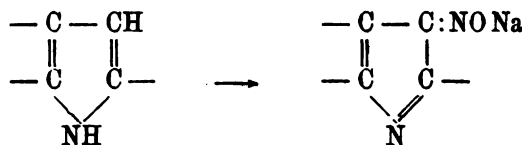
Si hanno due sistemi che hanno ognuno un periodo di oscillazione propria, e corrispondentemente a questi si ha oscillazione di corrente, oscillazione di intensità luminosa e vibrazione sonora comunicata all'aria circostante. Non abbiamo mezzi sperimentali (a meno di non descrivere la curva della intensità) di distinguere i due diversi periodi nella corrente. Lo stroboscopio invece ci dà il mezzo di separare le due oscillazioni componenti dell'intensità luminosa. Probabilmente dei metodi acustici permetterebbero di analizzare i suoni elementari.

Si potrebbe estendere questa ipotesi non solo all'arco di Duddel, ma anche agli altri metodi con cui si sono ottenuti fenomeni sonori, p. es. alle fiamme del Rühmer e alle scariche nei tubi a gas rarefatto del Righi, dappoichè le esperienze di quest'ultimo non sono in contraddizione con essa, anzi se ne possono ritenere una conferma.

Meritano una discussione analitica più accurata i fenomeni stroboscopici che abbiamo più sopra semplicemente descritto: ed è quanto faremo in una prossima Nota.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati del pirrolo.* Nota di A. Angeli, F. Angelico ed E. Calvello (1), presentata dal Socio Ciamician.

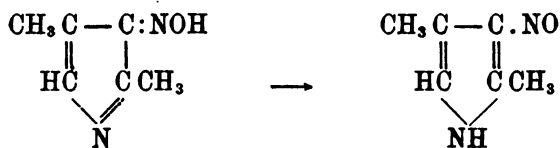
Le ricerche che abbiamo eseguite sopra i nitrosoindoli e nitrosopirroli hanno confermato pienamente l'esattezza delle vedute che noi abbiamo esposte tre anni or sono sopra la struttura del nitrosofenilindolo di E. Fischer, l'unico composto di questa classe che fino allora era noto. Proseguendo i nostri studî sopra queste sostanze, noi abbiamo stabilito un metodo generale che permette di preparare con ottimi rendimenti i nitrosoindoli ed i nitrosopirroli, ed in tal modo ci è stato possibile studiare il comportamento di questi interessanti composti e di porre in rilievo anche l'analogia che presentano con i nitrosofenoli. Come abbiamo più volte accennato, solamente quegli indoli e quei pirroli che hanno libero un atomo in posizione β possono venir trasformati nei corrispondenti nitrosocomposti (2). Operando con nitrito di amile ed alcoolato sodico, si ottengono direttamente i sali sodici, ai quali con grande probabilità spetta la struttura:

```
—C—CH              —C—C:NONa
 ‖  ‖               ‖  |
—C  C—     ——→     —C  C—
  \/                 \//
  NH                  N
```

Il nitrosofenilindolo ed il nitrosotrifenilpirrolo che si pongono in libertà per mezzo dell'anidride carbonica o dell'acido acetico sono colorati in giallo; giallo è pure il nitrosometilindolo; però la soluzione cloroformica di questa sostanza, specialmente a caldo, possiede una colorazione che tende al verdognolo.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

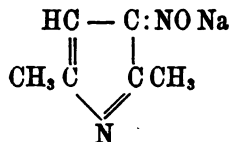
(2) Questa reazione si può anche utilizzare per stabilire la struttura di alcuni pirroli. In tal modo si potrebbe, per esempio, subito decidere se l'emopirrolo di Nencki (Ber. XXXIV, 1687) sia da considerarsi come un isobutilpirrolo ovvero come un metilpropilpirrolo.

Il pirrolo ed i pirroli sostituiti con radicali alifatici forniscono del pari con tutta facilità i sali sodici dei nitrosoderivati; così abbiamo preparato i sali del nitrosopirrolo, del α-α dimetilpirrolo e del dimetilpirrolo asimmetrico. Tali nitrosopirroli, allo stato libero, sono instabilissimi; se però si decompone con le volute cautele il sale sodico del dimetilpirrolo asimmetrico si nota un fatto interessante; ponendo uno strato di etere sopra una soluzione acquosa e diluita del sale sodico (colorata in giallo) e quindi si acidifica con acido solforico diluito, l'etere assume una bella colorazione verde, che poco a poco scompare. Ciò dimostra che l'isonitrosopirrolo che si pone in libertà assume la forma di un vero nitrosoderivato

```
CH₃C — C:NOH               CH₃C — C.NO
   ‖    |                     ‖    ‖
  HC    CCH₃      ——→        HC    CCH₃
    \  //                      \  /
     N                          NH
```

e come tale è colorato in verde.

Alquanto diverso è il comportamento dei nitrosoindoli da quello dei nitrosopirroli rispetto all'idrossilammina. I primi infatti non vengono decomposti da questo reattivo, mentre invece le soluzioni dei sali dei nitrosopirroli vengono facilmente scolorate.

In tal modo, partendo p. e. dal sale sodico

```
      HC — C:NONa
      ‖    |
  CH₃C     CCH₃
      \  //
        N
```

si ottiene un prodotto il quale con tutta probabilità è da considerarsi come la triossima

$$CH_3.C(NOH).CH_2.C(NOH).C(NOH).CH_3.$$

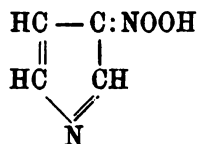
Come tale fornisce un derivato tribenzoilico.

Questa reazione è perfettamente analoga a quella scoperta dal professore Ciamician e che permette di trasformare i pirroli nelle diossime dei γ-dichetoni.

Un'altra differenza fra nitrosoindoli e nitrosopirroli si rende manifesta quando si sottopongano all'azione dei mezzi ossidanti. I primi infatti, come noi abbiamo trovato, in modo analogo a quanto fanno i nitrosofenoli, forniscono i corrispondenti nitroderivati. I nitrosopirroli invece, sottoposti allo stesso trattamento, subiscono una decomposizione profonda che non ci ha permesso di arrivare a prodotti definiti. Giovandoci però di un'altra reazione

ci è stato possibile ottenere sostanze le quali molto probabilmente sono da considerarsi come i sali dei β-nitropirroli. A questo scopo abbiamo impiegato lo stesso metodo che, anni addietro, ha condotto uno di noi alla scoperta della nitroidrossilammina; abbiamo fatto reagire sopra il pirrolo il nitrato di etile in presenza di sodio metallico. Si ottiene così una polvere cristallina, colorata in giallo bruno, che si scioglie nell'acqua con colorazione giallo-aranciato e fornisce precipitati del pari colorati con le soluzioni dei metalli pesanti.

Nel vuoto si conserva bene; invece quando è secco, all'aria oppure nell'essiccatore, dopo qualche minuto si infiamma spontaneamente e deflagra come la polvere pirica. Il sale d'argento, per riscaldamento, esplode facilmente e con grande violenza. In questa reazione il pirrolo si comporta in modo analogo a quanto Thiele [1] ha trovato per il ciclopentadiene ed il nuovo composto, con tutta probabilità è da riguardarsi come il sale sodico dell'acido pirrolnitronico

```
HC — C:NOOH
||   |
HC   CH
  \ //
   N
```

Nella « Gazzetta chimica » faremo seguire la descrizione dettagliata delle esperienze che si riferiscono a questa Nota preliminare.

Chimica fisiologica. — *Su un nuovo proteide del cervello.* Nota di C. Ulpiani e G. Lelli, presentata dal Socio Paternò.

Durante una serie di ricerche instituite per preparare il protagone dal cervello onde meglio definire l'individualità chimica di esso, noi ci siamo venuti persuadendo che il protagone non esiste nel cervello allo stato libero, ma si trova legato ad una sostanza proteica.

Dopo un lungo lavoro di orientamento siamo riusciti ad isolare questa combinazione, ad analizzarla e scinderla nei suoi componenti: paranucleina e protagone.

Secondo le ultime vedute dei chimici fisiologi la paranucleina è il tipo più semplice dei proteidi in quanto che in essa il gruppo prostetico legato all'albumina è rappresentato dal solo acido fosforico. Nel paranucleo-protagone questo gruppo prostetico si fa complesso, perchè in esso all'acido fosforico della paranucleina si aggiunge la grande molecola del protagone, cosicchè vengono a trovarsi insieme, fusi in una sola molecola, i rappresentanti

(1) Berliner Berichte, XXXIII, 670.

dei tre grandi gruppi di sostanze che compongono l'organismo animale, ossia, un'albumina, i grassi della lecitina, della cerebrina e della cerasina, gli zuccheri riduttori dei cerebrosidi.

L'esistenza di simili enormi complessi molecolari è già stata intravista: Walter (1), riprendendo lo studio dell'Ittulina, vitellina scoperta nelle uova di salmone da Gobley (2), discute la possibilità che l'Ittulina sia una combinazione del protagone colla para-nucleina; ponendo a digerire col succo gastrico artificiale la Ittulina egli trova nei prodotti di digestione oltrechè la para-nucleina anche acidi grassi e sostanze riducenti, e sospetta che la para-nucleina sia legata al protagone, ma in seguito non avendo potuto isolare il protagone e d'altra parte avendo trovato nella para-nucleina una sostanza riducente lascia irresoluta la questione.

In quanto al protagone, che esso sia un individuo chimico definito è ormai fuor di dubbio. Questo interessante composto fu per la prima volta ottenuto da Liebreich (3) che gli diede la formula $C^{116} H^{241} N^4 PO^{22}$. Hoppe Seyler (4), Diakonon (5) e Strecker (6) ritennero che fosse una mescolanza di cerebrina e lecitina; però Gamgee (7) e Blankenhorn confermarono i risultati di Liebreich e diedero la formula $C^{160} H^{308} N^5 PO^{35}$ e più tardi Baumstark (8), Kossel e Fraytag hanno tutti contribuito a stabilire che il protagone è una sostanza unica: solo Thudichum (9) si è ostinato a combatterne l'esistenza.

Ormai, secondo tutti gli autori il protagone è la combinazione della lecitina con i cerebrosidi: cerebrina, cerasina, encefalica, corpi di composizione molto simile, separabili per mezzo della cristallizzazione frazionata delle soluzioni alcooliche calde e formati da acidi grassi e zuccheri.

Schulze (10) in una recentissima Memoria è riuscito ad identificare nella cerebrina la galattosamina.

Nelle nostre ricerche per l'estrazione del protagone dal cervello ci siamo serviti del metodo di Gamgee e Blankenhorn che ci è sembrato il migliore.

Due cervelli di cavallo liberati per quanto è stato possibile dalle meningi e dal sangue, sono stati spappolati in alcool ad 85 e tenuti per dodici ore ad una temperatura di 45°. Dopo di che si è filtrato per raffred-

(1) Walter, H. S. Deutschephis. Chem, 15, pag. 477-494.
(2) Gobley, Journ. de Pharm. et de Chimie, III° serie, T. XVII, pag. 401.
(3) Liebreich, Ann. Chem. u. Pharm. B. CXXXIV, pag. 2944.
(4) Hoppe Seyler, Med. chem. Untersuch. Heft. 2, pag. 220.
(5) Diakonon, H. S. Med. chem. Untersuch., Heft. 2, pag. 221.
(6) Strecker, Ann. der Chem. und Pharm., Bd. 72, pag. 77.
(7) Gamgee e Blackenorhn, Zeitschr. phys. Chem., III, pag. 260-283.
(8) Baumstark, H. S. XVII, pag. 430.
(9) Thudicum, Journal für Prak. Chem. 25. pag. 19.
(10) Id., l. cit. 53, pag. 49.

damento a 0° si è depositato in fiocchi bianchi il protagone; in questo modo si sono fatte estrazioni fino a che si sono avute convenienti quantità di prodotto che sono state tutte insieme riunite e spappolate in etere per togliere le colesterine e le lecitine mescolate, quindi ricristallizzate dall' alcool ad 85 a 45°.

In questa preparazione abbiamo potuto ben conoscere il protagone; lo abbiamo analizzato ottenendo risultati concordanti con quelli di Gamgee e Blakenhorn, lo abbiamo scisso nei suoi componenti ottenendo la cerebrina da cui per cristallizzazioni frazionate si è separata la cerasina, identificando la prima col potere riducente del suo zucchero, e la seconda che era in poca quantità, dal punto di fusione; abbiamo inoltre studiato le proprietà fisiche e chimiche del protagone e fra esse ha fermato la nostra attenzione la sua estrema solubilità nel cloroformio che prima nessuno aveva avvertito.

Da esse soluzioni il protagone è precipitato dall' acetone, dall' etere acetico, dall'alcool, quindi abbiamo pensato a servirci di queste proprietà per un nuovo metodo di estrazione.

Anche la lecitina è solubile in cloroformio, ed in precedenti studî uno di noi ha applicata questa sua solubilità all'estrazione diretta dei tuorli di uovo servendosi come precipitante dell'acetone.

Essa non è precipitata al contrario del protagone nè dall'alcool, nè dall'etere acetico, proprietà utilissima per separare il protagone dalla lecitina; infatti, in seguito a ciò, nelle nostre preparazioni del protagone dal cervello, escluso l' alcool perchè lo scioglie abbastanza, ci siamo serviti per precipitare le soluzioni cloroformiche di protagone dell' etere acetico che, lasciando in soluzione i grassi, le colesterine e, come sopra si è detto, le lecitine insolubilizza totalmente il protagone.

In questa preparazione col cloroformio, contro la nostra aspettazione, invece che il protagone abbiamo ottenuto un composto che filtrato e lavato con etere acetico, è divenuto insolubile in tutti i solventi organici ed anche nello stesso cloroformio in cui prima era tenuto probabilmente in soluzione dai grassi, dalle colesterine e dalle lecitine.

Preparazione del paranucleo-protagone.

I cervelli di cavallo liberati dalle meningi e dal sangue vengono spappolati in cloroformio col quale il cervello forma una amalgama che solo dopo molti giorni lascia separare un denso e limpido strato di cloroformio. (Nelle nostre ultime preparazioni abbiamo potuto far subito separare quasi tutto il cloroformio senza che si alterasse menomamente la sostanza mediante riscaldamento a 45°).

Il cloroformio filtrato viene trattato con circa lo stesso volume di etere acetico e l'abbondante precipitato così ottenuto, filtrato, viene spappolato in

etere, filtrato di nuovo e tenuto ad esaurire in Soxlet con etere e poi con cloroformio. Il prodotto è affatto insolubile in questi solventi; seccato nel vuoto su acido solforico e polverizzato, ha dato all'analisi i seguenti risultati:
gr. 0,2762 di sostanza bruciata con cromato di piombo, ossido di rame e spirale di rame hanno dato: gr. 0,2174 di H^2O e gr. 0,6158 di CO^2.

C °/₀ 60,79 H °/₀ 8,74

gr. 0,4208 di sostanza bruciati con ossido di rame e spirale di rame ridotta han dato alla pressione di 750 mm. ed a una temperatura di 24,3 Cmc di N23,6 corrispondenti a gr. 0,0261.

N °/₀ 6,2

gr. 0,9414 bruciati con HNO^3 in tubo chiuso a 2008 han dato gr. 0,0548 di $Mg^2 P^2 O^7$.

Ph °/₀ 1,62.

Demolizione del paranucleo-protagone con alcool.

Il resto della sostanza è stata trattata con alcool ad 85 e 45° e dopo raffreddamento a 0° filtrato. Dopo questo trattamento con alcool la sostanza che prima era insolubile in cloroformio, è divenuta in gran parte solubile in questo solvente. Infatti tenuta in Soxlet con cloroformio, solo in parte è rimasta insolubile, la maggior parte si è disciolta. La soluzione cloroformica precipita con alcool, etere acetico, acetone; precipitata con etere acetico, ha dato una sostanza bianca, le cui proprietà fisiche e chimiche erano identiche a quelle del protagone.
gr. 0,2510 della sostanza secca bruciati con ossido di rame e spirale di rame ridotta hanno dato gr. 0,2363 di H^2O gr. 0,6134 di CO^2.

C °/₀ 66,67 H °/₀ 10,45

gr. 0,2197 bruciati come sopra hanno dato gr. 0,2086 di H^2O gr. 0,5372 di CO^2.

C °/₀ 66,67 H 10,54

gr. 0,3466 di sostanza bruciati con ossido di rame e spirale di rame ridotta hanno dato a una pressione di 756 mm. e ad una temperatura di 21,5 Cmc di N8,1 corrispondenti a gr. 0,00916 N °/₀ = 2,64.
gr. 0,2845 bruciati come sopra hanno dato a una pressione di 751 mm. e ad una temperatura di 19 gr. 6,3 di N corrispondenti a gr. 0,007156.

N °/₀ 2,51

gr. 0,8649 bruciati con HNO^3 in tubo chiuso a 200° hanno dato gr. 0,0432 di $Mg^2 P^2 O^7$.

Ph °/₀ 1,38

gr. 0,4274 bruciati con HNO^3 in tubo chiuso a 200° han dato gr. 0,0192 di $Mg^2 \cdot P^2O^7$.

Ph °/₀ 1,24.

Queste analisi sono abbastanza concordanti con quelle di Liebreich e di Gamgee e Blanknhorn. Infatti:

	1	2	Liebreich	Gamgee e Blanknhorn
C	66,67	66,67	66,74	66,39
H	10,45	10,54	11,74	10,69
N	2,51	2,64	2,80	2,30
Ph	1,38	1,24	1,23	1,06

In una porzione di questo protagone abbiamo identificato il gruppo idrato di carbonio col metodo di Noll [1] bollito per 20 ore con soluzione di HCl al 7,5 °/₀₀, il filtrato riduceva fortemente il liquido di Foeling.

Identificazione della Paranucleina.

Quella parte della sostanza primitiva che dopo il trattamento con alcool era rimasta indisciolta nel cloroformio, dopo esserci assicurati che più nulla cedeva a questo solvente è stata seccata su H^2SO^4 nel moto.

Questa sostanza così seccata, si polverizza benissimo, non si scioglie in alcun solvente organico, solo in alcali diluiti e da queste soluzioni è riprecipitata dagli acidi diluiti; analizzata han dato i seguenti risultati:

gr. 0,2359 bruciati con cromato di piombo, ossido di rame e spirale di rame han dato gr. 0,1638 di H^2O, gr. 0,4688 di CO^2.

C °/₀ 54,19 H °/₀ + 7,71

gr. 0,3220 bruciati come sopra han dato gr. 0,2240 di H^2O gr. 0,6418 di CO_2.

C °/₀ 64,66 H °/₀ 57,72

gr. 0,2170 bruciati con CuO e spirale di rame ridotta han dato a mm. 751 e 14° Cmc 21,6 di N corrispondenti a gr. 0,0251.

N °/₀ = 11,57

gr. 0,1936 bruciati come sopra hanno dato ad una temperatura di 18 e ad una pressione di 755 mm. cmc 19 di N corrispondenti a gr. 0,02179.

N °/₀ = 11,25

gr. 0,989 di sostanza bruciati con carbonato sodico-potassico e nitro han dato gr. 0,0662 di $Mg^2P^2O^7$.

Ph °/₀ 1,86

[1] Noll H. S. Zeitsch. physiol. Chem. 27, pag. 370.

gr. 0,9006 di sostanza bruciati con carbonato sodico-potassico e nitro han dato g. 0,0614 di $Mg^2P^2O^7$.

$$Ph \% = 1,90$$

Le proprietà di solubilità sopra accennate, il contener fosforo, l'alto contenuto in N ci hanno fatto pensare alla possibilità che questa sostanza fosse una nucleina o una paranucleina; si è fatta quindi la prova della pepsina, poichè è caratteristico di queste sostanze, di non essere digerite dal succo gastrico artificiale. Infatti gr. 1,6256 di sostanza tenuti per 48 ore in succo gastrico artificiale sono rimasti inalterati. Ci restava a vedere se era una paranucleina od una nucleina. Queste due sostanze proteiche differiscono in questo, che le nucleine danno nella loro demolizione basi xantiniche che mancano alle paranucleine. Abbiamo ricercato queste basi col metodo di Kossel.

La sostanza è stata tenuta a bollire per 4 ore con H^2SO^4 al $^{10}/_0$, quindi si è filtrato e si è trattato il liquido con acetato basico di piombo che fa precipitare i fosfati e le sostanze proteiche, si è allontanato l'eccesso del sale mediante H^2S, e il filtrato concentrato è stato trattrato con NH^3 e soluzione ammoniacale di NO^3Ag, col quale se fossero state presenti le basi xantiniche avrebbero dovuto precipitare allo stato di sali doppi. Il risultato è stato negativo. Era una paranucleina. Allora abbiamo voluto scinderla nei componenti, ed un'ultima porzione di questa sostanza è stata tenuta a bollire con potassa diluita e dopo acidificazione con HNO_3 si è filtrato. Nel liquido con molibdato ammonico si è trovato abbondante quantità di acido fosforico.

Nella parte lasciata indisciolta dalla potassa abbiamo tentato le reazioni caratteristiche delle albumine, ed il risultato è stato nettissimo tanto con quella di Millon quanto con quella del biureto.

Concludendo, a noi sembra chiarissimo emergere dai fatti predetti che nel cervello si trova il protagone non allo stato libero, ma combinato con una paranucleina; e la dimostrazione sta nel fatto che il nostro composto, che chiameremo paranucleo-protagone, mentre prima del trattamento con alcool non cede protagone al cloroformio, che è un buonissimo solvente di esso protagone, di poi, scisso dall'alcool, lo cede in abbondante quantità.

Nè questo potere scindente dall'alcool di fronte a questi complessi si trova ora per la prima volta; ma un fatto analogo avviene per la lecito-albumina, e di esso si sono serviti Hoppe Seyler (1) ed Osborne (2) per dimostrarne l'esistenza. Abbiamo rifatto le esperienze di Hoppe Seyler; abbiamo tenuti tre tuorli d'uovo per un giorno ad esaurire in Soxlet, con etere, li abbiamo seccati e polverizzati e di nuovo li abbiamo tenuti per un giorno ad esau-

(1) Hoppe-Seyler, Med. Chem. Untersuch. Heft 2, pag. 215.
(2) Osborne, Journal of the Am. Chem. Soc. pag. 413-422.

rire con etere; trattati ora con alcool hanno ceduto ad esso abbondante quantità di lecitina che abbiamo precipitato con Cd Cl^2 ed identificato.

Abbiamo provato lo stesso trattamento con altri tre tuorli d'uovo usando invece dell'etere il cloroformio, ed abbiamo ottenuto i medesimi risultati.

Se il cloroformio e l'etere, nei quali la lecitina è solubilissima, nulla più estraggono dai tuorli con essi esauriti prima del trattamento con alcool, è chiaro che la lecitina che si ottiene dipoi, si trova combinata nell'uovo coll'albumina come ha dimostrato Hoppe-Seyler e recentemente ha confermato Osborne.

Il comportamento e la dimostrazione dell'esistenza delle lecito-albumine sono perfettamente analoghi a quelli del nostro nucleo-protagone.

Cristallografia. — *Le deviazioni minime della luce mediante prismi birifrangenti.* Nota di C. VIOLA, presentata dal Socio BLASERNA.

Consideriamo la deviazione minima della luce per onde piane parallele allo spigolo di un prisma. Quando la deviazione è prodotta da un prisma anisotropo immerso in un mezzo isotropo, essa può avere luogo in generale per onde piane inclinate rispetto alla bisettrice del prisma. E questo è il caso generale, che può avvenire sempre, qualunque sia l'orientazione del prisma per rispetto alle direzioni principali ottiche del cristallo; esso non porta alcuna facilitazione alla determinazione degli indici di rifrazione di un cristallo, e non viene perciò mai utilizzato. Ove all'incontro si vuole raggiungere una certa semplicità, si stabilisce il problema in guisa che il minimo della deviazione luminosa avvenga per l'angolo incidente eguale all'angolo emergente; questo intento non è raggiungibile che per speciale orientazione del prisma o meglio delle bisettrici dell'angolo rifrangente del prisma.

I cristallografi e i fisici si sono occupati spesso dell'orientazione, che deve avere un prisma, per far sì che il minimo della deviazione luminosa per onde piane accada quando l'onda è parallela alla bisettrice interna del prisma birifrangente. Senarmont [1] dimostrò che quest'ultima condizione è verificata, quando una delle due bisettrici del prisma cada in uno degli assi di simetria ottica del cristallo per una data luce. Liebisch [2] pervenne agli stessi risultati di Senarmont, trattando il problema da un punto di vista gene-

[1] H. de Senarmont, *Note sur quelques formules propres à la détermination des trois indices principaux dans les cristaux biréfrangents.* Nouv. Ann. de Math. 1857, XVI, 273. Vedi pure V. v. Lang, *Ueber die Minimum-Ablenkung der Lichtstrohlen durch doppeltbrechende Prismen.* Akademie der Wissensch. Wien, 1858, XXXIII, 155.

[2] Th. Liebisch, *Ueber das Minimum der Ablenkung durch Prismen optisch zweiaxiger Krystalle.* Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1888, 197.

rale. I lavori teorici posteriori [1] hanno poi dimostrato che i risultati ottenuti da Senarmont e Liebisch non sono i soli che ammette il problema. — Oggi si suole esprimere nel modo seguente la condizione, alla quale deve corrispondere l'orientazione del prisma: Se il minimo della deviazione luminosa mediante un prisma anisotropo immerso in un mezzo isotropo per onde parallele allo spigolo del prisma debba aver luogo con l'angolo incidente eguale all'angolo emergente, la bisettrice esterna del prisma deve cadere in uno dei tre piani di simmetria ottica del cristallo, dal quale si è tagliato il prisma.

Eppure possono darsi delle orientazioni del prisma non contemplate nella proposizione testè espressa, presentando anche esse il minimo della deviazione luminosa con l'angolo incidente eguale all'angolo emergente. Queste orientazioni sfuggirono fino ad ora a tutti coloro, che si sono occupati di questo problema; ma esse non sono meno interessanti delle prime.

Lo scopo della presente Nota è di esaurire la questione del minimo della deviazione luminosa con l'intento di ricercare tutte le possibili orientazioni, che può assumere un prisma nel cristallo capace di generare il minimo per angoli incidente ed emergente eguali.

A tale uopo risaliamo alla condizione generale del minimo della deviazione luminosa. In questa bisogna non si potrà a meno di ripetere alcune cose note; ma io cercherò di essere breve, e per maggior speditezza manterrò le notazioni utilizzate nella mia precedente comunicazione, che sono pure quelle di Liebisch.

Con X, Y, Z sono indicati gli assi di simmetria luminosa del cristallo per una data luce, Z′, X′, Y′ esprimono in questo ordine lo spigolo del prisma, la bisettrice interna e la bisettrice esterna dell'angolo rifrangente del prisma. — I coseni di direzione fra i due sistemi ortogonali sono dati dal seguente schema:

	X	Y	Z
X′	α	β	γ
Y′	α_1	β_1	γ_1
Z′	α_2	β_2	γ_2

[1] C. Viola, *Ueber die Minima der Lichtablenkung durch Prismen anisotroper Medien*. Zeitsch. f. Krystall. XXX, 545. — Th. Liebisch, *Ueber das Minimum der Ablenkung durch Prismen optisch zweiaxiger Krystalle*. Neues Jahrb. für Miner. etc. 1900, I, 57. — C. Viola, *Le deviazioni minime della luce mediante prismi di sostanze anisotrope*. R. Accad. d. Lincei, Roma, 1900, I, 196. V. v. Lang, op. cit.

Siano a, b, c le velocità luminose principali del cristallo; e poniamo:

$$\begin{aligned}
L &= (b^2+c^2)\,\alpha^2 + (c^2+a^2)\,\beta^2 + (a^2+b^2)\,\gamma^2 \\
L_1 &= (b^2+c^2)\,\alpha_1{}^2 + (c^2+a^2)\,\beta_1{}^2 + (a^2+b^2)\,\gamma_1{}^2 \\
L_2 &= (b^2+c^2)\,\alpha\,\alpha_1 + (c^2+a^2)\,\beta\,\beta_1 + (a^2+b^2)\,\gamma\,\gamma_1 \\
M &= b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2 \\
M_1 &= b^2c^2\alpha_1{}^2 + c^2a^2\beta_1{}^2 + a^2b^2\gamma_1{}^2 \\
M_2 &= b^2c^2\alpha\,\alpha_1 + c^2a^2\beta\,\beta_1 + a^2b^2\gamma\,\gamma_1
\end{aligned}$$

Il piano perpendicolare allo spigolo del prisma, ossia la base di questo prisma, taglia la superficie delle normali secondo una curva, che noi dobbiamo considerare per la ricerca del minimo della deviazione. — Chiamando con p il vettore e con φ l'angolo, che il vettore fa con l'asse X', l'equazione in coordinate polari di detta curva acquista una grande semplicità, grazie alle convenzioni fatte. Essa è la seguente [1]:

$$(1)\quad p^4 - p^2 \{ L\cos^2\varphi + L_1 \operatorname{sen}^2\varphi + L_2 \operatorname{sen} 2\varphi \} + M\cos^2\varphi + M_1 \operatorname{sen}^2\varphi + M_2 \operatorname{sen} 2\varphi = 0$$

Il vettore p ricavato da questa equazione dà dunque la velocità luminosa dell'onda parallela allo spigolo del prisma, la quale fa con la bisettrice esterna Y' l'angolo φ.

Si noti che p è funzione di φ, e quest'angolo è a sua volta funzione della deviazione luminosa Δ per effetto del prisma.

Noi dunque otterremo dalla (1) il quoziente differenziale

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}$$

derivando dapprima p per rispetto a Δ, e indi Δ per rispetto a φ. La condizione del minimo di Δ, ossia

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = 0$$

riceve con ciò la seguente espressione:

$$(2)\quad p^2 \{ (L_1 - L) \operatorname{sen} 2\varphi + 2 L_2 \cos 2\varphi \} + (M - M_1) \operatorname{sen} 2\varphi - 2 M_2 \cos 2\varphi = 0$$

Quivi si farà $\varphi = 90^\circ$, poichè il minimo deve avere luogo per l'onda parallela alla bisettrice interna del prisma.

Con ciò la condizione generale del minimo di Δ si riduce alla seguente

$$(3)\qquad p^2 L_2 - M_2 = 0$$

[1] C. Viola, op. cit., p. 202.

Ed introducendovi di nuovo i valori di L_2 ed M_2, dati di sopra, essa diviene:

$$(3a)\qquad p^2 = \frac{b^2 c^2 \alpha \alpha_1 + c^2 a^2 \beta \beta_1 + a^2 b^2 . \gamma \gamma_1}{(b^2 + c^2) \alpha \alpha_1 + (c^2 + a^2) \beta \beta_1 + (a^2 + b^2) \gamma \gamma_1}$$

Ecco ora quale aspetto presenta il nostro problema: tutte le volte che la velocità luminosa per l'onda parallela alla bisettrice interna del prisma potrà ricevere il valore, che le viene dato dall' espressione (3a), si verificherà il minimo della deviazione luminosa con l'angolo d' incidenza eguale all' angolo d' emergenza. Ed allora essa velocità potrà essere calcolata mercè della deviazione luminosa $\varDelta$ e dell' angolo rifrangente A del prisma. Infatti essa è proporzionale all' espressione.

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+\varDelta}{2}}.$$

Il problema si riduce dunque a questo: ricercare quando avviene che l'espressione di p dato dalla (3a) sia realmente la velocità della luce, vale a dire sia eguale a quello stesso valore, che si ottiene dalla (1) facendo ivi $\varphi = 90°$.

Alcune soluzioni se ne ricavano immediatamente. Facendo infatti

$$\alpha_1 = 0\,,$$

ed essendo

$$\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1 = 0$$

ossia

$$\beta \beta_1 = - \gamma \gamma_1\,,$$

si avrà dalla (3a):

$$p^2 = \frac{(c^2 a^2 - a^2 b^2) \beta \beta_1}{(c^2 + a^2 - a^2 - b^2) \beta \beta_1} = a^2$$

Altrettanto per $\varphi = 90°$, l'equazione (1) ci offre:

$$p^4 - p^2 L_1 + M_1 = 0\,.$$

Per $\alpha_1 = 0$ è $\beta_1^2 = 1 - \gamma_1^2$, ed allora le due radici dell' ultima equazione sono le seguenti:

$$p^2 = \frac{(c^2 - b^2) \beta_1^2 + (a^2 + b^2)}{2} \pm \frac{(c^2 - b^2) \beta_1^2 - (a^2 - b^2)}{2}$$

ossia, chiamandole con p_1^2 e p_2^2:

$$p_1^2 = (c^2 - b^2) \beta_1^2 + b^2$$
$$p_2^2 = a^2\,.$$

Ecco dunque che per $\alpha_1 = 0$, la soluzione è possibile, poichè il valore che si ottiene per p^2 dalla (3a), è identico a uno dei due che si ottengono dalla (1).

Se in luogo di fare $\alpha_1 = 0$ si facesse $\alpha = 0$, la equazione (3a) offrirebbe $p^2 = a^2$, ma all'opposto l'equazione (1) darebbe due valori per p^2, nessuno dei quali è eguale ad a^2. Da qui si conclude, le soluzioni del problema sono:

$$\left.\begin{array}{ll} & \alpha_1 = 0 \\ \text{ovvero} & \beta_1 = 0 \\ \text{ovvero} & \gamma_1 = 0 \end{array}\right\}$$

Stabilita una di queste condizioni, anche uno o due dei tre coseni α, β, γ possono annullarsi, con che le soluzioni generali acquistano delle espressioni particolareggiate.

Questo modo di trattare il problema ha condotto alla proposizione sopra espressa, che cioè il minimo della deviazione luminosa per onde parallele alla bisettrice interna del prisma avviene tutte le volte che la bisettrice esterna cada in uno dei piani di simmetria ottica del cristallo. E si credeva che con ciò il problema fosse esaurito.

Or bene poniamo il caso generale. Per quali valori di α, β, γ, α_1, β_1 e γ_1 l'espressione data da

$$p^2 = \frac{M_2}{L_2} \tag{3}$$

corrisponde alla velocità dell'onda luminosa parallela alla bisettrice interna del prisma? Chiamiamo in generale con p_1^2 e p_2^2 le due radici dell'equazione (1), e poniamo

$$p_1^2 = \frac{M_2}{L_2}.$$

Facendo nella (1) $\varphi = 0$, si ricaverà come seconda radice di p da questa equazione:

$$p_2^2 = \frac{M_1}{M_2} L_2.$$

Il prodotto di queste due quantità è:

$$p_1^2 p_2^2 = M_1 = b^2 c^2 \alpha_1^2 + c^2 a^2 \beta_1^2 + a^2 b^2 \gamma_1^2$$

Ora questa relazione esprime quanto segue [1]: Subito che la direzione X′ (bisettrice interna del prisma) data dai coseni direttivi α, β, γ è la direzione di polarizzazione dell'onda, la qual onda vien data dai coseni direttivi α_1, β_1, γ_1, la velocità di questa onda acquisterà il valore:

$$p_1^2 = \frac{M_2}{L_2},$$

[1] Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891, p. 322.

ed allora avrà luogo necessariamente per questa onda il minimo della deviazione luminosa. Ogni piano d'onda luminosa ha due velocità e due direzioni di polarizzazione.

L'onda di velocità $\frac{M_2}{L_2}$ ha per direzione di polarizzazione la bisettrice interna del prisma, e l'onda di velocità $\frac{M_1 L_2}{M_2}$ ha per direzione di polarizzazione lo spigolo del prisma.

Riassumiamo tutte le condizioni entro le quali può avere luogo il minimo della deviazione luminosa per onde piane parallele allo spigolo del prisma rifrangente e per angoli incidente ed emergente eguali:

1) *Il minimo della deviazione ha luogo quando la bisettrice esterna del prisma cada in uno dei piani di simmetria ottica del cristallo;*

2) *Il minimo della deviazione ha eziandio luogo quando la bisettrice interna del prisma è la direzione di polarizzazione dell'onda luminosa parallela a questa bisettrice.*

Possiamo arrivare allo stesso risultato per una via sintetica, più breve, anche più comprensiva e non meno rigorosa del metodo analitico fin qui seguito.

Supponiamo per un momento che si tratti di un prisma isotropo, o meglio di un prisma dove l'indice di rifrazione sia costante per tutte le onde parallele allo spigolo del prisma. Girando il piano d'onda attorno allo spigolo del prisma in uno o nell'altro verso, la deviazione rimarrà costante in vicinanza del minimo, ma uscendo da questa posizione, la deviazione aumenterà.

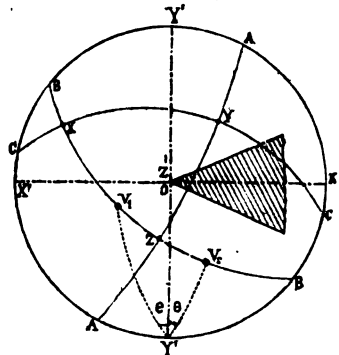
Consideriamo dunque questo aumento della deviazione per il solo effetto della rotazione del piano d'onda attorno allo spigolo del prisma, essendo costante la velocità della luce. D'altra parte se la velocità diminuisce come nei prismi anisotropi; per questa sola ragione la deviazione luminosa diminuirà rimanendo fissa la posizione dell'onda. Se ora l'aumento della deviazione luminosa per una causa è identico alla diminuzione per l'altra causa, avremo il minimo di questa deviazione. Ecco perchè la deviazione minima può avvenire in un prisma anisotropo fuori della posizione mediana; ma in tale posizione del minimo non potrà cadere nè un minimo nè un massimo della velocità luminosa. All'opposto se il minimo della deviazione luminosa deve aver luogo nella posizione mediana, vale a dire per angoli incidente ed emergente eguali, questa dovrà essere eziandio la posizione di un minimo o di una massimo della velocità luminosa.

Io dimostrai questo risultato nella mia precedente Nota (1); esso ci apparisce evidente con una semplice considerazione.

(1) C. Viola, R. Accad. d. Lincei, I, p. 204. Roma 1900.

Il problema della minima deviazione luminosa per angoli incidente ed emergente eguali, si riduce con ciò alla ricerca del minimo o del massimo della velocità luminosa per onde parallele allo spigolo del prisma. Questo nuovo problema si risolve con la curva delle velocità normali, quale sezione della base del prisma con la superficie delle normali. Facendo cadere la bisettrice esterna del prisma in una delle posizioni dei minimi o massimi della velocità luminosa, avremo l'orientazione necessaria per una deviazione luminosa in posizione mediana, vale a dire per angoli incidente ed emergente eguali.

La curva delle velocità normali consiste di due parti interna ed esterna; è noto che essa possiede nel mezzo giro due massimi e due minimi. Ma noi possiamo ricavare questo risultato con una semplice considerazione. Ove il piano della curva delle velocità normali taglia i tre piani di simmetria ottica, devono cadere dei massimi o minimi, perchè in tali luoghi le onde ordinarie sono tangenti alla superficie delle normali, e quindi anche tangente alla detta curva. La quarta posizione dove l'onda è pure tangente alla curva delle normali è caratterizzata da questo, che la proiezione del raggio luminoso sul piano della curva cade nella normale all'onda. Ora questa condi-

zione è verificata se il piano che contiene la normale all'onda, è perpendicolare al piano della curva della velocità; vale a dire la condizione è verificata quando la direzione di polarizzazione dell'onda cade nel piano della curva. E questo è il risultato, che abbiamo sopra trovato analiticamente.

La posizione di questo quarto massimo o minimo ha una proprietà importante, che vogliamo ora rilevare; per mezzo di essa si arriverà alla conclusione che la curva delle velocità normali possiede nel mezzo giro quattro fra massimi e minimi e quattro soltanto.

La figura annessa dà in proiezione stereografica i poli X, Y, Z dei tre assi di simmetria ottica omonimi del cristallo. Nel centro O della proiezione si proietta lo spigolo del prisma, che è la nostra direzione Z'; il piano del disegno è perciò perpendicolare allo spigolo del prisma, e contiene la curva delle velocità normali, che nella figura non è rappresentata.

OX' e OY' sono in tal caso la bisettrice interna ed esterna del prisma. La posizione di questi due assi è tale che OX' dà la direzione di polarizzazione dell'onda normale a OY'.

Avendo il prisma questa orientazione, ne verrà che la minima deviazione luminosa per mezzo di un tal prisma succederà nella posizione mediana cioè per angoli incidente ed emergente eguali.

Siano V_1 e V_2 in proiezione i poli degli assi ottici; e si tirino i cerchi massimi $Y'V_1$ e $Y'V_2$, i quali formano nel loro punto d'incontro l'angolo $2e$. Se OX' deve essere la direzione di polarizzazione dell'onda, la cui normale è OY', dovrà questa direzione OY' dividere per metà l'angolo $2e$, come si trova indicato nella figura. Con ciò è dato anche il mezzo di costruire la posizione di OY' quando siano conosciuti gli assi ottici del cristallo. Da qui risulta pure che vi deve essere sempre una posizione tale OY' che soddisfi a questa condizione, ed una sola.

Dato che sia lo spigolo di un prisma birifrangente (Z' nella figura) e trattisi di tagliare questo prisma con siffatta orientazione, che per risultato si abbia la minima deviazione luminosa per angoli incidente ed emergente eguali, le soluzioni di questo problema sono quattro. Tre di esse sono date dai tre piani di simmetria ottica del cristallo. Nella figura sono segnate queste tre posizioni date dai tre diametri AA, BB, CC. La quarta soluzione è determinata con la posizione degli assi ottici.

Il fenomeno dei massimi e minimi come condizione della minima deviazione di un prisma per angoli incidente ed emergente eguali, trova un certo riscontro nel fenomeno dei massimi e minimi della riflessione totale.

Prendiamo da una parte lo spigolo di un prisma rifrangente, e dall'altra il piano ad esso normale. La riflessione totale in questo piano ha nel mezzo giro due minimi e due massimi precisamente come esistono due minimi e due massimi della velocità luminosa normale allo spigolo. — Tre di essi nell'un caso coincidono con i tre nell'altro caso. La quarta posizione nell'un caso è vicinissima alla quarta posizione nell'altro caso, poichè in entrambi la detta posizione è distinta da questo che la direzione di polarizzazione cade nel piano di sezione normale allo spigolo del prisma (1). Ma intanto per costruire la quarta posizione pel caso della riflessione totale si procederà come si è fatto poc'anzi, con la differenza che in luogo degli assi ottici V_1 e V_2 si assumono gli assi dei raggi. La quarta posizione nel caso della riflessione totale cadrà tanto vicina alla quarta orientazione della bisettrice esterna del prisma nel caso della deviazione minima, quanto sono pure vicini tra di loro gli assi ottici e gli assi dei raggi.

E finalmente vediamo quali sono i valori della velocità luminosa che si ottengono con i due modi di osservazione. Dapprima per le prime tre

(1) C. Viola, Zeitsch. für Krystall. XXXIV, fascicolo III. Bull. d. la Société franc. de Miner. tome XXV, 1902.

posizioni tanto il metodo della riflessione totale quanto il metodo della minima deviazione col prisma danno gli indici principali di rifrazione del cristallo n_p, n_m, n_g. Il metodo della minima deviazione dà anche per la quarta posizione un indice di rifrazione intermedio. Invece il metodo della riflessione totale dà per questa quarta posizione non l'indice di rifrazione dell'onda, ma del raggio luminoso.

Io credo che il problema della minima deviazione luminosa mediante prismi birifrangenti riceva con ciò una soluzione completa.

Patologia Vegetale. — *La bacteriosi della canepa* (1). Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Corrisp. Cuboni.

Nell'estate del 1896 ho dato una descrizione sommaria di una speciale alterazione dello stelo della canepa, caratterizzata da una profonda disorganizzazione dell'epidermide e del tessuto corticale e dalla presenza in seno ai tessuti alterati di zooglee di un microrganismo, i cui caratteri morfobiologici presentavano grandissima analogia col *Bacillus Cubonianus*, che, come è noto, determina delle lesioni specifiche nelle foglie e nei getti erbacei del gelso. Da quell'epoca non mi si è offerta più l'occasione di estendere le mie ricerche intorno a questa bacteriosi della canepa e non mi consta che da altri sia stata oggetto di studio; nè si può tacere che qualche dubbio sia stato sollevato in merito alle specificità di questa manifestazione patologica, derivante dal fatto che i pochi cenni descrittivi circa l'apparenza macroscopica delle lesioni, potevano ingenerare confusione con quelli che produce la grandine: tale incertezza può in pratica avere delle conseguenze tutt'altro che lievi, quando si rifletta alle numerose controversie che possono insorgere nell'apprezzamento o nella verifica dei danni arrecati dalla grandine stessa; d'altra parte la scarsezza del materiale da studio di cui disponevo allora e l'imperfetta conoscenza delle condizioni locali nelle quali erano state rinvenute le piante colpite non permettevano in alcun modo di pronunciarsi intorno alla possibile correlazione fra le lesioni della grandine con queste, aventi carattere infettivo.

Nei giorni scorsi ho avuto occasione di osservare numerose piante di canepa, cresciute in condizioni non molto favorevoli, per imperfetta preparazione del terreno e per semina tardiva, seguita da condizioni climateriche insistentemente sfavorevoli: numerose foglie ed in qualche caso anche la vetta o fiocco della pianta mostravano tracce di un'alterazione che volgarmente viene indicata dai contadini coll'espressione generica di *brusone*, e che un esame

(1) Relazioni e studî della Cattedra Ambulante di Agricoltura per la Provincia di Ferrara.

superficiale può far attribuire al parassitismo di qualche crittogama folicola, dei generi *Phyllosticta* o *Septoria*.

Dette foglie sono cosparse di macchie nere di forma irregolare in corrispondenza delle quali i tessuti fogliari sono disseccati, fragili; esse si iniziano sotto forma di puntini giallognoli ed in pochi giorni possono compromettere gran parte della superficie della foglia; quando venga interessata qualche nervatura la foglia si raggrinza o si accartoccia; la parte periferica della macchia presenta un leggero scoloramento e non mai un'orlatura decisa, come si osserva nelle macchie prodotte dalle suddette crittogame.

Collocando queste foglie sopra dischi di carta bibula, racchiusi in scatole di Petri, dopo poche ore si osserva una leggera tumescenza in quei tratti della pagina inferiore della foglia occupati dalle macchie, e non tardano a comparire delle grosse guttule giallognole che all'esame microscopico si dimostrano formate da colonie pure di diplococchi.

Praticando delle sottili sezioni di foglie, fissate coll'alcool appena staccate dalla pianta, e lasciandole soggiornare per un certo tempo in soluzione diluita di potassa caustica, neutralizzata poscia con acido lattico, senza ricorrere ad alcun processo speciale di colorazione, è facile osservare negli spazi intercellulari, esistenti nei tessuti alterati, fitte colonie di microrganismi, specialmente abbondanti nella parte periferica della macchia sul limite coi tessuti sani. Le più scrupolose ricerche mi hanno permesso di escludere che nei tessuti stessi esistano altre crittogame; conservando le foglie ammalate in camera umida per lo spazio di varî giorni, nulla si sviluppa ad eccezione delle colonie suddette e solo più tardi sulle foglie ormai alterate appaiono le muffe ubiquitarie.

Quando le macchie hanno raggiunto una certa dimensione, i tessuti disseccati si screpolano e si distaccano così da rendere le foglie più o meno bucherellate.

La bacteriosi si rinviene in modo precipuo se non esclusivo nei canepai a sviluppo stentato, specialmente per difettosa preparazione del terreno; essa è frequente nelle piante crescenti in quei tratti di terreno *crudo*, terreno che per sistemazione degli appezzamenti non abbia subìto ancora l'azione benefica dei lavori e delle concimazioni ripetute, a cui i buoni terreni da canepa devono la caloria o forza vecchia caratteristica.

Sembra anche che l'andamento climaterico esplichi un'azione decisiva sulla diffusione e gravità della infezione; ed infatti quest'anno essa è abbastanza comune, lo sviluppo della canepa nella pluralità dei casi essendo stato senza posa intralciato dalla semina sino agli ultimi di maggio.

La possibilità di infezione bacteriacea della canepa può quindi ritenersi strettamente connessa con il perturbamento del chimismo interno della pianta cui segue una depressione della resistenza di essa verso la penetrazione del parassita; cosicchè il manifestarsi della malattia stessa è una espressione di

miseria fisiologica più o meno accentuata. Resta ancora da stabilire quale sia il comportamento del microrganismo al di fuori della pianta, e se esso sia o no identico col *Bacillus Cubonianus*, ovvero una forma ubiquitaria che possa anche rientrare fra quelle che prendono parte al processo di macerazione della canepa: anche nelle lesioni cagionate allo stelo erbaceo dalla grandine si rinvengono abbondanti colonie di microrganismi aventi molti caratteri affini a questi.

Del resto, altre infezioni bacteriacee delle piante prendono inizio da queste lesioni: negli uliveti, di regioni soggette alla grandine, la rogna è assai frequente ed è una delle conseguenze più gravi delle lesioni cagionate dai chicchi, sebbene l'infezione stessa possa avvenire anche per altre vie. Così se uno sviluppo stentato, provocato da disturbi nella nutrizione, può essere cagione sufficiente per determinare l'infezione bacteriacea della canepa, l'infezione stessa troverà un terreno assai ben preparato nella canepa grandinata, nella quale non solo è depressa la resistenza organica, ma è eziandio eliminato il riparo meccanico in seguito alle soluzioni di continuità cagionate ai tessuti.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Corrispondente Viceammiraglio G. Battista Magnaghi, mancato ai vivi il 22 giugno 1902; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 31 dicembre 1883. Il Vicepresidente Blaserna mandò un telegramma di condoglianza alla famiglia del defunto, la quale rispose ringraziando commossa pel prezioso attestato di stima e d'affetto ricevuto.

CONCORSI A PREMI

Il Vicepresidente Blaserna comunicava al sig. Guglielmo Marconi il conferimento del premio straordinario della Fondazione *Santoro*, colla seguente lettera:

Roma, 2 giugno 1902.

« Sono lieto di potere annunziare alla S. V. che la R. Accademia dei Lincei, nella « sua adunanza plenaria del 31 maggio scorso, e su proposta delle Categorie di Fisica, « di Chimica e di Mineralogia, con voto unanime Le assegnava un premio straordinario « e fuori concorso della Fondazione *Santoro*, di Lire 10 mila.

« Questa onorifica distinzione, che lascia da parte tutte le formalità del concorso, « Le è stata aggiudicata come prova del costante e vivo interesse che l'Accademia prende « ai perseveranti e grandiosi progressi che per opera di Lei ha fatto e fa la telegrafia

« senza fili. E l'Accademia intende con ciò, darle tutto l'appoggio suo e tutti gl'inco-
« raggiamenti, affinchè Ella continui nella bellissima sua opera scientifica.

« Io mi farò un piacere d'inviarle al più presto l'ammontare del premio, tosto che « Ella vorrà accusarmi ricevuta della presente, e indicarmi l'indirizzo preciso al quale « dovrò spedire il premio anzidetto.

« Colle mie più vive congratulazioni.

Il Vicepresidente
PIETRO BLASERNA.

Il sig. GUGLIELMO MARCONI rispondeva al Vicepresidente colla seguente lettera:

Near Poole, 22 giugno 1902.

« Ho l'onore di ringraziare la S. V. per la gentilissima lettera in data 2 corr., alla quale non ho potuto rispondere personalmente prima di ora a causa di un forte attacco d'influenza che mi ha obbligato al letto per oltre due settimane. La prego di avere la bontà di far conoscere alla Reale Accademia dei Lincei che tengo il premio assegnatomi quale il più grande onore ed incoraggiamento sinora ricevuto, ma che allo stesso tempo sento che tale alta onorificenza che la R. Accademia mi ha voluto conferire à ben superiore a qualsiasi merito mio.

« In risposta alla domanda contenuta nella lettera della S. V., La prego di inviare l'ammontare del premio al mio indirizzo in Londra e cioè a 18, Finch Lane, E. C.

« Ringraziandola di cuore per le oltremodo lusinghiere e gentili espressioni rivoltemi nella di Lei lettera mi dichiaro

« Della S. V.

Dev.mo
GUGLIELMO MARCONI.

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Hobart; la Società Khediviale di geografia, del Cairo; la Società zoologica di Tokyo; la Società geologica di Sydney; l'Istituto Smithsoniano di Washington; l'Università di Upsala.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dal 2 al 30 giugno 1902.

Albert Ier P. de Monaco. — Notes de géographie biologique marine. Berlin, 1900. 8°.

Id. — La troisième campagne scientifique de la Princesse Alice II. Paris, 1902. 4°.

Id. — Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht. Fasc. XXI. Monaco, 1902. 4°.

Amodeo F. — Coup d'oeil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité. Paris, 1902. 8°.

Amodeo F. — Rappresentazione stereoscopica delle figure dello spazio nel Città di Castello. S. a. 8°.

Id. — Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. Napoli, 1902. 4°.

Balch E. S. — Antarctica. Philadelphia, 1902. 8°.

Barbèra M. — L'etere e la materia ponderabile. Torino, 1902. 8°.

Carta idrografica d'Italia. Arno, Val di Chiana e Serchio. Roma, 1902. 4°.

Carvallo E. — L'électricité déduite de l'expérience et ramenée au principe des travaux virtuels. Paris, 1902. 2°.

Catalogo della Biblioteca della Società degli ingegneri e degli architetti italiani. 1° Supp.° Roma, 1902. 4.

Catalogue of scientific papers (1800-1883). Supplementary volume. Vol. XII. London, 1902. 4°.

Coulon G. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques. Paris, 1902. 4°.

De Goeij R. — Le Rythmique du Combat du Cid contre les Mores; le Cid de Pierre Corneille, Paris, 1902. 8°.

Di Legge A. — Sopra alcuni metodi di combinazione delle osservazioni. Roma, 1902. 8°.

Id. e *Giacomelli F.* — Catalogo di declinazioni medie nel 1900,0 di 1419 stelle comprese nell'emisfero nord, osservate al Circolo Meridiano negli anni 1895-99. Roma, 1902. 4°.

Id. e *Posperi A.* — Osservazioni del diametro orizzontale del sole fatte nel R. Osservatorio del Campidoglio negli anni 1896-1900. Roma, 1902. 4°.

Gallardo A. — Interpretacion dinamica de la division celular. Buenos-Aires, 1902. 8°.

Gaudry A. — Jubilée de M. A. Gaudry. Paris, 1902. 8°.

Lockyer N. — On the spark discharge from metallic poles in water. London, 1902. 8°.

Maffucci A. — Le tubercolosi bovine sotto il rapporto industriale ed igienico. Firenze, 1902. 4°.

Middendorp K. W. — Die Ursache der Tuberkulose nach Pr. Dr. R. Kock und dessen Heilverfahren. Leipzig, 1902. 8°.

Nansen F. — The Norvegian North Polar Expedition 1893-1896. Scientific Results. Vol. III. London, 1902. 4°.

Pantocsek J. — Die Bacillarien des Klebschieffers von Kertsch. St. Pétersbourg, 1902. 8°.

Pepere A. — Dell'origine congenita dell'adenoma solitario del fegato. Torino, 1902. 8°.

Id. — I tumori maligni primarî del fegato. Napoli, 1902. 8°.

Pflüger E. — Die quantitative Analyse des Glykogenes. Bonn, 1902. 8°.

Richard J. — Campagne scientifique de la Princesse Alice en 1901. Paris, 1902. 8°.

Richard J. — Copépodes et Cladocères de l'Ile Borkum. Paris, 1898. 8°.

Id. — Sur le Muséum océanographique de Monaco. Berlin, 1900. 8°.

Id. — Sur une nouvelle bouteille destinée à recueillir l'eau de mer à des profondeurs quelconques. Paris, 1902. 8°.

Salmojraghi F. — Il Pozzo detto Glaciale di Tavernola Bergamasca sul Lago d'Iseo. Roma, 1902. 8°.

Silvestri F. — Sulle ghiandole cefaliche o anteriori del Pachyiulus communis (Savi). Portici, 1902. 8°.

Sokolov A. — Ascensions droites moyennes des étoiles principales pour l'époque 1885,0. St. Pétersbourg, 1898. 4°.

Solar Physics Committee — Catalogue of four hundred and seventy of the brighter Stars, Classified according to their Chemistry at the Solar Physics Observatory South Kensington. London, 1902. 4°.

Somigliana C. — Sul potenziale elastico. Milano, 1902. 4°.

Tommasina Th. — Sur l'absorption de la radioactivité par les liquides. Paris, 1902. 4°.

Id. — Sur l'induction radiante et sur l'existence de rayons qui subissent la réflexion dans le rayonnement émis par un mélange de chlorures de radium et de baryum. Genève, 1902. 8°.

Vinassa de Regny P. — Note geologiche sulla Tripolitania. Bologna, 1902. 8°.

Wolfer A. — Astronomische Mitteilungen. Nr. XCIII. Zürich, 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 20 luglio 1902.

Geologia. — *I terreni terziari della provincia di Roma. II. Miocene medio.* Nota del Corrisp. CARLO DE STEFANI.

Molte incertezze rimangono ancora nei terreni miocenici. In generale sono a distinguere due zone; una inferiore calcarea, organogenica; però, come è in parte anche nel resto dell'Appennino, abbastanza multiforme; una superiore arenacea, marnosa e argillosa.

Comincerò dalla zona inferiore e dalla regione più settentrionale. Proprio al confine della Provincia con la Maremma Grossetana, verso il littorale, nella fattoria della Pescia Romana sulla sinistra del Chiarone, nel poggetto isolato che è rimpetto alla fattoria di Garavicchio e quale ultima continuazione del lembo non molto esteso di questo luogo, trovasi il calcare a briozoi solito, del tipo delle terme d'Acqui, ma specialmente di Bismantova, della Verna, di San Marino, del Sasso di Simone, ecc., appartenente al Miocene medio, ed è il lembo più prossimo al mare che io conosca, essendo tutti gli altri situati piuttosto addentro e in alto nella catena Appenninica [1].

Un altro piccolo lembo di questa età trovai nel versante settentrionale dei Monti della Tolfa al Poggio Caprarecciolo fra i calcari eocenici e le marne gessifere del Miocene superiore e le Trachiti. È rappresentato da brecciola e da calcare giallastro nel quale vidi un *Pecten* cfr. *aduncus* Eichw.: ricorda il *Leithakalk* ed il calcare di Rosignano in Toscana ed è

[1] Il Lotti pone nel Miocene anche il locale conglomerato quaternario che ricopre il calcare ad *Amphistegina*.

l'unico lembo di tale natura a me noto nella provincia romana ([1]). Non era mio scopo fare ricerche sull'estensione di esso; ma credo fermamente se ne debba trovare ancora ne' tratti vicini.

Lembi assai maggiori si trovano nei dintorni di Subiaco nell'alta valle dell'Aniene, e nel bacino del Sacco.

Presso Subiaco, direttamente sopra la Creta, sono calcari grigio-chiari o grigio-rossastri, talora compattissimi, interamente costituiti da frantumi di *Gyroporellae*, Foraminifere, Coralli, Crinoidi, Echini, Molluschi, Briozoi, e pieni specialmente, in tutti i loro strati, di *Pecten*, onde furono detti giustamente calcari a *Pecten*. Mancano i *Lithothamnium*. In alcuni strati, fra i più bassi, abbonda una Foraminifera delle dimensioni d'un grano di miglio, apparentemente di una sola specie, che fu ritenuta una *Nummulites*; però diversa da tutte le piccole Nummuliti dell'Eocene superiore e da quelle del Miocene inferiore. Si trova più rara, talora rarissima, fino negli strati calcarei più alti.

Non ne ho potuto osservare la superficie esterna, nè una sezione longitudinale netta con la camera centrale: varie sezioni trasversali sono a contorno depresso, ed assimmetriche, più convesse da una parte che dall'altra, come le *Amphisteginae*, perciò le credo tali. Del resto l'identica forma di Nummulitidee trovasi nel calcare organogenico del Sasso di Simone alle Vene del Tevere nell'Umbria incontestabilmente attribuito al Miocene medio ([2]).

Vi sono anhe *Rotalinae*, *Polystomellae*, *Textilariae*, *Operculinae*, *Orbitoides (Lepidocyclina* e *Miogypsina)*. È abbastanza frequente, anche negli strati inferiori, e ben si distingue nelle sezioni, la *Miogypsina*, sotto genere di *Orbitoides* proprio del Miocene medio, vicina o identica alla *M. irregularis* Michlt. della collina di Torino. La troveremo anche altrove nella Provincia e pure essa trovasi nel calcare del Miocene medio del Sasso di Simone.

Fra le bivalvi ho notato le seguenti specie: *Ostrea cochlear* Poli, *Anomia ephippium* L., *A. costata* Broc., *Pecten Malvinae* Dub., *P. Haveri* Michl. ([3]), *P.* cfr. *scabriusculus* Mich., *P.* cfr. *Manzonii* Fuchs, *P.* cfr. *revolutus* Michelotti, *P.* cfr. *planosulcatus* Math., *P.* cfr. *granulato-scissus*

([1]) Non è indicato nell'ottima carta del Tittoni, nè in quelle successive dell'Ufficio geologico. Esso ha una situazione stratigrafica consimile a quella del piccolo lembo miocenico, non accennato dal Lotti, che sta fra i calcari eocenici e le trachiti di Campiglia a sud-ovest del Poggio Menicosoli scendendo alle Pilete.

([2]) Anche nel calcare a crinoidi del Miocene medio di Pietra Bismantova il Malagoli indica tre *Nummulites*, due delle quali, quelle della tav. I, certamente sono *Rotalidae* od altra cosa, ed una è dubbia. Anche a San Marino fu prima notata, poi corretta, una supposta *Nummulites*: il calcare di San Marino, abbondantemente fossilifero, appartiene in ogni modo al Miocene medio.

([3]) Alcuni esemplari discretamente conservati, anche a coste depresse, sono certo ben distinguibili dal *P. quinquepartitus* Blanckenhorn dell'Eocene di Siria, perchè gli

Nelli, *Cardium* sp. Poichè si tratta quasi solo di nuclei che possono essere discussi ho messo dei nomi approssimativi, quantunque i *Pecten* siano distinguibili anche dalla sola impronta della parte interna. Quand'anche si tratti quasi di sole approssimazioni e quand'anche le specie si indicassero tutte con nomi nuovi insieme con le specie nuove che è pur possibile esistano (1), pure le forme indicate trovano analogie complete, non già nel Miocene inferiore o nell'Eocene, pur già paleontologicamente tanto noti e sotto tutte le loro forme batimetriche in Italia e nelle regioni vicine, ma solo nel Miocene medio.

Del resto e roccia e modelli sono perfettamente identici a quelli che, insieme a fossili meglio conservati del Miocene medio, scopriva in tutto l'Appennino Aquilano il Chelussi, acuto sceveratore della geologia di quella regione.

Per tali ragioni, si debbono ritenere i calcari a *Pecten* e briozoi di Subiaco appartenenti al Miocene medio come i calcari seguenti. Quei calcari superiormente, in breve altezza di strati, fanno passaggio alle arenarie di cui si dirà poi, diventano grigio-scuri e glauconitici e con la stessa ancor rarissima *Amphistegina*, o altro che sia, e con qualche solito *Pecten*, contengono altre bivalvi e Gastropodi certamente appartenenti al Miocene medio.

Nel bacino del Sacco a Ferentino, al Camposanto e sotto la città a immediato contatto con la Creta, si ripete il calcare, inferiormente talora grigio-scuro, quasi carbonioso, e passante ad una salda arenaria, poi chiaro, sempre screziato, superiormente per larghi tratti compatto e assai marnoso. Inferiormente ho veduto talora la solita Nummulitidea: il calcare è sempre organogenico e costituito da minutissimi frantumi di organismi grossolani; però superiormente, dove è più marnoso, lo compongono quasi solo minute foraminifere di mare profondo. Rari strati qui presentano sulla superficie ben conservati briozoi.

Il calcare chiaro, a briozoi, a *Miogypsina* ed altre foraminifere, *Conocrinus*, radioli d'Echino, frammenti di *Pecten* e di qualche altro mollusco, si ripete sul Sacco, a Sgurgola e a Morolo, immediatamente sopra la Creta come a Ferentino. Indipendentemente da questa lo ritroviamo più a valle a

---

spazi fra le costole rilevate non sono occupati dalle sottilissime lamine trasversali. Vari nuclei appartenenti probabilmente al *P. Haveri* sono identici a nuclei di Acqui, di S. Marino, di Monte Cedrone, l'età de' cui terreni non è discussa.

(1) Nel Miocene medio dell'Atlantico e specialmente del Mediterraneo il genere *Pecten* ebbe forse il suo massimo sviluppo. Quasi ogni specie di *Pecten* è abbastanza polimorfa anche da un luogo all'altro, sì da giustificare apparentemente chi moltiplicasse il numero delle specie, alla quale strada si attennero fra i nostri recentissimi il Fuchs, il Viola, il Bonarelli. Pur nella relativa polimorfia che ha luogo entro non ampi confini, le specie serbano il loro tipo costante che le fa riconoscere. Il più avveduto nella distinzione delle specie mi sembra sia stato il Sacco.

Ceccano. È più chiaro e talora più compatto, sempre con rarissima *Miogypsina*, *Operculina*, e rari *Pecten* che ritengo *P. scabrellus* Lck., *P. scabriusculus* Mich., determinazioni in accordo, salvo che nel nome adottato, con quelle del Mayer che pur vide *Pecten* di quel luogo e li ritenne miocenici. Talora sulla superficie corrosa degli strati appaiono briozoi (*Salicornaria*, *Membranipora*, *Eschara*, etc.), in sì perfetta conservazione, che meriterebbero di essere studiati, con articoli di Crinoidi e radioli d'Echino. Non ho visto *Lithothamnium* perchè i depositi, quantunque di scogliera, non dovevano essere tanto superficiali (1).

Degnissimo di nota è l'ultimo lembo da me notato più a valle, presso San Sozio sotto Falvaterra all'estremo confine meridionale con la Terra di Lavoro. Ivi sopra la Creta il calcare è grigio ed interamente costituito da *Miogipsyna* di grande dimensione (2).

In conclusione, l'età dei calcari esaminati, da attribuirsi al Miocene medio, non è da mettere in dubbio. I fossili non sono strettamente littorali ma appartengono alla plaga Elveziana, di non grande profondità.

Questi calcari organogenici, nell'Appennino occupano, fino ad Acqui, a settentrione, la parte inferiore del Miocene medio (3) ed hanno generalmente una fauna di plaga batimetrica Elveziana. Gli studî paleontologici non sono ancora abbastanza avanzati, causa anche l'imperfetta conservazione dei fossili, in modo da far constatare quali differenze vi siano dagli strati Elveziani che ordinariamente formano la zona superiore (4).

(1) Simili lembi di calcari miocenici a briozoi si trovano in altri punti delle valli dell'Aniene e del Sacco; ma non avendone raccolto esemplari non li accenno. Si ripetono anche presso Sora ed in qualche altro punto della valle del Liri.

(2) Le *Miogypsinae*, comuni nei calcari miocenici della provincia di Roma e di tutto l'Appennino settentrionale, sono distintive del Miocene medio del Bordelese e della Collina di Torino, specialmente della plaga Elveziana. Da molti anni avevo osservato delle *Orbitoides*, con *Lithothamnium*, nei calcari terrosi Elveziani di S. Fiorenzo in Corsica.

(3) Recentemente anche il Capellini, maestro preclarissimo nella conoscenza di tali terreni, affermava l'appartenenza al Miocene medio del calcare di San Marino.

(4) De Alessandri ha tentato di mostrare che il calcare di Acqui è aquitaniano. Ad una quantità di fossili determinati senza incertezza e che sono tutti Elveziani, ne aggiunge tre o quattro esplicitamente dichiarati incerti o mal conservati che apparterrebbero al Miocene inferiore. Si comprende che questi ultimi fossili sono tanto mal conservati da non prestarsi ad una classificazione. Ciò non basta a portare in piano diverso un terreno i cui fossili conservati, se De Alessandri avesse giudicati senza conoscere la provenienza, avrebbe attribuiti all'Elveziano.

Il Sacco sostiene ora che l'Aquitaniano, cui egli attribuiva il calcare di Acqui, deve essere unito al Miocene medio; io credo questa sua opione indetta principalmente dagli studî del Trabucco, confermati da quelli d'Alessandri sul calcare predetto, e deve intendersi del suo speciale modo di vedere l'Aquitaniano; poichè l'Aquitaniano del Mayer e di altri, qualunque sia il suo valore, e salvo qualche errore locale, rientra nel Miocene inferiore, come per esempio gli strati di Cadibona nell'Appennino.

La determinazione dell'età dei predetti calcari rende meno faticosa la classificazione dei terreni successivi.

Questi sono molto estesi ed alti. Occupano tutta la valle del Licenza fino entro i confini dell'Umbria, quasi per intero la valle dell'Aniene salvo i suoi monti più alti, i monti a mezzogiorno di Tivoli e le pendici laterali al corso del Sacco e del Liri fino ai confini con la Terra di Lavoro.

Inferiormente sono marne bianche a foraminiferi, specialmente *Globigerinidae*, ed ostracodi, che talora diventano un compatto calcare bianco (Ceccano, Percile, Licenza, Mandela, Castel Madama etc.), e superiormente sono le stesse marne a *Globigerinidae*, ma pure, talora con *Cylindrites*, *Helminthoida* cfr. *labyrinthica* H., *Taonurus* etc., ed arenarie con frequenti tracce di legno carbonizzato. Vi si intercalano scarsi strati di calcare assai compatto, o minutamente screziato come quelli precedenti, argille, e puddinghe con ghiaiette minutissime, spesso interamente calcaree come solo calcarei sono i monti circostanti. Queste rocce si ripetono identiche nella valle del Liri e ricordano da vicino le marne ed arenarie coetanee dall'Umbria fino alla Romagna toscana ed alla valle della Sieve [1] ed il *Bisciaro* stesso delle Marche.

Trabucco pone gli strati di Acqui e consimili nel *Langhiano*, in quanto dà a questo nome un significato strettamente stratigrafico, quello di parte inferiore del Miocene medio; ma egli prescinde dai fossili, che, quando non si conoscesse lo strato donde provengono, farebbero metter questo nell'*Elveziano*, poichè, salvo per avventura alcuni appartenenti a marne intercalate, batimetricamente appartengono alla plaga Elveziana.

Il Sacco attribuisce gran parte dei calcari organogenici del Miocene dell'Appennino, salvo quelli di Acqui, all'Oligocene od all'Eocene; il Lotti li attribuisce quasi tutti all'Eocene.

Mayer, Sacco, Trabucco, De Alessandri non tengono conto delle complete diversità di fauna secondo le profondità dei mari, rivelate dai non più recenti studî talassografici, che sono la più importante scoperta moderna della biologia applicabile alla paleontologia, scoperta che è vanto del Jeffreys e specialmente del Seguenza nostro avere applicato allo studio dei terreni terziarii.

[1] Il Lotti attribuisce questi terreni alla parte inferiore dell'Eocene, perchè nella valle di Sieve, suo punto di partenza, ha interpretato a dirittura all'inversa la stratigrafia, come notò il Trabucco.

Coi varî spaccati che egli dà attraverso la val di Sieve sono d'accordo nelle linee generali per la parte che riguarda i terreni miocenici, cioè le sue arenarie inferiori sulla sinistra della Sieve. Questi formano il crinale dell'Appennino, presso che orizzontali in alto, e per lo più regolarmente sovrapposti all'Eocene nel versante Adriatico. Sulla Sieve, in basso, per effetto di inversioni frequenti ma non generali sembrano talora sottoposti all'Eocene ora medio, ora superiore. Il Lotti riconosce le inversioni ma invece d'interpretarle fondato sulla Paleontologia le interpreta in senso contrario, aggiungendo, per giustificar ciò, un anticlinale nei terreni miocenici che non esiste. Per quanto riguarda i terreni eocenici nella parte opposta della valle, il Lotti non ne interpreta esattamente la stratificazione, e inoltre ingannato da analogie litologiche, come a me pure prima che a lui, erroneamente, era accaduto, estende le marne mioceniche, le quali non passano sulla

I fossili sono scarsi e a nidi, ma se ne trovano. Uno studio paleontologico ne fece per l'Alta Valle dell'Aniene il De Angelis in un lavoro d'insieme che fra i lavori recenti sulla Geologia romana fatti con criterio scientifico va segualato. Egli, citati gli Echini, i Briozoi, i Molluschi, i Coralli, le Foraminifere dei territorî di Sambuci, Mandela, Subiaco, Affile, li attribuisce al Miocene medio, specialmente al Langhiano [1].

Il Cacciamali ebbe fossili delle marne e delle arenarie di Monte San Giovanni Campano pur sempre nella Provincia, ma nel bacino del Liri.

Non vi ho mai trovato una *Nummulites*, nè d'altronde alcuno ve le indica in modo specifico. Nelle arenarie i fossili sono scarsissimi: ho veduto spesso dei *Bathysiphon* nei dintorni di Percile. Nelle puddinghe talora glauco-

---

destra della Sieve, dove sono invece le marne eoceniche a *Nummulites subirregularis*. Anche per la valle Tiberina il Lotti è tratto in inganno da parziali inversioni che alterano la serie locale.

Il Sacco segue il Lotti, adducendo come criterî paleontologici talune specie trovate nel Miocene medio, che sono comuni a terreni più antichi, ciò che per alcune si sapeva, e per altre non va inteso in senso troppo assoluto, trattandosi di varietà diverse, e che d'altronde non infirmano il valore delle specie peculiari. Il Sacco poi conclude che presterà sempre più fede ad una sola *Nummulites* che ad intiere faune. Il male è che a Porretta, in val di Sieve, nel *Bisciaro* non è nemmeno mai stata citata, fosse anche a torto, una sola *Nummulites*.

Il Bonarelli pure, dopo stabilita una successione di terreni imperfetta perchè fondata sopra caratteri litologici e sopra osservazioni stratigrafiche locali inesatte, dice che gli Pteropodi e le altre faune di quei terreni sono pseudomioceniche, cioè paiono mioceniche, ma sono oligoceniche od eoceniche. Però si conoscono abbastanza gli Pteropodi e le altre faune oligoceniche ed eoceniche isomesiche del Mediterraneo e delle regioni immediatamente vicine, e queste sono ben diverse; mentre le faune appenniniche nostre sono chiamate mioceniche, e tali furono ritenute in apparenza anche dal Bonarelli e dal Sacco perchè in realtà si trovano solo nel Miocene medio di tutto il Mediterraneo.

L'idea che io ho espressa già da molti anni che la parte inferiore di questi terreni possa appartenere al Miocene inferiore ha avuto conferma solo di recente in un pesce raccolto nell'arenaria al Ponte Nuovo presso Barberino di Mugello dal Bassani ritenuto appartenente al Tongriano superiore.

Il Lotti attribuisce all'Eocene pure l'arenaria *langhiana* della Porretta nel Bolognese. Sono d'accordo, in massima, con gli spaccati che egli ne ha dati; se non che l'arenaria eocenica del Monte Cavallo forma un anticlinale, per quanto in parte rovesciato, sotto le argille scagliose, come l'arenaria del Monte Granaglione la cui massa interna non appartiene punto, come intende il Lotti, a zona diversa, mentre l'arenaria miocenica di Porretta forma una piega concava rovesciata come tante ne sono nell'Appennino, in mezzo alle argille scagliose sempre concordanti che sono più antiche. Perciò l'arenaria di Porretta non si connette con quella eocenica che forma la massa interna del Monte Cavallo; ma con quella miocenica, benchè litologicamente poco diversa, che si trova sulla cresta del detto monte e che si torna a trovare sopra le argille, più a valle sul Reno.

[1] Il *Diodon gigantodus* Portis trovato nel calcare presso la stazione di Castel Madama, è possibile provenga dal Miocene invece che dall'Eocene. Il dott. Martelli ha trovato nei monti Tiburtini anche delle *Craticulariae*.

niose di Percile ho veduto *Ostrea cochlear* Poli, *Anomia radiata* Brc., *Pecten scabrellus* Lch., *P. Haveri* Mich., come nelle breccioline del bacino del Turano nel prossimo Abruzzo. Le marne presentano frequentemente delle *Globigerinae* e degli Ostracodi, e ritengo si abbia a trovare in esse l'intera fauna dello Zancleano inferiore di Seguenza [1]. In generale questi terreni sono depositi di mare assai profondo e sulla loro età non potrei trarre conclusione diversa da quella del De Angelis, che cioè appartengano alla plaga Langhiana del Miocene medio [2].

Matematica. — *Contributo alla teoria degli insiemi.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio U. DINI.

Lo studio di alcune quistioni pertinenti alla teorica delle Funzioni di variabili reali, toccate in una mia memoria preventiva: *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* [3], mi ha portato a conclusioni che, mentre da un lato confermano i fatti che in quel lavoro furono annunziati, anche in quei punti dove per la affrettata redazione parevano men sicuri; d'altro

(1) Ho già detto altrove, descrivendo i terreni della Calabria, per quali ragioni ritengo debba attribuirsi al Miocene medio anzichè al Pliocene lo Zancleano inferiore del Seguenza. Suoi equivalenti paleontologici nell'Italia settentrionale e centrale sono stati riconosciuti dal Coppi le marne bianche di Montegibio, dal Silvestri quelle dell'alta Val del Tevere, tutte pur esse certamente mioceniche. Se in qualche punto della Valle del Mésima od altrove si sceverarono marne plioceniche o postplioceniche fra quelle che io o magari il Seguenza avevamo riunito con lo Zancleano, ciò non altera affatto le conclusioni sull'età del Zancleano inferiore, conclusioni che devono intendersi applicabili solo agli strati contenenti i fossili (foraminifere ed ostracodi) proprî di questo terreno e non ad altri.

(2) Nell'ultima *Carte géologique internationale de l'Europe* le argille, marne ed arenarie della parte centrale della Valle del Sacco sono giustamente attribuite al Miocene. Ciò sembrerebbe in contraddizione con alcuni lavori dell'Ufficio geologico; ma poichè in essi non sono indicati i successivi stadî di modificazione delle idee, è prudente astenersi dalle induzioni. Se non che non v'ha differenza fra i detti terreni indicati come miocenici e gli altri lasciati nell'Eocene. In generale nella Carta predetta e così nei monti a sud-est di Tivoli nella *Carta della Campagna romana*, salvo una sottile zona lungo la destra del Licenza e minimi lembi altrove, dovrebbero segnarsi come mioceniche tutte le masse attribuite all'Eocene nei monti fra Solmona e Avezzano e nei bacini dell'Aniene, del Sacco, e del Liri, poi una parte delle rocce del Corno grande al Gran Sasso e della Maiella. Così pure appartengono al Miocene i terreni (argille e marne) segnati come pliocenici sotto Mandela nella valle dell'Aniene e sotto Monte S. Giovanni Campano in quella del Liri, ed al Postpliocene i conglomerati calcari di Mandela.

Pur troppo gli studî dell'Ufficio predetto sui terreni terziarî della Provincia e delle regioni contermini, e sono la massima parte dell'Appennino, per mancanza di cognizioni paleontologiche, sono stati poco conclusivi, anzi, salvo pei dintorni di Viterbo dei quali si è occupato il valente Di Stefano, piuttosto negativi.

(3) Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena (1901).

lato hanno stretto rapporto con le teorie della integrazione definita impropria e delle serie di funzioni.

Non parrà quindi inutile che io brevemente le esponga; ciò che spero di poter fare con questa Nota e con alcune che la seguiranno fra breve.

In questa svolgerò alcune considerazioni sulla determinazione della *estensione esterna* (aüssern *Inhalt*) di un insieme lineare situato in un intervallo di ampiezza infinita.

Non credo sia stato osservato che non si giunge sempre allo stesso numero, quando si definisce la estensione esterna di un insieme Ξ situato nell' intorno $(x_0, \dots +\infty)$ come il limite, per $x=\infty$, della estensione di quella parte di Ξ che è situata nell' intervallo $(x_0, \dots x)$, o quando direttamente si cerchi il limite inferiore delle somme delle lunghezze dei segmenti che contengono punti o punti limiti di Ξ. Quest' ultimo limite può essere infinito, ed essere finito o nullo il primo: ed è il primo appunto che principalmente giova considerare.

Nemmeno credo sieno ancora state cercate le relazioni fra le estensioni esterne di due insiemi che si ottengono l' uno dall'altro, quando si eseguisce una trasformazione biunivoca, ordinata, continua della variabile reale x nella variabile reale $y=f(x)$, e si immagina che nell' intorno $(x_0, \dots +\infty)$ sia situato un insieme di punti di determinata estensione.

Di questi argomenti intendo occuparmi, indugiando sovra di essi solo quel tanto che mi sarà necessario per le applicazioni che dovrò farne nelle Note seguenti.

1. Nel segmento finito $(x_0, \dots x)$ sia situato l' insieme Ξ di punti $[\xi]$ e si consideri una successione T_1, T_2, $T_3, \dots$ di scomposizioni del segmento $(x_0, \dots x)$ fatte in guisa che ogni nuova scomposizione suddivida alcune o tutte le parti prima esistenti e che, ad ogni numero positivo δ, possa farsi corrispondere un indice m tale che, dalla operazione T_m in poi, tutti i tratticelli in cui $(x_0, \dots x)$ è scomposto, abbiano lunghezza minore di δ. Dopo ogni scomposizione si sommino le lunghezze di quei tratticelli che contengono punti o punti limiti di Ξ. Indicando coteste somme con s_1, s_2, $s_3, \dots$ si avrà $s_n > 0$, $s_n \geqq s_{n+1}$ $(n=1, 2, 3 \dots.)$ e perciò esisterà il limite $L = \lim_{n=\infty} s_n$, e si avranno le relazioni $s_n \geqq L$, $L \geqq 0$.

Il numero L rappresenta la *estensione esterna* dell' insieme Ξ (¹), diremo anche, con lo Stolz (²) che *compete all' insieme* Ξ, e diremo *discreti* quegli insiemi a cui compete un numero $L=0$.

Il numero L *è indipendente dal modo con cui le scomposizioni* T_n *si operano.*

(¹) Cfr. Peano, *Applicazioni geometriche del Calcolo*, pag. 152. Per la bibliografia si rimanda all'articolo sugli insiemi che è nell' Enciclopedia.

(²) Math. Annalen, XXIII, pag. 154. Cfr. anche Harnack, Mat. Ann. XIX, pag. 238.

Se un segmento $(x_0, \dots x)$ *finito si scompone in un numero finito di parti, la estensione esterna di un insieme* Ξ *situato in* $(x_0, \dots x)$ *è eguale alla somma delle estensioni delle parti di* Ξ *situate nei singoli tratti in cui* $(x_0, \dots x)$ *fu diviso*, ed, in particolare, *non è minore della estensione di una qualunque sua parte.*

Se in un segmento finito $(x_0, \dots x)$ *è situato un insieme discreto* Ξ, *ad ogni numero positivo* ε *si può far corrispondere un numero positivo* δ *tale che, scomponendo il segmento* $(x_0, \dots x)$ *in tratti tutti minori, in lunghezza, di* δ, *la somma delle lunghezze dei tratti che contengono punti o punti limiti di* Ξ, *sia minore di* ε.

La somma di un numero finito di insiemi discreti situati in uno stesso segmento è ancora un insieme discreto.

Se, scomponendo il segmento $(x_0, \dots x)$ *in un numero finito di parti, i punti dell'insieme* Ξ *contenuti in ciascuna di quelle parti costituiscono altrettanti insiemi discreti, anche l'insieme* Ξ *è discreto.*

Indicando con K l'insieme di tutti i punti che rimangono nell'intervallo $(x_0, \dots x)$ dopo che se ne è sottratto un insieme discreto, si vede agevolmente che: *L'insieme* K *è denso in tutti i punti del segmento* $(x_0, \dots x)$.

2. Consideriamo ora un insieme Ξ di punti $[\xi]$ situati in un intorno $(x_0, \dots \infty)$.

Sia data una successione $x_0, x_1, x_2 \dots$ che tende all'infinito sempre crescendo, cosicchè si sappia che nessuno dei segmenti $(x_n, \dots x_{n+1})$ ha lunghezza nulla. Indichiamo con L_n la estensione esterna della parte di Ξ che è contenuta nel segmento $(x_n, \dots x_{n+1})$.

Se la serie

$$(1) \qquad \sum_0^\infty L_n = L_0 + L_1 + L_2 + \cdots$$

converge verso la somma L, *diremo che questo numero* L *compete all'insieme* Ξ, *dato nell'intorno* $(x_0, \dots \infty)$.

3. Per giustificare questa definizione dimostreremo che *il numero* L *non dipende dalla scelta della successione* x_n.

Sia infatti $y_0 = x_0, y_1, y_2, \dots$ una successione che tende all'infinito sempre crescendo. Indichiamo con L'_n la estensione esterna della parte di Ξ contenuta nel segmento $(y_n, \dots y_{n+1})$.

Voglio provare anzitutto che *la serie*

$$(2) \qquad \sum_0^\infty L'_n = L'_0 + L'_1 + L'_2 + \cdots$$

è convergente, se è convergente la (1).

Preso un numero positivo σ, a piacere, e determinato l'indice n per modo che il resto $R_n = L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots$ della serie convergente ΣL_n,

sia minore di σ, si cerchi poi, nella successione y_n, il primo dei termini che non è minore di x_{n+1}.

Posto che questo termine sia y_{m+1}, dico che la somma di un numero qualunque r di termini, a partire dall' $m+1^{esimo}$, nella serie (2) è essa pure minore di σ.

Scriviamo la somma: $\lambda'_{m,r} = L'_{m+1} + L'_{m+2} + \cdots + L'_{m+r}$, ed al numero r fissato, facciamone corrispondere uno r_1 abbastanza grande perchè y_{m+r} non sia maggiore di x_{n+r_1}. L' intervallo $(y_{m+1}, \ldots y_{m+r})$ sarà allora tutto contenuto nell' intervallo $(x_{n+1}, \ldots x_{n+r})$, e la estensione esterna della parte di Ξ situata nel primo intervallo, non sarà maggiore di quella relativa alla parte di esso contenuta nel secondo, cioè avremo:

$$\lambda'_{m,r} \leqq L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+r_1} \leqq \sigma \qquad \text{c. d. d.}$$

È facile ora vedere che: *anche le somme di quelle due serie sono eguali.*

Indichiamo con $S_n = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$, la somma degli n primi termini delle serie (1), e con $S'_m = L'_1 + L'_2 + \cdots L'_m$, la somma degli m primi termini della (2).

Ad ogni numero n potremo farne corrispondere un altro m abbastanza grande perchè sia $x_n \leqq y_m$, ed al tendere all' infinito di n, anche m diventerà infinito. Si ha però $S_n \leqq S'_m$, ed anche perciò:

$$L = \lim_{n=\infty} S_n \leqq L' = \lim_{m=\infty} S'_m. \tag{3}$$

D'altra parte, ad ogni m fissato, può farsi corrispondere un n_1 tale che sia $x_{n_1} \geqq y_m$, epperò anche $S_{n_1} \geqq S'_m$; da cui

$$L \geqq L'. \tag{4}$$

Dalle (3) e (4) si ricava appunto $L = L'$. c. d. d.

4. Il numero L che compete all' insieme Ξ situato in un intervallo infinito $(x_0, \ldots +\infty)$, e che abbiamo ora dimostrato potersi determinare in modo unico, risulta con legge aritmetica dai limiti L_n supposti già calcolati.

La somma $S_n = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$, può ottenersi, però, anche operando al modo seguente:

Si scomponga ciascuno degli intervalli $(x_0, \ldots x_1)$, $(x_1, \ldots x_2), \ldots$, $(x_n, \ldots x_{n+1})$ in parti di lunghezza non maggiore di un determinato numero δ, si indichi con $L_r(\delta)$ la somma delle lunghezze dei tratti che contengono punti, o punti limiti di Ξ, e sono contenuti nel segmento $(x_r, \ldots x_{r+1})$, $(r = 0, 1, 2 \ldots n)$, si faccia la somma

$$S_n(\delta) = L_0(\delta) + L_1(\delta) + \cdots + L_n(\delta),$$

e se ne cerchi il limite per $\delta = 0$: si avrà appunto

$$S_n = \lim_{\delta=0} S_n(\delta) . \tag{5}$$

Ora, benchè si sappia che tutti i limiti (5) esistono finiti e determinati, e che esiste, pure finito e determinato il limite

$$\lim_{n=\infty} S_n = L , \tag{6}$$

non si può asserire che, per valori di δ *abbastanza piccoli, esista anche il limite*:

$$\lim_{n=\infty} S_n(\delta) = L(\delta), \tag{7}$$

cioè che converga la serie $\sum_0^\infty L_n(\delta)$, *e non si può, in generale, dedurre*:

$$L = \lim_{n=\infty} \left\{ \lim_{\delta=0} S_n(\delta) \right\} = \lim_{\delta=0} \left\{ \lim_{n=\infty} S_n(\delta) \right\} . \tag{8}$$

Ciò accadrà solo quando la serie $\sum_0^\infty L_n(\delta)$, *convergente, come abbiamo supposto, per* $\delta = 0$, *converga uniformemente a tratti in un intorno determinato di questo punto* [1].

Quando tale condizione sia soddisfatta, *il numero* L *che compete all'insieme* Ξ, *coincide con la sua estensione esterna.*

5. Il teorema dato al numero 3, e le proprietà fondamentali dei numeri S_n che competono ad insiemi situati in segmenti finiti, permettono di enunciare anche il metodo seguente per la determinazione del numero L che compete all'insieme Ξ situato nell'intorno $(x_0 , \dots \infty)$:

Fissato un numero positivo δ, *si scomponga il segmento* $(x_0 , \dots x)$ *in parti tutte minori di* δ, *si faccia la somma* $S(x , \delta)$ *delle lunghezze di quelle parti che contengono punti, o punti limiti di* Ξ, *si calcoli il limite*:

$$\lim_{x=\infty} \left\{ \lim_{\delta=0} S(x , \delta) \right\} = L . \tag{9}$$

Se ha luogo la convergenza uniforme di cui s'è fatto parola al numero precedente, è indifferente l'ordine secondo cui si eseguiscono le due operazioni di passaggio al limite, e si ha anche

$$L = \lim_{\delta=0} \left\{ \lim_{x=\infty} S(x , \delta) \right\} \tag{10}$$

[1] Cfr. Arzelà, *Sulle serie di Funzioni* (Mem. R. Acc. delle Sc. di Bologna, a. 1899, pag. 153).

ma se quella convergenza uniforme manca, e v' è solo la convergenza ordinaria per $\delta = 0$, si dovrà esclusivamente far uso delle (9).

6. Se la serie $\sum_0^\infty L_n$ *diverge*, non esiste, o se si vuole, è *infinito* il numero L che compete all' insieme Ξ, diverge a maggior ragione anche ogni serie $\Sigma L(\delta)$ e si ha:

$$\lim_{x=\infty} \left\{ \lim_{\delta=0} S(x, \delta) \right\} = \lim_{\delta=0} \left\{ \lim_{x=\infty} S(x, \delta) \right\} = \infty . \tag{11}$$

7. *Perchè sia possibile la determinazione del numero (finito)* L *che compete ad un insieme* Ξ, *situato nell'intorno* $(x_0, \dots \infty)$, *occorre e basta che ad ogni numero positivo* ε *se ne possa far corrispondere un altro* x_ε *abbastanza grande, perchè i punti ed i punti limiti di* Ξ *situati nel segmento* $(x_\varepsilon, \dots x)$, *qualunque sia* $x > x_\varepsilon$, *possano essere rinchiusi in un insieme di tratti la cui lunghezza totale non superi* ε.

Perchè, oltre a ciò, l'insieme Ξ *abbia estensione esterna finita, occorra e basta, che, la condizione superiormente enunciata, possa esser soddisfatta col dividere il segmento* $(x_\varepsilon, \dots x)$ *in tratti tutti minori, in lunghezza, di un numero positivo* δ, *indipendente da* x.

8. In particolare per la esistenza del numero (finito) L, *è condizione necessaria, che ad ogni coppia di numeri positivi* ε, M, *se ne possa far corrispondere un terzo* $x_{\varepsilon, M}$ *abbastanza grande, perchè la estensione esterna della parte di* Ξ *contenuta nel segmento* $(x, \dots, x + M)$, $x \geqq x_{\varepsilon, M}$ *non sia maggiore di* ε.

9. È importante, per quel che segue, notare che *se un insieme* Ξ *soddisfa cotesta condizione, il rapporto* $\frac{S_n}{x_n - x_0}$ *della estensione esterna della parte di* Ξ *situata nel segmento* $(x_0, \dots x_n)$ *alla lunghezza del segmento stesso, tende allo zero quando* x_n *tende all' infinito*. Ed infatti, poichè è indifferente la scelta della successione x_n, prendo $x_n = x_0 + n M$. Per le ipotesi poste posso scrivere (¹)

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{x_n - x_0} = \lim_{n=\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{M}$$

ε, M, sono positivi qualunque, dunque è $\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{x_n - x_0} = 0$.

10. Gli insiemi che soddisfano la condizione enunciata al n. 9 (in particolare quindi, anche quelli che soddisfano quella del n. 8) hanno, nelle ricerche che dovrò fare nelle Note seguenti, importanza specialissima.

(¹) Cfr. Cesàro, *Analisi Algebrica*, pag. 98.

Quando ciò non possa generare confusione, li indicheremo semplicemente col simbolo Ξ_2 ed *indicheremo con* K_2 *l'insieme dei punti che rimangono in un intorno* $(x_0, \dots \infty)$ *quando se ne sono sottratti tutti i punti di un insieme* Ξ_2.

Dalle date definizioni si deduce che, *il rapporto fra la estensione esterna della parte di un insieme* Ξ_2 *situata nel segmento* $(x_0, \dots x)$ *e quella della corrispondente parte dell'insieme* K_2, *tende allo zero per* x *tendente all'infinito.*

Non si deve escludere che ad un insieme Ξ_2 possa competere un numero L finito o nullo, ma rimane escluso che un insieme Ξ_2 possa contemporaneamente essere un insieme K_2.

11. La somma di un numero finito di insiemi Ξ_2 è ancora un insieme Ξ_2.

12. Fra gli insiemi che ammettono numero finito L, meritano speciale attenzione quelli per i quali è $L = 0$.

Essendo $L = \sum_0^\infty L_n$, $L_n \geqq 0$, perchè sia $L = 0$ occorre e basta che i numeri L_n sieno tutti singolarmente nulli, cioè che la parte dell'insieme dato che è situata in qualunque segmento finito abbia estensione esterna nulla.

Diremo che un tale insieme è *discreto in qualunque sua parte finita*, o più brevemente che è *discreto.*

Un insieme discreto, quando manchi la convergenza uniforme nella serie $\Sigma L_n(\delta)$ *può non avere estensione nulla*, ma *se un insieme ha estensione esterna nulla, è certamente discreto.*

13. Indicheremo brevemente un insieme discreto col simbolo Ξ_1, ed indicheremo con K_1 l'insieme dei punti che rimangono nell'intorno $(x_0, \dots +\infty)$ dopo che se ne è sottratto un insieme Ξ_1.

14. La somma di un numero finito di insiemi discreti è ancora un insieme discreto.

15. Un insieme K_1 è denso egualmente in tutti i punti dell'intorno dove esso è situato.

16. Un insieme discreto è sempre anche un insieme Ξ_2, ed un insieme K_2 è sempre parte di un insieme K_1.

17. Se tutti i punti di un insieme K_1 soddisfano una stessa condizione, potremo dire che quella condizione è *generalmente soddisfatta* nei punti dell'intorno $(x_0, \dots +\infty)$ dove K_1 è situato.

18. Sia

$$y = f(x) \tag{12}$$

una funzione ad un valore, finita, continua, sempre crescente della variabile reale x, data nell'intorno $(x_0, \dots +\infty)$ e sia

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty\,. \tag{13}$$

I punti dell' intorno $(x_0, \ldots \infty)$ sono posti, mediante la (12) in corrispondenza biunivoca, ordinata, continua, con quelli dell'intorno $(y_0 = f(x_0), \ldots + \infty)$.

Ad un insieme di punti $[\xi]$ situati nell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ corrisponderà un insieme di punti $[\eta]$ situati nell' intorno $(y_0, \ldots + \infty)$ e reciprocamente.

A punti contenuti nel segmento $(x_1, \ldots x_2)$, corrisponderanno punti situati nel segmento $(y_1 = f(x_1), \ldots\ y_2 = f(x_2))$; quando la lunghezza dell' intervallo $(x_1, \ldots x_2)$ si faccia tendere allo zero, così succederà di quella dell' intervallo $(y_1, \ldots y_2)$ e reciprocamente.

Pel noto teorema di Cantor, sulla continuità uniforme, potremo inoltre fissare un numero δ_ε abbastanza piccolo, perchè, ad ogni intervallo $(x_1, \ldots x_2)$ contenuto in $(x_0, \ldots \infty)$ ed avente lunghezza non maggiore di δ_ε, corrisponda un intervallo $(y_1, \ldots y_2)$ di lunghezza minore del numero positivo ε.

Notiamo ancora che se si ha una successione x_n di punti x tendenti all' infinito sempre crescendo, si avrà corrispondentemente una successione di numeri y_n sempre crescenti, tendenti all' infinito.

19. Le considerazioni fatte, ed i risultamenti ottenuti al n. 7 ci permettono di concludere che: *Se ad un insieme di punti* $[\xi]$ *situati nell'intorno* $(x_0, \ldots + \infty)$, *compete un numero finito* L, *anche al corrispondente insieme* $[\eta]$ *compete un numero finito* L′, *e reciprocamente.* Se è $L = 0$, anche $L' = 0$, cioè *ad insiemi discreti corrispondono insiemi discreti.*

20. Poniamo ora che nell' intorno $(x_0, \ldots + \infty)$ sia situato un insieme $\Xi_2(\xi)$ tale che il rapporto $\dfrac{S(x)}{x - x_0}$ della estensione esterna della parte di esso contenuta nel segmento $(x_0, \ldots x)$ alla lunghezza del segmento stesso, sia infinitesima per $x = \infty$.

L' estensione esterna della parte dell' insieme $[\eta]$ contenuta nel corrispondente segmento $(y_0, \ldots y(x))$ sarà espressa da $S(f(x))$, e, poichè al tendere di x all' infinito, anche $f(x)$ tende all' infinito, e reciprocamente, avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{S(y)}{y - y_0} = 0$$

e l' insieme $[\eta]$ sarà a sua volta un insieme Ξ_2.

Dunque, ad insiemi Ξ_2 dell' intorno $(x_0, \ldots \infty)$, corrispondono pure insiemi Ξ_2 dell' intorno $(y_0, \ldots \infty)$, e così ad insiemi K_2 corrispondono insiemi K_2, e reciprocamente.

Matematica. — *Sugli spazî a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Questa Nota riassume una parte dei risultati di una Memoria di prossima pubblicazione, che fa seguito a un'altra [1] sulla teoria generale degli spazî a un numero qualsiasi di dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti e sulla loro determinazione.

In questa io ho dato il metodo generale che serve a trovare per quadrature tutti questi spazî: metodo che permette di ritrovare rapidamente gli spazî a tre dimensioni, già determinati dal prof. Bianchi, che ammettono un gruppo di movimenti. Non è però più così quando si passa a un numero maggiore di dimensioni: i calcoli infatti a tale scopo che la Memoria citata indica da eseguire risultano troppo lunghi per potere essere effettivamente eseguiti. In questa Nota io indicherò sommariamente come si debba procedere per gli spazî a quattro dimensioni. Si comincia, secondo il metodo generale, a trovare prima i gruppi di movimenti per poi dedurne gli spazî relativi; e anzitutto si cerca di avere « a priori » qualche proprietà generale di questi gruppi. Si escludono dalla ricerca come casi senza interesse i gruppi con meno di quattro trasformazioni linearmente indipendenti, che (com'è del resto evidente) i miei teoremi generali dimostrano potersi già considerare come gruppi di movimenti di uno spazio a meno di quattro dimensioni e che quindi sono gruppi riducibili ai casi già studiati dal prof. Bianchi [2].

Così pure è inutile trattare i gruppi transitivi a quattro parametri (che del resto ho già studiato nella Memoria citata), perchè noi sappiamo già da teoremi generali che essi si possono considerare sempre come gruppi di movimenti. Possiamo pure prescindere dai gruppi a 10 parametri, che corrispondono agli S_4 a curvatura costante.

Ciò può già servire a circoscrivere di molto la ricerca.

Ma i due teoremi fondamentali che servono a trovare tutti gli altri gruppi sono i seguenti:

I. *Non esiste alcun gruppo* G_9 [3] *che si possa considerare come gruppo di movimenti di un* S_4 [4].

(1) Quest'ultima Memoria si sta ora pubblicando negli Annali di Matematica.

(2) Bianchi, *Sugli spazî a tre dimensioni* ecc. Memorie della Società Italiana delle Scienze (serie III, tomo 11, pag. 27). Cfr. anche la mia Mem. citata.

(3) Con G_r indico un gruppo a r parametri.

(4) Per vedere bene il significato di questo teorema, cfr. la mia Mem. citata (§ 8).

II. *Se un gruppo* G_r ($r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) *si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a quattro dimensioni, esso contiene certamente un sottogruppo* G_{r-1}.

Questi due teoremi si possono stabilire « a priori »; e la loro conoscenza dà poi una grande rapidità alla ricerca. Noi sappiamo da essi che basterà restringerci allo studio di quei gruppi a 5, 6, 7, 8 parametri su quattro variabili, che ammettono rispettivamente qualche sottogruppo a 4, 5, 6, 7 parametri. Questo teorema si può poi generalizzare anche nel caso di spazî a più che quattro dimensioni e ci darà sempre l'ordine di qualche sottogruppo contenuto nei gruppi da determinare.

Nel caso particolare di spazî a quattro dimensioni la ricerca si presenta con questo metodo abbastanza semplice, e può servire come esempio del metodo da seguire negli altri casi. Siccome ogni G_r del nostro tipo contiene come sottogruppo un G_{r-1}, che naturalmente si potrà anch'esso considerare come gruppo di movimenti (totale o parziale) di uno spazio a quattro dimensioni, noi dovremo dapprima ricercare tutte le composizioni dei gruppi a 5 parametri, che contengono un sottogruppo a 4 parametri che si possa considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a 4 dimensioni, cioè che appartenga a uno dei tipi di G_4 già determinati dal prof. Bianchi, o che sia transitivo.

La ricerca si semplifica molto trascurando quelli di questi gruppi che contengono un sottogruppo G_4 a trasformazioni permutabili, perchè gli S_4 che ammettono un tale gruppo G_4 di movimenti sono a curvatura nulla [1].

Dalla composizione di uno di questi G_5 si passa facilmente alla forma esplicita delle sue trasformazioni infinitesime, perchè noi conosciamo già le trasformazioni infinitesime di un suo sottogruppo G_4; e noi possiamo senz'altro trascurare [2] quelli che avessero due trasformazioni infinitesime dipendenti. Di più noi possiamo prima trovare quei G_5 che contengono un sottogruppo G_4 transitivo, ma che non contengono inoltre un G_4 intransitivo, e determinare poi separatamente quei G_5 che contengono un sottogruppo G_4 intransitivo che si possa considerare come gruppo di movimenti. Con questi e altri mezzi la ricerca si semplifica assai. Valendoci poi dei criterî generali dati nella mia Memoria citata, si esamina quali dei G_5 così ottenuti è un gruppo di movimenti.

Con metodo analogo si trovano i G_6 che contengono uno di questi G_5 come sottogruppo e che si possono ancora considerare essi stessi come gruppo di movimenti e così via. I risultati che si ottengono sono i seguenti:

« *Nessun gruppo a 8 parametri si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a 4 dimensioni* ».

(1) Bianchi, loc. cit.
(2) Bianchi, loc. cit.

Uno spazio a n dimensioni non può ammettere alcun gruppo di movimenti a « $\frac{n(n+1)}{2}-1$ » *o a* « $\frac{n(n+1)}{2}-2$ » *parametri.*

Oltre ai gruppi già citati, vi sono soltanto i seguenti spazî a quattro dimensioni, che ammettono un gruppo continuo di movimenti:

$$\text{I.}\quad ds^2 = dx_4^2 + \frac{1}{4n_1} e^{-4x_4} dx_1^2 + p_{22} e^{-2x_4} dx_2^2 - 2l_3 p_{22} e^{-2x_4} dx_1 dx_2 -$$

$$- 2l_3 p_{22} x_1 e^{-2x_4} dx_1 dx_3 + 2x_1 p_{22} e^{-2x_4} dx_2 dx_3 + (x_1^2 p_{22} e^{-2x_4} - n_1 p_{22} e^{2x_4}) dx_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle:

$$\frac{\partial}{\partial x_2};\frac{\partial}{\partial x_3};-\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2};-2x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-(l_3 x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$(x_1^2+n_1 e^{4x_4})\frac{\partial}{\partial x_1}+(l_3 x_1^2+l_3 n_1 e^{4x_4})\frac{\partial}{\partial x_2}+(x_2-l_3 x_1)\frac{\partial}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove la l_3, la n_1, e la p_{22} sono costanti.

$$\text{II.}\quad ds^2 = dx_4^2 + p_{11} e^{2x_4} dx_1^2 + 2p_{12} e^{x_4} dx_1 dx_2 + 2p_{13} e^{x_4} dx_1 dx_3 +$$
$$+ p_{22} dx_2^2 + 2p_{23} dx_2 dx_3 + p_{33} dx_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(i=1,2,3);x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_4};(x_1^2-\pi_{11} e^{-2x_4})\frac{\partial}{\partial x_1}-2\pi_{12} e^{-x_4}\frac{\partial}{\partial x_2}-$$

$$-2\pi_{13} e^{-x_4}\frac{\partial}{\partial x_3}-2x_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove le p_{ik} sono costanti, e le π_{ik} sono i complementi algebrici di p_{ik} in $|p_{ik}|$ divisi per il determinante $|p_{ik}|$.

$$\text{III.}\quad ds^2 = dx_4^2 + e^{2\lambda x_4} dx_1^2 + \mu e^{4\lambda x_4} dx_2^2 + 2\mu x_1 e^{4\lambda x_4} dx_2 dx_3 +$$
$$+ (\mu x_1^2 e^{4\lambda x_4} + e^{2\lambda x_4}) dx_3^2$$

dove λ, μ sono costanti, che ammette il gruppo

$$\frac{\partial}{\partial x_2};\frac{\partial}{\partial x_3};\lambda x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+2\lambda x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\lambda x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4};\frac{\partial}{\partial x_1}-$$

$$-x_3\frac{\partial}{\partial x_2};x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$$

IV. Gli elementi lineari (dove con λ, n, l indichiamo delle costanti),

$$ds^2 = dx_4^2 + \varphi\, dx_1^2 + \psi\, dx_3^2 + e^{2x_1}[(1-n^2)\varphi + \psi n^2] dx_2^2 + 2n\psi e^{x_1} dx_2 dx_3$$

dove è rispettivamente $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$ oppure $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}\ e^{2\lambda x_4}$

oppure $n = 0$, $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \dfrac{\cosh^2(l_3 \lambda_{25} x_4 + \text{cost.})}{l_3^2}$ oppure $\varphi = \text{cost.}$, $n = 0$, $\psi = -\left(\dfrac{1}{\lambda_{25} x_4 + n_3}\right)^2$ ammettono pure dei G_5. Questi G_5 contengono tutti il G_4 generato dalle:

$$-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n}{1-n^2} e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} ; -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} ; \frac{\partial}{\partial x_2} ; \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

La quinta trasformazione del corrispondente G_5 è rispettivamente

$$\frac{\partial}{\partial x_4} ; \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} ; e^{\lambda_{25} x_2} \left[l_3 \operatorname{tangh} (l_3 \lambda_{25} x_4 + \text{cost.}) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right] ;$$

$$e^{\lambda_{25} x_2} \left[\frac{1}{\lambda_{25} x_4 + n_3} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right]$$

V. Quattro elementi lineari riducibili ai precedenti per via immaginaria.

VI. $$ds^2 = dx_4^2 + \varphi dx_1^2 + \psi dx_3^2 + \varphi e^{2x_1} dx_2^2$$

dove φ, ψ sono costanti non nulle. Esso è un caso particolare di uno degli spazî IV e oltre al corrispondente G_5 ammette la

$$x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

VII. Lo stesso elemento lineare che al secondo tipo del caso IV, dove però $\psi = -\dfrac{1}{2\lambda n_3} e^{2\lambda x_4}$. Esso ammette anche la:

$$\left(\lambda \frac{x_3^2}{2} + n_3 e^{-2\mu x_4}\right) \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

VIII. $$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + e^{2x_2} (dx_3^2 + dx_4^2) .$$

Esso ammette il G_7 generato dalla $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ e dal G_6 (intransitivo) che trasforma in sè la forma quadratica a curvatura costante

$$dx_2^2 + e^{2x_2} (dx_3^2 + dx_4^2) \quad (^1).$$

Nella Memoria qui in parte riassunta studio poi quale è il gruppo totale effettivo a cui appartengono gli S_4 già determinati per valori generici delle costanti di integrazione e particolarmente il caso più difficile degli S_4 che ammettono un G_4 transitivo: e si ottiene con una discussione piuttosto difficile (perchè al calcolo effettivo non si può in alcuni casi certo ricorrere)

(1) Vi è poi un altro spazio riducibile a questo per via immaginaria.

che vi sono soltanto i seguenti G_4 transitivi tali che tutti gli spazî che ammettono uno di essi ammettono un gruppo più ampio e cioè il G_4 generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, 3, 4),$$

i cui spazî corrispondenti sono euclidei e il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, 3), \; x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

i cui spazî corrispondenti (indicando con le « h » delle costanti)

$$ds^2 = dx_4^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + 2h_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2x_4\, dx_2\, dx_3 + \\ + 2(h_{12}\, x_4 + h_{13})\, dx_1\, dx_3 + (x_4^2 + h_{33})\, dx_3^2$$

ammettono anche la

$$h_{13}\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{1 - h_{12}^2}{2} x_4^2 - h_{12}\, h_{13}\, x_4\right) - \mathrm{H} \frac{x_3^2}{2}\right] \frac{\partial}{\partial x_2} - \\ - (1 - h_{12}^2)\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + \mathrm{H}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove $\mathrm{H} = h_{33} - h_{33}\, h_{12}^2 - h_{13}^2$ è il discriminante (non nullo) della forma.

Chimica. — *Su di un probabile nuovo ossido dell' azoto*. Nota preliminare del dott. DEMETRIO HELBIG, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Facendo passare una serie di scariche elettriche attraverso l'aria liquida, ho ottenuto la formazione d'una sostanza solida a quella temperatura, fioccosa, di colore verdastro.

Questo corpo è estremamente instabile. Anche a temperatura assai bassa si decompone, sviluppando vapori rutilanti. La scomposizione, in certi casi, si fa con esplosione, accompagnata da fenomeno luminoso.

Tanto le condizioni in cui il corpo si forma, quanto i suoi caratteri, dimostrano essere quella sostanza un ossido dell' azoto: ossido, le cui proprietà differiscono da quelle di tutte le combinazioni dell' azoto con l' ossigeno finora ben conosciute.

Mi riservo di riferire fra breve circa il risultato delle indagini in corso, tendenti a determinare la composizione di questa sostanza, e di esporre più estesamente le condizioni sperimentali richieste per la sua preparazione.

Anatomia. — *Osservazioni sopra lo sviluppo del corpo calloso e sui rapporti che esso assume colle varie formazioni dell'arco marginale nel cervello del maiale e di altri mammiferi domestici.* Nota del dott. PRIMO DORELLO, presentata dal Socio TODARO.

Tutti gli autori, i quali si sono occupati dello sviluppo del corpo calloso, vanno d'accordo nell'ammettere che esso si formi in un'area, nella quale le pareti emisferiche mediali si saldano tra loro: l'accordo però non esiste sulla esatta posizione di questa area di saldamento. Secondo Schmidt (1), l'abbozzo del corpo calloso s'avanza tra i due archi marginali, ed allora l'arco marginale interno forma il trigono col setto pellucido e si continua innanzi colla lamina terminale ispessita, che forma i pilastri anteriori del fornice. Secondo Blumenau (2) il corpo calloso si forma a livello dell'arco marginale esterno e, siccome in corrispondenza del corpo del fornice manca il solco fimbriodentato, quivi si ha una fusione primitiva tra fornice e corpo calloso. Martin (3), che ha studiato l'argomento in embrioni di gatto, sostiene che la massa ventrale del corpo calloso si forma da fibre, che decorrono nell'arco marginale interno, lo splenio da fibre, che vanno da un lato all'altro passando tra i due archi marginali, la massa del corpo calloso ed il ginocchio da fibre, che attraversano l'arco marginale esterno: egli, rilevando che, mentre nell'uomo la fessura d'ippocampo corre attorno allo splenio dorsalmente, nel gatto invece termina ventralmente allo splenio, viene a concluderne che non sono ammissibili *comparazioni immediate del corpo calloso e delle formazioni derivate dall'arco marginale tra l'uomo e gli animali domestici, e che, almeno nel gatto, il solco sopracallosale non può essere considerato come prolungamento della fessura d'ippocampo.* A causa di questa grande divergenza nei risultati, il Prenant (4) crede che il corpo calloso possa formarsi in punti differenti dell'arco marginale, e che perciò le formazioni derivate da questo arco possano trovarsi secondo gli animali o al di sopra o al di sotto del corpo calloso.

(1) Schmidt, *Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des Gehirns,* in: Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XI, 1862.

(2) Blumenau, *Zur Entwicklungsgeschichte und feineren Anatomie des Hirnbalkens,* in: Arch. mikr. Anat. Bd. XXXVII, 1891.

(3) Martin, *Zur Entwicklung des Gehirnbalkens bei der Katze,* in: Anat. Anzeiger. Bd. IX (S. 156-162, S. 472-476). — *Bogenfurche und Balkenentwickelung bei der Katze,* in: Jeneische Zeitschr. f. Naturw. Bd. XXIX, 1894.

(4) Prenant, *Éléments d'Embryologie de l'homme et des vertébrés.* V. II, 1896.

Data la grande precocità colla quale si formano nei mammiferi il solco arcuato ed il fimbriodentato, e dati tutti gli altri caratteri per cui questi solchi assumono un significato di valore morfologico molto più alto, che non sia quello degli altri solchi, sembrava poco ammissibile una differenza di comportamento così notevole nei varî gruppi di mammiferi. Ed è perciò che mi sono proposto di determinare con esattezza il campo, nel quale si svolgono i fenomeni di origine e di accrescimento del corpo calloso del maiale.

Per tale studio mi sono valso di una collezione di circa cento cervelli embrionali, che ho potuto raccogliere nel periodo di due anni.

Nella presente Nota preliminare mi limito ad esporre i principali risultati ottenuti tanto coll'esame macroscopico, che col microscopico.

In embrioni molto giovani, cioè della lunghezza di 38 mm., nella faccia mediale degli emisferi si vede un solco curvilineo ininterrotto, che è il solco arcuato: questo ordinariamente va distinto in anteriore, per la porzione che si trova sulla parte piana della faccia mediale, ed in posteriore, per la porzione situata sulla parte escavata. A quest'epoca il solco arcuato anteriore è molto più profondo del posteriore e nel punto di passaggio dall'una all'altra porzione si ha la minima profondità. Nel seguito dello sviluppo, mentre il solco arcuato posteriore si va approfondando sempre più, l'anteriore invece diviene sempre più superficiale, tantochè negli embrioni di centimetri 8 talvolta sembra scomparso. Però anche in quest'epoca, se il cervello sia stato tenuto per qualche tempo in alcool assoluto, esso è bene visibile. Intanto è comparso un nuovo solco, cioè il fimbriodentato, che divide l'arco marginale in due archi; uno esterno o giro dentato, l'altro interno o fimbria.

Se noi osserviamo la faccia mediale degli emisferi in un embrione di 8 centimetri, troviamo che il solco arcuato, cominciando verso l'apice del lobo piriforme, si estende per tutta la parte escavata e poi si continua ininterrotto, ma assai attenuato, lungo la parte piana decorrendo parallelamente ed un po' al di sopra dell'abbozzo del corpo calloso. Il solco fimbriodentato decorre immediatamente sotto e parallelamente al precedente e giunto sulla parte piana della faccia mediale emisferica, costeggia quell'ispessimento della parte superiore della lamina terminale, in cui decorrono i fasci fibrosi del corpo calloso. Sicchè a quest'epoca l'arco marginale si estende ininterrotto e sempre limitato da due solchi dall'apice del lobo piriforme fino al davanti della estremità anteriore dell'abbozzo del corpo calloso. L'arco marginale interno nasce anche esso verso l'apice del lobo piriforme e, delimitato dal solco fimbriodentato e dalla fessura coroidea, decorre parallelo all'arco esterno finchè giunto al di sopra del foro di Monro, si slarga e si continua direttamente nella lamina terminale. Il suo margine inferiore, si continua in quel rilievo che delimita superiormente e medialmente il foro di Monro, e che più tardi dà luogo ai pilastri anteriori del fornice. Il suo margine superiore si con-

tinua col corrispondente di quell' ispessimento della lamina terminale, in cui si è sviluppato il corpo calloso, e perciò con quella sottile porzione di tale ispessimento, che riveste la faccia superiore del corpo calloso e che più tardi darà luogo all' indusio grigio. Il corpo calloso si presenta assai piccolo, appiattito dall' alto al basso, con una estremità anteriore libera arrotondata, con una estremità posteriore, la quale viene ad impiantarsi e perdersi nel corpo dell' arco marginale interno, nel punto in cui questo passa al di sopra del foro di Monro.

Negli embrioni di cent. 11 si scorge ancora che l' arco marginale esterno si estende ininterrotto dall' apice del lobo piriforme fino all' estremo anteriore del corpo calloso e così pure ininterrotti sono i due solchi che lo limitano, cioè il solco arcuato ed il fimbriodentato; però la parte dell' arco esterno, che si trova in rapporto col corpo calloso, è molto meno sviluppata della restante. L' estremità posteriore del corpo calloso ora si ripiega per un brevissimo tratto verso il basso e verso l' avanti, e l' estremo anteriore di questa parte, che chiamerò porzione riflessa del corpo calloso, viene ad impiantarsi sulla massa dell' arco marginale interno nel punto in cui questo si ripiega per circondare superiormente il foro di Monro. L' arco marginale interno comincia a presentarsi diviso per un tenue solco in due parti, una esterna, che portandosi verso l' alto sembra per la massima parte perdersi nella porzione riflessa del corpo calloso, una interna che delimita tutta la periferia della fessura coroidea ed oltrepassato il foro di Monro si continua in basso e si perde nella regione mammillare, entrando così nella costituzione delle colonne anteriori del fornice.

Negli embrioni di cent. 12 il corpo calloso si è notevolmente sviluppato, ed il suo sviluppo è avvenuto principalmente nel senso anteroposteriore, sicchè, mentre negli stadî antecedenti esso non raggiungeva la metà posteriore degli emisferi, ora invece occupa tutto il terzo medio dell' asse longitudinale di questi. In tale allungamento il corpo calloso ha sempre seguito la via del solco fimbriodentato, però siccome questo solco si dirige curvilineamente verso il basso, mentre il corpo calloso si porta direttamente verso l' indietro, esso ha sospinto le formazioni che ha incontrato, cioè l'arco marginale esterno ed i due solchi che lo limitano, obbligandole a descrivere una curva attorno allo splenio. Si vede così l' arco marginale esterno portarsi dapprima sotto il corpo calloso e, giunto un millimetro avanti lo splenio, ripiegarsi bruscamente indietro, girare attorno allo splenio e poi lungo la faccia superiore del corpo calloso fino all' estremo anteriore di questo. La porzione posta sotto il corpo calloso è bene sviluppata, giro dentato, la porzione che gira attorno allo splenio, fasciola cinerea, si va invece assottigliando gradatamente man mano che si porta verso l' alto, la porzione che costeggia il corpo calloso, nervi laterali del Lancisi, è la più sottile. La parte riflessa del corpo calloso è aumentata di volume e si continua netta-

mente per ogni lato colla porzione esterna dell'arco marginale interno, mentre che la porzione interna di questo, segue una via ininterrotta dall'apice del lobo piriforme fino alla regione mammillare, costeggiando esternamente la fessura coroidea.

Negli embrioni di centimetri 15 il corpo calloso è ancora aumentato, sicchè occupa i due quinti della lunghezza totale degli emisferi e questo allungamento ha prodotto una maggiore inflessione dell' arco marginale esterno in modo che il giro dentato giunge circa due millimetri innanzi lo splenio. La continuazione del giro dentato colla fasciola cinerea e coi nervi laterali del Lancisi è sempre evidentissima. La porzione riflessa del corpo calloso è aumentata ed insieme colla corrispondente porzione diretta e collo splenio delimita una fessura, che è il ventricolo di Verga. Questa porzione riflessa forma sulla linea mediana il mezzo di unione tra i due archi marginali interni, quando essi non si sono ancora ravvicinati tra loro, rappresentando così l' abbozzo dello psalterium.

Negli embrioni di centimetri 22,5 si trova progredito l' allungamento del corpo calloso specialmente verso l' indietro: innanzi è bene distinto il ginocchio ed il becco. La fasciola cinerea è stata ulteriormente sospinta verso l' indietro, sicchè il giro dentato arriva millimetri 4,5 avanti lo splenio. I nervi laterali del Lancisi si sono molto assottigliati e, siccome la corteccia del giro marginale si è alquanto sollevata, essi ne sono rimasti completamente coperti: sembra allora che il solco arcuato anteriore e la porzione nasale del solco fimbriodentato abbiano confluito in un solco unico, che è il seno callosale: nel fondo di questo però i nervi del Lancisi segnano nettamente la separazione tra i due solchi.

Negli embrioni di centimetri 26 si osservano gli stessi fatti, però più accentuati tantochè il giro dentato arriva 9 millimetri avanti lo splenio, distanza che si trova aumentata solo di poco allo stato adulto. Naturalmente la continuazione tra le varie formazioni derivate dall' arco marginale esterno è sempre evidentissima.

Gli stessi fatti, salvo lievi modificazioni, ho potuto ritrovare sopra cervelli embrionali di altri animali domestici, sui quali ho portato la mia osservazione.

Anche l' esame microscopico dei cervelli embrionali a varie epoche di sviluppo ha confermato pienamente, completandoli, i risultati ottenuti coll' esame macroscopico. In corrispondenza del solco arcuato e fimbriodentato avvengono caratteristiche modificazioni istologiche delle pareti, che si conservano anche là dove il solco macroscopicamente è attenuato o sembra scomparso, e che quindi permettono in ogni modo di riconoscerne la presenza e le particolarità.

Nella presente Nota non mi intratterrò su questi risultati microscopici, riserbandomi di esporre tutti i particolari nella Memoria che pubblicherò quanto prima su tale argomento: accennerò solo che il fatto di trovare atte-

nuato od obliterato in determinate regioni il solco arcuato è solo apparente e dovuto quasi esclusivamente ad una proliferazione dello strato bianco corticale, il quale ispessendosi viene a colmare interamente o quasi il solco: il profilo di questo però è conservato perfettamente dal comportamento dello strato grigio corticale e degli strati sottostanti.

Da quanto ho esposto mi credo autorizzato alle seguenti conclusioni:

1.° L'arco marginale esterno si mantiene assolutamente estraneo alla formazione del corpo calloso; esso si conserva sempre ininterrotto e ben delimitato e dà luogo a tre formazioni, la cui struttura istologica, almeno in origine, è identica: queste tre formazioni sono il giro dentato, la fasciola cinerea ed i nervi laterali del Lancisi. Tutto l'arco originariamente ha una posizione dorsale rispetto al corpo calloso e la conserva sempre tanto nell'uomo, che negli animali domestici da me esaminati. Però in questi ultimi si ha un apparente cambiamento di posizione dovuto al fatto, che, mentre l'arco marginale esterno conserva la sua forma arcuata, il corpo calloso si sviluppa orizzontalmente verso l'indietro e sospinge per un certo tratto innanzi a se le formazioni che incontra, obbligandole a descrivere un'ansa che viene a trovarsi sotto lo splenio: così l'estremità superiore del giro dentato, che forma la branca inferiore dell'ansa, e la fasciola cinerea, che ne forma la branca superiore, acquistano secondariamente e passivamente una posizione ventrale rispetto al corpo calloso.

2.° Il solco arcuato è una formazione, che, se non sempre macroscopicamente, almeno istologicamente si presenta continua per tutta la durata della vita.

3.° Il corpo calloso si sviluppa entro un ispessimento della parte superiore della lamina terminale. Il sottile foglietto di lamina terminale, che permane al di sopra dei fasci fibrosi del corpo calloso e che riveste la faccia dorsale di questa formazione, rappresenta l'abbozzo dell'indusio grigio. Siccome la lamina terminale rappresenta la diretta continuazione verso l'innanzi dell'arco marginale interno, possiamo affermare che il corpo calloso si sviluppa entro la parte anteriore dell'arco marginale interno. Accrescendosi verso l'indietro il corpo calloso dovrebbe avanzarsi entro lo spessore dell'arco marginale interno, però, siccome posteriormente l'indusio grigio è quasi niente sviluppato, effettivamente lo splenio va progredendo lungo il solco fimbriodentato e quivi si presenta per tutto il suo ulteriore sviluppo.

4.° Il corpo calloso si compone di due parti, una dorsale, che è la principale e comprende anche lo splenio ed il ginocchio, ed una ventrale, che io ho chiamato porzione riflessa. Tra queste due porzioni c'è uno spazio a forma di fessura, che è il ventricolo di Verga.

5.° L'arco marginale interno si trasforma interamente in una formazione fibrosa.

Le fibre della porzione più periferica di esso si continuano colla porzione

riflessa del corpo calloso, ove s' incrociano colle corrispondenti dell' altro lato dando luogo al così detto *fornice trasverso*, che macroscopicamente equivale alla lira di David o Psalterium dell' uomo. Invece le fibre interne dell' arco marginale interno hanno sempre un percorso longitudinale e, partite dall'apice del lobo piriforme, costeggiando la fessura coroidea giungono fino alla formazione mammillare.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero Hervé Faye, avvenuta il 4 luglio 1902; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 25 settembre 1900.

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: Pascal Ernesto; per la *Meccanica*: Venturi Adolfo.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: Donati Luigi.

Nella Categoria III, per la *Geologia e Paleontologia*: Parona Carlo Fabrizio.

Nella Categoria IV, per la *Botanica*: Beccari Odoardo; per l'*Agronomia*: Menozzi Angelo; per la *Patologia*: Lustig Alessandro.

Furono eletti Soci stranieri:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: Zeuthen Girolamo; per la *Meccanica*: Lorentz Hendrich Antoon.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: Thalén Roberto.

Nella Categoria IV, per l'*Agronomia*: Wiesner Giulio e De Vries Ugo.

L' esito delle votazioni fu proclamato dal Presidente con Circolare del 13 luglio 1902; le elezioni dei Soci stranieri furono sottoposte all' approvazione di S. M. il Re.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

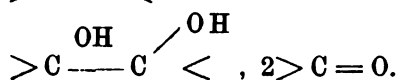
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 3 agosto 1902.

Chimica. — *Ossidazione con acetato mercurico* [1]. Nota preliminare del Corrispondente L. BALBIANO e di V. PAOLINI.

In una Nota pubblicata nella Chem. Zeit. [2] noi abbiamo descritto una nuova reazione atta a scoprire piccole quantità di olefine negli eteri di petrolio: questa reazione ci fu suggerita dai composti che le olefine fanno coi sali mercurici, composti principalmente studiati da G. Denigés [3] e da H. A. Hofmann [4], e trovammo nell'acetato mercurico il reagente adatto al nostro scopo.

L'acetato mercurico, sotto l'influenza dell'olefina, si riduce ad acetato mercuroso insolubile e nello stesso tempo l'anione $-C_2H_3O_2$ tende a costituire coll'acqua la molecola dell'acido acetico $C_2H_4O_2$ e quindi isola l'anione $-OH$ od ossigeno, i quali reagendo sul doppio legame dell'olefina, $>C=C<$ si fissano ed idratano od ossidano i due atomi di carbonio

$$>\overset{OH}{C}-\!\!-C\overset{\diagup OH}{<}\ ,\ 2>C=O.$$

Siccome l'acetato mercuroso è quasi insolubile nell'acqua, la reazione ha un grado notevole di sensibilità, tanto che potemmo scoprire 1 p. di ami-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica farmaceutica dell'Università di Roma.
(2) 1901, pag. 932.
(3) Bull. Soc. ch. Paris 1898, Ser. 3ª, pag. 19, pag. 494.
(4) D. chem. Ges. Ber. 1900, 33, 1353.

lene sciolto in 1000 p. di paraffine liquide o di benzolo. Nel caso speciale del trimetiletilene $(CH_3)^2 : C = CH . CH_3$ ottenemmo aldeide acetica ed acetone e, dai prodotti di ossidazione, potemmo dedurre che l'olefina riscontrata in un petrolio americano era 1-etil-2-dimetiletilene $(CH_3)^2 : C = CH . C_2 H_5$. I nuclei aromatici, benzolo, naftalina, antracene, come i nuclei completamente idrogenati, i nafteni, non reagiscono coll'acetato mercurico, il che dimostra che per esplicare la sua azione ossidante a freddo esso ha bisogno di un così detto « legame etilenico » a cui addizionarsi e dare la combinazione labile che poi si sdoppia in acetato mercuroso ed anione acetico, il quale anione scinde l'acqua in OH od ossigeno.

Già alcuni anni fa I. Tafel (1) adoperò l'acetato mercurico come ossidante, ma in condizioni differenti dalle nostre. Egli riscaldò in tubi chiusi soluzioni acquose di acetati metallici facilmente idrolizzabili e che danno ossidi facilmente decomponibili coll'azione del calore, come gli acetati di argento e di mercurio, e potè così ridurre la piperidina a piridina, la coniina a conirina e la tetraidrochinolina a chinolina. Il nostro nuovo modo di ossidazione è specialmente caratterizzato dal fatto importante che si compie lentamente alla temperatura ordinaria e quindi può dare un aiuto prezioso nelle ricerche delicate di *abbau* delle molecole complesse senza che presumibilmente avvengano trasposizioni molecolari. Con questo scopo, e nell'intento anche di generalizzare la reazione da noi scoperta, ci ponemmo un programma di ricerca; di sperimentare sopra composti ciclici non completamente idrogenati, cioè intermedî fra gli aromatici e i nafteni, ed a ciò servono i terpeni, e secondariamente vedere come si comportassero le catene laterali dei nuclei aromatici quando contengono legame etilenico. In questa Nota riferiamo sommariamente le esperienze fatte ed i risultati ottenuti, quantunque il nostro programma non sia ancora completato, anzi può dirsi appena iniziato.

S-Pinene.

Tra i terpeni abbiamo scelto il S-pinene; il campione adoperato aveva $D_{15^\circ}^{15^\circ} = 0{,}856$, bolliva a 155°-156° ed il potere rotatorio specifico a 15° era $[\alpha]_D = -40^\circ{,}71$.

Esperienze preliminari dimostrano che l'ossidazione del pinene avviene completamente quando si adoperi per 1 p. m. di esso 3 p. m. di acetato mercurico; perciò gr. 50 di S-pinene vennero agitati a temperatura ordinaria con gr. 349 di acetato mercurico sciolti in 1400 cm³ di acqua. La reazione s'inizia subito con deposito di laminette bianche di acetato mercuroso, senza che nella massa si noti un aumento sensibile di temperatura. Si lascia completare la reazione agitando di tanto in tanto ed al terzo giorno i cristalli

(1) D. chem. Ges. Ber. 1892, T. 25, 1619.

di acetato mercuroso assumono una tinta grigiastra per mercurio che si isola. Dopo 7 od 8 giorni di reazione si filtra ed il filtrato colorato in giallo chiaro e che odora fortemente di acido acetico, non dà più pinene alla distillazione in corrente di vapore, si concentra a fuoco diretto a piccolo volume. Si filtra dalle sostanze resinose ed un po' di mercurio che si separa nella concentrazione e si estrae ripetutamente con etere. L'etere lascia alla distillazione un liquido oleoso, da cui viene eliminato l'acido acetico colla distillazione a bagno-maria a pressione ridotta. Il residuo oleoso sottoposto alla distillazione nel vuoto, distilla per la massima parte a 145° alla pressione di 5 mm.

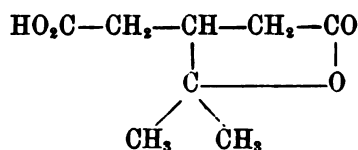
Ripetute analisi di questo composto, fatte cu campioni di diverse preparazioni, assegnano al medesimo la formola $C_{10}H_{16}O_2$.

Il nuovo diossipinene è un liquido quasi scolorito, sciropposo, di un odore aggradevole piccante, che ricorda la canfora: è alquanto solubile nell'acqua, solubile nell'alcool, nell'etere e nel benzolo $d_0^0 = 1,069$: bolle inalterato a 145° alla pressione di 5 mm., a 170°-171° alla pressione di 20 mm. La determinazione crioscopica della soluzione benzolica porta al peso molecolare 174, mentre il calcolato per $C_{10}H_{16}O_2$ è 168. La soluzione benzolica al 10 % è otticamente inattiva. La rendita è all'incirca il 70 % del pinene adoperato.

Questa sostanza è un cheto-alcool, perchè colla idrossilamina dà un'ossima cristallizzata in belle laminette splendenti, solubili nell'alcool, e fondenti a 138°,5; colla semicarbazide dà un semicarbazone cristallizzato in begli aghi bianchi raggruppati, fusibili a 180°. La funzione alcoolica della sostanza è dimostrata dal composto di addizione che dà coll'isocianato di fenile: questo composto cristallizza in prismi aciculari riuniti a rosetta, fusibili a 125°. Inoltre il composto $C_{10}H_{16}O_2$ contiene ancora un legame etilenico, perchè assorbe 2 atomi di bromo, dando un sciroppo facilmente decomponibile con resinificazione. Anche l'ossima assorbe 2 atomi di bromo e dà una resina vischiosa. La questione importante da risolvere era se il CO del nuovo composto fosse un carbonilo aldeidico o chetonico e le seguenti esperienze dimostrano che la sostanza è un chetone. 1° Non colora la fucsina decolorata con acido solforoso. 2° Non si ossida col nero di platino all'aria atmosferica e dopo un contatto prolungato, quattro settimane, si riottiene la sostanza inalterata. 3° Non si ossida coll'ossido di argento umido, anche se il contatto è durato quattro settimane, e si ottiene dopo questo tempo tutta la sostanza inalterata. 4° Non riduce il liquido di Fehling e riduce solo con prolungata ebollizione la soluzione alcalina di argento. 5° Il prof. A. Angeli mi comunica gentilmente che avendo sottoposto la sostanza all'azione del nitroidrossilaminato di sodio, non ebbe formazione di acidi idrossamici come fanno in generale le aldeidi [1].

[1] Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. X, pag. 164.

All'ossidazione permanganica in soluzione acida il composto $C_{10} H_{16} O_2$ dà il 40 % di un acido $C_8 H_{12} O_4$, inoltre acetone e gran quantità di resine. L'acido $C_8 H_{12} O_4$ cristallizza dall'acqua calda in aghi prismatici, trasparenti, che asciugati all'aria fondono a 68°-69° e disseccati nel vuoto sull'acido solforico fondono a 89°. Il sale di calcio $(C_8 H_{11} O_4)^2 Ca$ è anidro; cristallizza in piccoli aghetti solubilissimi in acqua. Questo sale dimostra che il composto è un acido lattonico, e difatti bollito con un eccesso di acqua di barite dà il sale baritico dell'ossidicarboacido $C_8 H_{12} O_5 Ba, 2H_2 O$. I caratteri dell'acido., dei suoi sali, e del sale baritico anzidetto, dimostrano che esso non è altro che l'acido terpenilico:

```
HO₂C—CH₂—CH—CH₂—CO
          |      |
          C——————O
         / \
      CH₃   CH₃
```

Ci proponiamo di studiare i prodotti di idrogenazione di questo cheto alcool e le proprietà del glicole $C_{10} H_{16} (OH)^2$ che speriamo di ottenere, ci permetteranno di decifrarne la costituzione.

Anetolo.

Il dottor A. Nardacci instituì una serie di esperienze sull'azione dell'acetato mercurico sull'anetolo. Adoperando 1 p. m. di anetolo per 1 p. m. di acetato, la reazione s'inizia subito e si ha deposito di acetato mercuroso, che poco a poco in dieci a dodici giorni diventa grigio per mercurio che si separa.

Il prodotto principale della reazione è un glicole $CH_3O.C_6H_4 — C_3H_5 (OH)_2$ cristallizzato in aghi raggruppati a mamelloni, fusibile a 98°. Il derivato diacetilico $CH_3O — C_6H_4 — C_3H_5 (OC_2 H_3 O)_2$ è un liquido sciroppposo che distilla a 210° alla pressione di 41 mm. L'ossidazione del nuovo glicole col misto cromico dà acido anisico.

Safrolo.

Il dottor E. Luzzi studiò di confronto l'azione dell'acetato mercurico sul safrolo e sull'isosafrolo; questo studio presenta un interesse speciale perchè si mettono in reazione i due gruppi C_3H_5 di struttura differente, l'allile $— CH_2 — CH = CH_2$ ed il propenile $— CH = CH — CH_3$. Una differenza interessantissima si verifica subito nel comportamento coll'acetato mercurico; mentre l'isosafrolo che contiene il propenile come l'anetolo dà acetato mercuroso, il safrolo che contiene l'allile non dà acetato mercuroso:

questa potrà essere una reazione qualitativa facile e sensibile per differenziare i due radicali.

L' isosafrolo si ossida coll' acetato mercurico e finora il dottor Luzzi non è ancora riuscito ad ottenere puro il glicole corrispondente, che secondo tutte le apparenze dev' essere identico al composto ottenuto dalla signorina Bruschmakin ([1]) nel laboratorio del prof. G. Wagner.

Il safrolo agitato con soluzione satura di acetato di mercurio si rappiglia in una massa densa sciropposa ed il liquido sovrastante rimane perfettamente limpido. Se il contatto fra le due sostanze dura quattro mesi alla temperatura ordinaria si riesce a separare un composto mercurico al quale l'analisi assegna la composizione rappresentata dalla formola CH_2O_2 $C_6H_3 - C_3H_5 <^{HgC_2H_3O_2}_{OH}$; questo composto cristallizza in croste bianche insolubili nell' acqua e nell' etere, solubili nell' alcool. La soluzione alcoolica coll' aggiunta di etere precipita il composto e su questa proprietà è basato il modo di isolarlo e di depurarlo.

Se invece il contatto fra le due sostanze dura da 8 a 10 giorni, si ottiene un composto mercurico che ha la stessa composizione del precedente, ma che si presenta sotto forma di un sciroppo denso, colorato in giallognolo un po' solubile nell' acqua, solubile nell' alcool, insolubile nell' etere. Tutti e due questi composti idrolizzati con acidi ridanno il safrolo. L' isomeria fra i due prodotti può dipendere dalla posizione reciproca dell' ossidrile e del residuo dell' acetato mercurico, oppure da polimeria; ulteriori ricerche di determinazione del peso molecolare risolveranno la questione.

Anche fra i terpeni abbiamo riscontrato un fatto analogo a quello che si verifica pel safrolo.

Il canfene, un prodotto commerciale fornito dalla casa Schimmel di Lipsia e che distillava fra 155°-156°, non dà riduzione di acetato mercuroso ma invece un composto mercurico cristallino di composizione più complessa.

Estenderemo nel prossimo anno accademico le nostre ricerche al cavicolo isomero allilico dell' anetolo, all' eugenolo ed isoeugenolo, apiolo ed isoapiolo, come pure a diversi altri terpeni.

([1]) Berl. Ber. T. 24, pag. 3490.

Geologia. — *I terreni terziari della provincia di Roma.* Nota del Corrisp. CARLO DE STEFANI.

III. *Miocene superiore.*

Le marne salmastre e i gessi di questo piano sono rappresentati soltanto rimpetto Corneto sulla destra della Marta, sotto la città, sulla spiaggia nel bacino del Mignone, nei dintorni della Torre d'Orlando presso Civitavecchia e nei dintorni della Tolfa. In questo luogo ho trovato larve di *Libellula Doris* H., *Quercus*, *Salix*, *Laurus* ed altre Filliti.

È a tener presente che questo piano o sottopiano ha molto minore estensione del Miocene medio, e che dei gessi e depositi di sale si trovano, non però nella provincia romana, anche in mezzo a quest'ultimo terreno.

IV. *Pliocene.*

Il Pliocene è estesamente rappresentato nella provincia da quasi tutte le sue *facies*, cioè salmastra, littorale e delle laminarie (*Astiano*) e coralligena (*Piacenziano*), e da marne di mare più profondo, non però propriamente abissale, della *facies* che dirò *Vaticana*.

Strati littorali salmastri con *Potamides tricinctum* Brocc., *Giulii* De St. intercalati a quelli prettamente marini, trovansi nei dintorni di Palombara Sabina. L'illustrazione fatta di questi strati dal dotto professore dell'Apollinare sarà apprezzata da chiunque riconosca l'importanza e la scarsità di simili studî stratigrafici analitici sul terziario italiano. I numerosi fossili mostrano che quei terreni sono veramente tipici rappresentanti del Pliocene littorale, e sono certamente più antichi di quelli del Monte Mario presso Roma [1]. Ghiaie e sabbie consimili si estendono a pie' dei monti a nord di Tivoli, nelle colline di Monterotondo, Monte Libretti, sulla sinistra del Tevere, invadendo un poco anche la destra, varî chilometri a monte di Roma. Una *facies* littorale un poco diversa è quella del calcare costituito quasi interamente da *Amphistegina* e talora, da *Lithothamnium*, detto volgarmente *Macco*, che formava scogliere a poca profondità più al largo nel mare libero. Può darsi che nell'estremo confine con la Maremma Grossetana, lungo il Chiarone, rientri nella provincia qualche strato del *Macco* che trovasi pochi passi lontano, a nord-

[1] Non si può dare eccessiva importanza alle stratificazioni diagonali od a parzial interruzioni che siano fra uno strato e l'altro, come necessariamente deve avvenire in tutti i terreni littoranei.

est della Pescia Fiorentina in Toscana. Certamente lo si trova esteso, ricco di Echini, a Corneto, sovrastante alle marne pur plioceniche (1), poi presso il littorale anche sul mare a Palo, e pur sopra le marne da Nettuno ad Anzio. Buoni studî paleontologici ne hanno fatto il Terrigi ed il Meli. Piccoli lembi consimili, con *Lithothamnium*, sono nei dintorni di Viterbo.

Argille turchine sublittorali del tipo *Piacentino* se ne trovano solo nel confine più settentrionale con Grosseto al di là delle formazioni vulcaniche Vulsinie e sotto queste, a nord di Proceno, e poco lontano dalle due sponde del Tevere a valle di Orte.

Sono invece molto estese le marne bianche di mare profondo a *Pecten oblongus* Phil. (= *P. Comitatus* Font.) e *P. Angelonii* Mgh., che più a settentrione, lungo tutto il littorale ligure, principiando a Ceriale anzi in Provenza, seguitando per Albenga, Savona, Albissola, Arenzano, Borzoli, arrivano fino a Genova in Via Roma, ripigliano sul Tirreno in Val di Fine, poi, dopo altra lunga interruzione, non lungi dal mare, nella provincia romana e per lo più sotto ai calcari ad *Amphistegina*. Quivi li troviamo sotto Corneto, nei monti del Sasso sotto la Trachite, poi sul littorale da Anzio a Nettuno, donde un piccolissimo lembo riapparisce lungo la ferrovia per Roma verso il casello 30 presso Carroceto.

Questi lembi di Nettuno sono fra gli ultimi che s'incontrano lungo mare nel versante tirreno, dove, più oltre, fino alla Calabria meridionale, il Pliocene è rappresentato da formazioni littorali, contrasto ragguardevole con quanto si verifica lungo mare per tutto il versante adriatico e jonio, cominciando da Mongardino e s. Ruffilo nel Bolognese, fino al Capo delle Armi.

Dentro terra, in provincia, troviamo questi terreni nei dintorni di Viterbo, della Manziana, e ad ovest di Bracciano (2). Ma il giacimento più classico è quello del colle Vaticano sulla destra del Tevere, i cui fossili vennero studiati principalmente dal Ponzi. Le stesse argille si trovarono anche sulla sinistra del Tevere in Roma, principalmente in piazza di Spagna, ed al Rifornitore presso la via Flaminia fuori porta del Popolo.

Questo terreno forma pure il sottosuolo del vulcano laziale, perchè si trova fra i proietti.

Il Pliocene manca nel bacino del Sacco e del Liri che doveva essere già chiuso, benchè ancora non conformato a lago, dalla parte del mare, e

(1) Nella *Carta della campagna romana* dell'ufficio geologico, il « calcare conchigliare detto Macco » di Corneto distinto con colorazione a sè e giustamente attribuito al Pliocene è troppo esteso ad oriente. Probabilmente per equivoco è poi ripetuta l'indicazione come « calcare ad *Anfistegina* dei dintorni di Cornello » riunito alle « ghiaie e sabbie » del Pliocene superiore » nell'àmbito delle quali la detta roccia non si trova.

(2) Nella *Carta della campagna romana* gran parte di tali marne bianche, come « marne grigie a *Pecten histria* ed *Ostrea cochlear* » sono riunite nella « zona a Congerie » cioè nel Miocene superiore, con gli strati gessosi che non contengono tali fossili.

nella valle dell'Aniene ([1]) a monte di Tivoli, parimente emersa, le cui ghiaie e sabbie prevulcaniche, per quanto mi consta, apparterrebbero al postpliocene inferiore.

Un fatto notevolissimo è la comparsa dei primi fenomeni vulcanici negli strati più alti del Pliocene ora accennato. Alla Mattonaia Falcioni presso Viterbo gli strati più alti delle marne bianche, piene di foraminifere empite da glaucomia e con delicati *Pecten* serbanti ancora sul terreno la posizione primitiva, sono costituiti da intima e indivisibile mescolanza di marna e di finissime polveri di Sanidino, Labradorite, Augite, Biotite, rarissima Magnetite, elementi del sovrastante *Peperino* del vulcano Cimino che il Washington mostrò essere indubbiamente un tufo, come ne dà pure evidente riprova la mescolanza de' suoi elementi con le marne ([2]).

A nord del sistema Vulsinio, a sinistra della strada che scende da Radicofani ad Acquapendente, nei più alti strati delle argille turchine, sono per brevissima altezza straterelli di fossili marini frammentizî, alternanti con altri aventi cristallini di augite, e con altri formati di piccole ghiaiette di

([1]) Il Pliocene indicato nelle valli dell'Aniene e del Liri, dalla *Carte géologique*, è come già dissi, Miocene e in parte Postpliocene.

Lungo il Sacco ed il Liri, le argille turchine e le sabbie gialle di Sgurgola, Pofi, Casamari, Ceprano, Isoletta, Roccasecca, sotto Falvaterra, furono depositate nel più settentrionale, salvo il Casentino o alto Valdarno, di quei bacini pospliocenici chiusi nell'Appennino centrale che in gran parte ha descritto il De Lorenzo, per contrapposto a quelli pliocenici chiusi nell'Appennino settentrionale. Negli strati inferiori incontrasi una *Dreissena* sp. n.: superiormente, p. es. ad Isoletta, troviamo *Helix, Vivipara, Bythinia tentaculata, Bythinella, Limnaea* 2 sp., *Planorbis* 2. sp. *Ancylus, Valvata, Neritina* 2 sp. *Carychium, Pisidium*; sono specie pochissimo e talora punto differenti da quelle odierne.

([2]) Di questa o di vicine località il Clerici dice che nelle marne non è Augite, che vi sono grani di Quarzo, che il Feldspato e la Biotite vi si trovano come nelle marne coetanee del Bolognese, e come nel calcare Pliocenico degli stessi dintorni di Viterbo. Il Sabatini pare che attribuisca a frane la presenza dei materiali vulcanici nell'argilla marina. I due autori debbono avere esaminato una località differente da quella che, del resto in modo esatto, indicai io. In quelle marne non trovasi quarzo, come i materiali vulcanici di quelle marne non sono a me noti nel calcare di Viterbo, nelle marne del Bolognese, del Vaticano nè di alcun altro strato pliocenico italiano. Il *Peperino*, forse in parte caolinizzato, che sovraincombe al Pliocene alla Fornace Falcioni, contiene ancora particelle di argilla, alle quali forse, principalmente, deve il suo aspetto sfatto.

A spiegare i fenomeni della fornace Falcioni non si prestano la negazione del fatto nè la formazione di una frana superficiale di frammenti grossolani che rivesta esteriormente gli strati come altrove si verifica, ma soltanto una terza ipotesi ancora sconosciuta ovvero una delle due seguenti: o una caduta di ceneri d'una vicina eruzione nel fondo del mare pliocenico prossimo alla emersione, od un rimaneggiamento subacqueo, fino a profondità di molti metri, delle marne plioceniche con materiali vulcanici posteriori. La perfetta conservazione di delicatissime conchiglie mi fa ritenere più verosimile la prima delle ipotesi da me fatte, che d'altronde non è in contraddizione con quanto ho osservato nelle vicinanze.

pomice. Anche qui si tratta di una formazione sottomarina, non però di mare profondo come quella della Mattonaia Falcioni, ma littorale, e probabilmente di una eruzione non del tutto subacquea come forse la precedente, ma in parte subaerea. Ad est dello stesso sistema Vulsinio, a Orvieto, quindi non nella provincia ma assai vicino, il confine tra le marne che, attesa la denudazione, non sono ivi lo strato più recente del Pliocene, ed i tufi vulcanici, è segnalato da fatti che mostrano essere stato ivi ne' primi tempi delle eruzioni vulcaniche subaeree il littorale di un grande e profondo bacino acqueo, forse anche del mare. Infatti per lunghissime estensioni, sopra le marne, sono grandi lenti e masse delle medesime marne, poco spostate, secondo me smosse dalle acque non torrentizie sul posto stesso, insieme con grandi massi un poco ruzzolati di rocce leucitiche, alternanti superiormente con ghiaie vulcaniche e calcaree di carattere non torrenziale. Quelli accennati sono dunque tre contatti di tre tipi diversi, diversi poi tutti dai contatti interamente discordanti fra il Pliocene ed i terreni vulcanici che quasi generalmente si notano [1].

Ho inteso il Pliocene, come di solito, nei limiti del cosidetto *Astiano* e del *Piacentino*, escludendo perciò i terreni del Monte Mario che sono discordanti sopra le marne *Vaticane*, e tutti gli altri terreni sedimentarî e vulcanici più recenti, che hanno avuto ed hanno nei dintorni di Roma un manipolo di valenti illustratori.

Aggiungo nella pagina seguente un prospetto dei terreni terziari della provincia di Roma.

Come si vede l'Eocene estesissimo nella sua *facies nord-appenninica* è quasi mancante fuori dell'Appennino settentrionale: il Miocene inferiore manca affatto: il Miocene superiore è scarso o mancante, ciò che non può sorprendere attesa l'esigua durata della formazione; il Pliocene manca nella valle del Sacco e del Liri. Poco scientifico sarebbe il sorprendersi di tali mancanze quand'anche ci paresse non arrivare a spiegarle. D'altra parte non mancano spiegazioni verosimili. L'Eocene manca od è estremamente ridotto negli alti e profondi mari lontani dalle regioni emerse Alpine e Tirrene: durante il Miocene inferiore è possibile che la regione fosse emersa; chè, ai quattro punti cardinali della provincia stanno gli strati lignitiferi e con mammiferi terrestri del Vicentino, di Cadibona in Liguria, di Agnana in Calabria, di Promina in Dalmazia. Durante il Pliocene la valle del Sacco doveva essere emersa e dotata di facile scolo, onde non vi si formò nemmeno un

[1] Il Clerici ha indicato ghiaie di rocce vulcaniche e di travertino intercalate alle argille plioceniche, al Rifornitore lungo la via Flaminia presso Roma. Ebbi la ventura di visitare quel luogo, come poi i dintorni di Palombara e della Magliana, col chiaro geologo. A me le ghiaie d'origine alluvionale fluviale parvero semplicemente accumulate a ridosso delle argille, ed assai più recenti di queste come il travertino che talora, fra le altre ghiaie, contengono.

lago pliocenico come in altre valli chiuse dell'Appennino settentrionale, e come si formò poi nel Postpliocene.

	Monti di Civitavecchia e contermini	Valle dell'Aniene e del Tevere	Valle del Sacco e del Liri
Pliocene	Principio delle eruzioni Cimine. Calcari ad *Amphistegina*. Marne bianche.	Principio delle eruzioni Vulsinie. Ghiaie, sabbie gialle, strati con fossili salmastri. Argille turchine. Marne bianche.	
Miocene superiore	Marne gessifere a Filliti e *Libellula Doris*.		
Miocene medio	Calcari a Briozoi della valle del Chiarone; Calcare terroso a *Pecten* nei Monti della Tolfa.	Marne, arenarie, puddinghe; Calcari compatti; Calcari a *Pecten*, *Miogypsina*, *Amphistegina*, di Subiaco. Calcari a Briozoi.	Marne, arenarie, brecciole. Calcari compatti. Calcari a *Miogypsina* di S. Sozio. Calcari a Briozoi.
Eocene superiore	Calcari, galestri e tufi ofiolitici di Trevinano,	Calcari a *Orbitoides* e piccole *Nummulites* della Valle del Licenza e di Castel Madama.	Calcari a *Orbitoides* di Veroli etc.?
Eocene medio	Calcari marnosi a *Nummulites subirregularis*, *N. curvispira* Mgh. Schisti, Pietraforte con *Inoceramus*, *Bathysiphon* etc.	Calcari a *Nummulites Lucasana* Defr. e *N. perforata* D'Orb. della Valle del Licenza e di Guadagnolo.	
	Arenaria di Furbara, Santa Severa, etc. Calcari marnosi.	Calcari a *Nummulites Lamarcki* D'A., *N. laevigata* Lck., *N. elegans* Sow., *N. planulata* Lck., della Valle del Licenza.	

Fisica matematica — *La teoria elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Corrispondente Ricci.

Nel risolvere due particolari questioni di induzione elettrodinamica in base alla teoria (integrale) di Helmholtz-Hertz, ho incidentalmente asserito [1] che alla teoria hertziana pura manca qualche elemento (due condizioni ai limiti) perchè quelle questioni, e così il problema generale dell'induzione elettrodinamica, risultino matematicamente determinati.

Mi affretto a dichiarare che una tale affermazione è inesatta.

Un più maturo esame mi ha infatti mostrato che le condizioni in superficie scaturiscono ovviamente da un passaggio al limite, che è nello spirito della teoria di Hertz.

Nella presente Nota metto in chiaro questo punto, desumendone la univoca determinazione del problema generale dell'induzione elettrodinamica entro l'àmbito della teoria hertziana pura.

Ne consegue l'identità delle teorie integrali di Helmholtz-Hertz e di Maxwell di fronte ai fenomeni di induzione: l'una e l'altra si accordano infatti nel campo abbracciato dalle equazioni differenziali di Hertz.

Che le teorie di Helmholtz Hertz e di Maxwell conducessero ai medesimi risultati, per quanto concerne l'accennata classe di problemi, avevo già avvertito a proposito delle due particolari questioni da me discusse; ma io supponevo allora che si trattasse di un campo, comune bensì alle due teorie integrali, ma non in pari tempo contenuto nelle equazioni differenziali di Hertz. È invece proprio questa la ragion vera della coincidenza.

A rigore si potrebbe dunque fare a meno delle teorie integrali, anche per quanto attiene ai fenomeni di induzione. Ma non è, a mio credere, opportuno, relegarle senz'altro tra i ferravecchi, poichè, nelle applicazioni particolari (e le due sopra ricordate ne sono esempio), si può spesso valersene con notevole vantaggio per semplificare la trattazione matematica.

1. *Comportamento delle forze elettromagnetiche nell'attraversare una superficie conduttrice.*

[1] *Sur le champ électromagnétique* etc., Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Ser. III, T. IV, 1902, pag. 6-7; *Influenza di uno schermo conduttore*, ecc., in questi Rendiconti, Nota I del 16 febbraio u. s., pag. 164-165; nonchè Nuovo Cimento, fascicolo di giugno, § 7 della notizia ivi inserita.

Sia τ uno strato conduttore di spessore finito $2h$, limitato da due piani paralleli $z = -h$, $z = h$; siano Q_1 e Q_2 due punti di questi piani, situati sopra una medesima perpendicolare ad entrambi.

Designino, colle solite notazioni, X, Y, Z; L, M, N le componenti delle forze elettrica e magnetica in un generico punto Q dello strato conduttore τ; $X_1, \ldots, N_1$; $X_2, \ldots, N_2$ i loro valori limiti in Q_1 e Q_2 rispettivamente (supposto, beninteso, che Q vi tenda senza uscire da τ).

Ritenuto che τ sia un conduttore isotropo, e dette ε, μ, λ le sue costanti caratteristiche, saranno soddisfatte entro τ le equazioni fondamentali di Hertz

$$\left\{\begin{aligned} A\mu \frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} A\varepsilon \frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX, \\ A\varepsilon \frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY, \\ A\varepsilon \frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ, \end{aligned}\right.$$

dove, come di consueto, si rappresenta con A la inversa della velocità della luce nell' etere.

Dalle prime due di ciascun gruppo, integrando rispetto a z fra $-h$ e h, si ottiene

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} X_2 - X_1 &= \cdots, \\ Y_2 - Y_1 &= \cdots; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} L_2 - L_1 &= -4\pi A \int_{-h}^{h} \lambda Y dz + \cdots, \\ M_2 - M_1 &= 4\pi A \int_{-h}^{h} \lambda X dz + \cdots, \end{aligned}\right.$$

nelle quali i termini omessi convergono a zero con h, semprechè, come è nella natura delle cose, si ritengano le forze elettromagnetiche e loro derivate prime finite entro τ, e dotate di limite superiore finito, anche al decrescere indefinito dello spessore h.

Il caso limite di una superficie (piana) conduttrice si ha dal nostro strato τ, supponendo che, al decrescere indefinito di h, sia finito e diverso da zero il limite dell' integrale $\int_{-h}^{h} \lambda \, dz$. Designando questo limite con $\frac{1}{A^2 R}$, A^2R starà a rappresentare la resistenza unitaria della superficie, espressa in

unità elettrostatiche, e quindi R la stessa resistenza unitaria, valutata in unità elettromagnetiche.

Per definizione, X_1 e Y_1 sono i valori limiti in Q_1 delle componenti tangenziali della forza elettrica, quando si tende a Q_1 da τ; ma, attesa la continuità delle componenti tangenziali, nel passaggio, anche brusco, fra due generici mezzi [1], è lecito altresì risguardare X_1, Y_1 come i valori limiti in Q_1, quando vi si tende dall'esterno dello strato. Lo stesso per L_1, M_1, e per X_2, Y_2; L_2, M_2 rispetto a Q_2.

Ciò posto, passando al limite per $h = 0$, ricaviamo dalle (1):

$$X_1 = X_2 , \; Y_1 = Y_2 ,$$

le quali esprimono che:

Le componenti tangenziali della forza elettrica rimangono continue anche attraverso superficie conduttrici.

Ho enunciato addirittura la proposizione per una superficie qualunque, poichè la generalizzazione dal caso del piano si fa con procedimento ovvio e ben noto.

Designando con X, Y i valori comuni di X_1, X_2; Y_1, Y_2, le (2), al limite, danno:

$$\begin{cases} L_2 - L_1 = -\dfrac{4\pi}{AR} Y , \\ M_2 - M_1 = \dfrac{4\pi}{AR} X , \end{cases}$$

le quali esprimono che *la forza magnetica tangenziale subisce una brusca variazione, definita da un vettore proporzionale alla forza elettrica e diretto normalmente ad essa.*

Importa osservare che, dalla direzione della forza elettrica a quella del vettore rappresentante la discontinuità, si ruota attorno all'asse z nel verso (negativo) $y\,x$.

Dopo ciò si passa senza difficoltà al caso di una superficie conduttrice qualsiasi.

Detti infatti α, β, γ i coseni direttori della normale in un suo punto generico Q; $X^{(T)}$, $Y^{(T)}$, $Z^{(T)}$ le componenti della forza elettrica tangenziale in Q (che, per quanto s'è visto, hanno in Q valore limite determinato, da qualunque parte vi si tenda); $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ gli incrementi bruschi, che subiscono le componenti della forza magnetica tangenziale, quando si attraversa la superficie nella direzione positiva della normale, la relazione geometrica,

[1] Hertz, *Ueber die Grundgleichungen der elektrodynamik für ruhende Körper.* Ges. Werke, B. II, pag. 221; ovvero, in traduzione italiana, Nuovo Cimento, terza serie, T. XXVIII, 1890, pag. 204-205.

testè sostanzialmente enunciata, fra i due vettori $(X^{(T)}, Y^{(T)}, Z^{(T)})$, $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$, si esprime mediante le formule:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{4\pi}{AR}(\beta Z^{(T)} - \gamma Y^{(T)}), \\ \mathcal{M} = \dfrac{4\pi}{AR}(\gamma X^{(T)} - \alpha Z^{(T)}), \\ \mathcal{N} = \dfrac{4\pi}{AR}(\alpha Y^{(T)} - \beta X^{(T)}). \end{cases}$$

Sarebbe facile caratterizzare anche il comportamento delle componenti normali. Lascio però di farlo, perchè, come vedremo, non è necessario, per lo scopo nostro, fissarlo a priori: esso rimane all'incontro necessariamente determinato dagli altri dati del problema.

2. *Posizione del problema generale della induzione elettrodinamica. Sua univocità.*

Consideriamo un campo elettromagnetico, definito in un dato intervallo di tempo t_0, t_1.

Sieno X', Y', Z' le componenti della forza elettrica; L', M', N' le componenti della forza magnetica.

Supposto, per fissar le idee, che la sede del campo sia un dielettrico indefinito S, impolarizzabile e in quiete, $X', \ldots, N'$ saranno soluzioni del sistema

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}, \\ A\dfrac{dM}{dt} = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx}, \\ A\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy}; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} A\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy}, \\ A\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz}, \\ A\dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx}, \end{cases}$$

le quali potranno del resto presentare singolarità (fisse o variabili con t, isolate, a una, a due, o anche a tre dimensioni), che non interessa di specificare.

Se si introducono nel campo dei conduttori, il campo rimane evidentemente modificato.

Supponiamo si tratti di una superficie, o, più in generale, di un sistema di superficie conduttrici, σ, non comprendenti alcun posto singolare delle

$X', \dots, N'$. Indichiamo con X, Y, Z; L, M, N le componenti delle forze elettromagnetiche del campo così modificato.

Mi propongo di far vedere che, noti i valori di $X, \dots, N$ in un istante t_0, la teoria di Hertz basta a determinarli per ogni altro valore di t (dell'intervallo, entro cui si risguarda assegnato il campo induttore $X', \dots, N'$).

A questo scopo osservo anzitutto che le differenze

$$X_1 = X - X', \qquad Y_1 = Y - Y', \qquad Z_1 = Z - Z';$$
$$L_1 = L - L', \qquad M_1 = M - M', \qquad N_1 = N - N'$$

(componenti delle forze elettromagnetiche dovute all'induzione) debbono essere, per natura loro, soluzioni delle (I), (II), regolari [1] in ogni punto dello spazio, non appartenenti alle σ, e nulle all'infinito come $\frac{1}{r}$ almeno $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$.

In un generico punto Q di σ, le $X', \dots, N'$ si comportano, per ipotesi, regolarmente; le $X, \dots, N$ debbono presentare i caratteri, rilevati nel precedente paragrafo.

Potremo dunque ritenere, per le differenze $X_1, \dots, N_1$:

a) Le componenti $X_1^{(T)}, Y_1^{(T)}, Z_1^{(T)}$ della forza elettrica tangenziale (di origine induttiva) rimangono continue anche attraverso le σ.

b) Le componenti della forza magnetica tangenziale (indotta) subiscono, quando si attraversano le σ nel senso della normale positiva, le discontinuità:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_1 = \dfrac{4\pi}{AR}(\beta Z^{(T)} - \gamma Y^{(T)}) = \dfrac{4\pi}{AR}(\beta Z_1^{(T)} - \gamma Y_1^{(T)}) + c_1, \\ M_1 = \dfrac{4\pi}{AR}(\gamma X^{(T)} - \alpha Z^{(T)}) = \dfrac{4\pi}{AR}(\gamma X_1^{(T)} - \alpha Z_1^{(T)}) + c_2, \\ N_1 = \dfrac{4\pi}{AR}(\alpha Y^{(T)} - \beta X^{(T)}) = \dfrac{4\pi}{AR}(\alpha Y_1^{(T)} - \beta X_1^{(T)}) + c_3, \end{cases}$$

designandosi ordinatamente con c_1, c_2, c_3 le quantità cognite (funzioni regolari dei punti di σ)

$$\frac{4\pi}{AR}(\beta Z'^{(T)} - \gamma Y'^{(T)}),$$
$$\frac{4\pi}{AR}(\gamma X'^{(T)} - \alpha Z'^{(T)}),$$
$$\frac{4\pi}{AR}(\alpha Y'^{(T)} - \beta X'^{(T)}).$$

La direzione positiva α, β, γ della normale si intende scelta con criterio arbitrario in un punto di ciascuno dei pezzi, di cui si compone il

[1] Si chiama qui regolare una funzione di x, y, z, t finita e continua assieme alle sue derivate prime e seconde.

sistema σ (in un punto solo, nel caso tipico di un' unica superficie): essa resta allora fissata per continuità in ogni altro punto Q.

Ancora, si osservi che, se $X_1^+, \dots, N_1^+$ rappresentano i valori limiti delle componenti $X_1, \dots, N_1$, quando si tende a Q dalla regione positiva (quella verso cui è rivolta la direzione positiva della normale); $X_1^-, \dots, N_1^-$ gli analoghi valori limiti, quando si tende a Q dalla regione negativa, sussiste l' identità

$$\begin{vmatrix} X_1^+ & Y_1^+ & Z_1^+ \\ L_1^+ & M_1^+ & N_1^+ \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1^- & Y_1^- & Z_1^- \\ L_1^- & M_1^- & N_1^- \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^{(T)} & Y_1^{(T)} & Z_1^{(T)} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

Per verificarlo, basta tener presente che le differenze $X_1^+ - X_1^{(T)}$, $Y_1^+ - Y_1^{(T)}$, $Z_1^+ - Z_1^{(T)}$, e le tre analoghe $X_1^- - X_1^{(T)}$, ecc., sono proporzionali ad α, β, γ, talchè è lecito, nei due determinanti nel primo membro sostituire $X_1^{(T)}, Y_1^{(T)}, Z_1^{(T)}$ agli elementi della prima riga; sommando allora i due determinanti, trattando nello stesso modo le componenti della forza magnetica e ricordando il significato di $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_1$, risulta appunto il secondo membro.

Ciò posto, ricaviamo per le nostre componenti $X_1, \dots, N_1$ la formula di Poynting: moltiplichiamo cioè le (I), (II) (scrittovi X_1 per X, ecc.) ordinatamente per $\frac{X_1}{4\pi A}, \frac{Y_1}{4\pi A}, \dots, \frac{N_1}{4\pi A}$, e sommiamo, integrando a tutto il campo S. Con ovvie integrazioni per parti, in cui bisogna naturalmente aver riguardo alle superficie di discontinuità σ, posto per brevità

$$\Omega = \int_S \left\{ \frac{1}{8\pi} (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) + \frac{1}{8\pi} (L_1^2 + M_1^2 + N_1^2) \right\} dS, \tag{4}$$

si ottiene

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{4\pi A} \int_\sigma \left(\begin{vmatrix} X_1^+ & Y_1^+ & Z_1^+ \\ L_1^+ & M_1^+ & N_1^+ \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} X_1^- & Y_1^- & Z_1^- \\ L_1^- & M_1^- & N_1^- \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{vmatrix} \right) d\sigma = -\frac{1}{4\pi A} \int_\sigma \begin{vmatrix} X_1^{(T)} & Y_1^{(T)} & Z_1^{(T)} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma.$$

Integrando ancora fra t_0 e t e designando con Ω_0 il valore di Ω per $t = t_0$, risulta

$$\Omega - \Omega_0 + \frac{1}{4\pi A} \int_{t_0}^t dt \int_\sigma \begin{vmatrix} X_1^{(T)} & Y_1^{(T)} & Z_1^{(T)} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma = 0. \tag{5}$$

Appoggiandosi a questa identità, è facile riconoscere che non possono esistere due distinti sistemi di integrali delle (I) (II), regolari in tutto lo spazio (escluse al più le σ), nulli (come $\frac{1}{r}$ almeno) all'infinito, soddisfacenti sopra le σ alle due condizioni a), b), e coincidenti per $t = t_0$: in altri termini, che le differenze di due sistemi siffatti si annullano identicamente.

Infatti queste differenze costituiscono un sistema integrale delle (I), (II), che si comporta come gli altri fuori delle σ, soddisfa sopra le σ alla a) e alle (3), dove si ponga $c_1 = c_2 = c_3 = 0$; infine si annulla per $t = t_0$.

La (5) assume allora l'aspetto

$$\Omega + \frac{1}{A^2 R} \int_{t_0}^{t} dt \int_{\sigma} (\mathcal{A}_1^2 + M_1^2 + N_1^2)\, d\sigma = 0 .$$

Siccome tutti gli elementi di integrale sono positivi, questa relazione esige che sia zero separatamente ciascun elemento, il che implica l'identico annullarsi delle sei differenze. C. D. D.

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota IV di A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

Presento in questa Nota i risultati di alcune misure ed esperienze, le quali completano quelle esposte nelle Note precedenti (Rendiconti (5) XI, 1° sem. pp. 57, 242, 369; 1902) e che riguardano sempre i fenomeni di radioattività indotta sopra lamine metalliche mediante l'effluvio.

Esperienze nell'aria atmosferica.

Influenza della durata dell'effluvio. — In primo luogo fu stabilito che l'attivazione è indipendente dalla natura del metallo che costituisce la lamina o gli aghi affacciati, dalla distanza fra aghi e lamina e dalla intensità dell'effluvio stesso, che misuravo con un galvanometro inserito nel circuito; unica condizione rimanendo che si avesse effluvio accompagnato da vento elettrico, avendosi poi sensibilmente gli stessi risultati operando sia con una macchina elettrostatica a 38 dischi di vetro del diametro di 30 cm. o con un'ordinaria macchinetta Whimshurst a due dischi. Ciò posto passai a determinare come varii l'intensità dell'attivazione con la durata del processo di attivazione stesso, cioè dell'effluvio. Ho operato in queste misure in una stanza di dimensioni medie (mc. 175) colle finestre chiuse.

I numeri che riporto per caratterizzare l'intensità dell'attivazione indicano i secondi impiegati dalla lamina attivata delle dimensioni di centimetri 10×14 e mantenuta ad un potenziale costante di 20 Volt per caricare un'altra lamina, ad essa parallela, alla distanza di 6 cm. e collegata ad un elettrometro, dal potenziale 2 a quello di 6 Volt. Il numero di secondi è quindi inversamente proporzionale all'intensità I dell'attività. La capacità del sistema era di cm. 13,6.

Lamina positiva, effluvio negativo.

Durata dell'effluvio	15′	30′	45′	60′	75′
1/I	76″	45″	39″	36″,5	34″,5

Lamina negativa, effluvio positivo.

Durata dell'effluvio	15′	30′	45′	60′	75′
1/I	216″	114″	100″	95″	93″

Se si indica nei due casi con 100 il numero che rappresenta l'attivazione finale, costante si hanno i seguenti numeri:

Durata dell'effluvio	15′	30′	45′	60′	75′
Lamina positiva I	45	77	88	95	100
Lamina negativa I	43	82	93	98	100

e sono portati nell'unita figura 1, in cui la curva (1) corrisponde alla lamina positiva e la (2) alla negativa. L'andamento delle due curve è, come si vede,

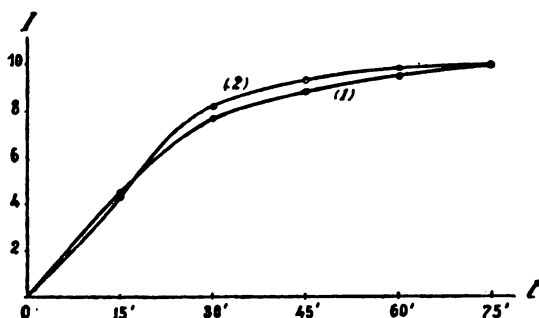



Fig. 1.

molto sensibilmente coincidente per quanto a bella posta abbia scelto due esperienze che corrispondono a condizioni dell'aria molto diverse; a queste e non al segno dell'effluvio è da attribuirsi la diversità dei valori assoluti dell'attivazione, come ho già ricordato più volte.

Perdita della radioattività col tempo. — È questo un dato che importa molto di conoscere per caratterizzare la natura dell'attivazione. Le lamine saggiate erano state prima attivate a saturazione, cioè finchè, per

quelle date condizioni dell'aria, fosse raggiunto lo stato di equilibrio fra la perdita e l'acquisto (notando però che questo stato di equilibrio anche con aria nelle medesime condizioni, varia a seconda delle dimensioni della stanza a causa dell'esaurimento dell'aria in particelle attive, prodotto dall'effluvio).

Ecco i risultati: i numeri che esprimono l'attivazione hanno il medesimo significato di prima; nella prima linea stanno le ore.

Lamina positiva:

Ore	0^h	1^h	2^h	3^h	4^h
1/I	47″	75″	117″	137″	147″

Dopo 24 ore l'attivazione non era quasi più apprezzabile.

Lamina positiva:

Ore	0^h	0^h5	1^h	$1^h,5$	2^h	$2^h,5$	3^h	$3^h,5$	4^h
1/I	26″	36″	49″	75″	92″	110″	130″	144″	153″

Nella figura 2 sono rappresentati questi risultati riportando a 100

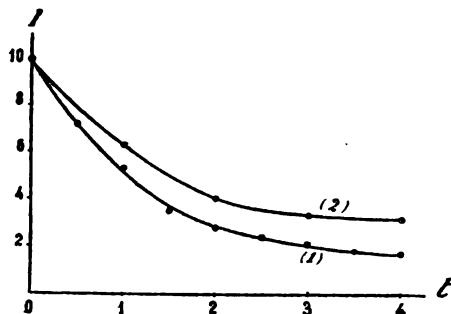



Fig. 2.

l'attività iniziale. La curva (1) corrisponde alla prima lamina, la (2) alla seconda. La leggera differenza di comportamento è da attribuirsi a diverse condizioni dell'aria; nè oserei affermare che il fatto che nel caso di attivazione iniziale più elevata la caduta sia stata più rapida, abbia un carattere generale; ulteriori esperienze in proposito sarebbero interessanti. Da notarsi è che la caduta nel principio è più rapida di quello che corrisponderebbe ad una progressione geometrica col tempo, calcolata sui valori iniziale e finale.

Ho accennato (p. 372) che facendo filtrare l'aria di una cantina chiusa da molto tempo attraverso l'ovatta, questa diventa radioattiva; è interessante riportare i numeri che mostrano come questa attività va scomparendo col tempo. Le misure furono fatte sparpagliando l'ovatta del filtro su di una lamina metallica colla solita disposizione. Dopo 120′ l'attività non era quasi più apprezzabile .

Minuti primi	0′	30′	40′	100′	120′
1/I in secondi	66″	178″	220″	405″	—
I	100	37	30	16	0

Aggiungo che non mi è riuscito di trovare attive delle superficie metalliche state da lungo tempo nell'aria chiusa della cantina, come era forse naturale di sospettare.

Condizioni in cui si produce la radioattività. — Già ho accennato nelle mie Note precedenti che la radioattività cresce operando in luoghi chiusi. Per riportare alcune cifre, dirò che nella medesima stanza di prima, con finestre aperte ottenni un'attività rappresentata da 265", dopo due ore di chiusura ed un'attivazione per la durata di un'ora 169". Il massimo valore che ho potuto ottenere in quella stanza tenendo le finestre chiuse per alcuni giorni, è stato di 26"; si noti però che la tenuta delle finestre lasciava molto a desiderare. In una stanza della cantina tenuta chiusa da molte settimane, ho ritrovato la radioattività più alta rappresentata da 17",5.

Un punto, che sarebbe molto interessante di approfondire è se, come appare probabile, il potere attivante dell'aria corre parallelamente con la sua conduttività.

Altro modo di rendere radioattiva una superficie metallica. — Si prenda una spirale di filo metallico delle dimensioni date nella prima Nota, e si disponga un poco al di sotto della spirale verticale e nel prolungamento del suo asse un becco Bunsen isolato. La fiamma si mette in comunicazione con un polo della macchina elettrostatica, la spirale con l'altro polo. Si ottiene in questo modo un'attivazione della spirale del tutto eguale a quella che si ha ponendo nell'asse della spirale il sistema di aghi già descritto a pag. 57 Anche in questo caso il segno della fiamma non ha importanza. Questa esperienza è interessante in quanto mostra che le particelle attive dell'aria non vengono distrutte dai gas caldi di combustione della fiamma.

Esperienze nell'aria esposta per poco tempo alle emanazioni dell'ossido di torio.

In una cassa della capacità di 300 litri sono posti una bacinella contenente $^1/_2$ kg. di ossido di torio ed il sistema lamina ed aghi, essendo la prima in comunicazione con un polo della macchina elettrostatica, gli aghi e la cassa e l'altro polo a terra. L'attivazione viene prodotta subito dopo chiusa la cassa.

Perdita della radioattività delle lamine dopo estratte. — Volendo determinare la perdita spontanea di attività delle lamine attivate e poi estratte dalla cassa, notai subito il fenomeno già accennato a pag. 244 e che cioè l' attività cresce dapprima per un certo tempo. Durante le esperienze comparve una Nota del Rutherford (Phys. Zeitschr. (3) pag. 254, 1902; vedi a questo proposito il recente lavoro nel Journal of the Chem. Society, July 1902, pag. 837) che annunziava il medesimo fatto per corpi attivati col mantenerli ad un potenziale negativo; fatto che gli era sfuggito nelle sue prime

ricerche. La cosa ha ora perso quindi un poco del suo interesse e non riporto alcune misure se non a titolo di esempio.

Lamine negative; durata dell'attivazione $^1/_2$ ora. Nella prima linea sono i tempi in ore dopo estratta la lastra, nella seconda la solita durata nella misura elettrometrica, nella terza l' attività della lamina, supposto 100 l'iniziale.

1ª lamina:

	0^h	30′	1^h	2^h	$2^h30'$	3^h	$3^h30'$	4^h
1/I =	96″	64″	52″	46″	43″,5	44″	45″,5	49″
I =	100	150	184	208	220	218	212	196

2ª lamina:

	0^h	30′	1^h	1^h,30′	2^h	2^h,30′	3^h,30′	4^h,30′
1/I =	148″	80″	68″	55″	49″	47″	47″	59″
I =	100	185	215	270	300	315	315	260

Ho già annunziato (pag. 244) che le lamine positive si attivano molto meno, nelle condizioni attuali, che non le positive; tuttavia anche queste presentano questo aumento caratteristico. Ecco un esempio:

	0^h	30′	1^h	1^h,30	2^h,30′	3^h,30′	4^h,30′
1/I =	207″	149″	117″	103″	98″	100″	108″
I =	100	138	177	200	201	207	190

Lo stesso aumento si ritrova ancora per la parte posteriore delle lamine, cioè quella non affacciata agli aghi e valgano come esempio le seguenti esperienze fatte sulle parti posteriori delle due lamine sopra riferite e state elettrizzate negativamente.

1ª lamina:

	0^h	30′	1^h	2^h	2^h,30′	3^h	3^h,30′	4^h
1/I =	146″	64″	54″	44″	43″	44″	47″	57″
I =	100	228	266	330	340	330	310	256

2.ª lamina:

	0^h	30′	1^h.30′	2^h	2^h.30′	3^h.30′	4^h.30′
1/I =	67″	36″	23″	21″	19″	19″	21″
I =	100	186	290	320	350	350	310

Carattere generale della radioattività. — Il fatto che le lamine positive si attivano molto meno delle negative, il fatto che la parte posteriore della lamina elettrizzata negativamente può talora, a seconda della posizione della lamina rispetto alle pareti della cassa, attivarsi molto più intensamente della anteriore, ed i numeri sopra riportati per la 2ª lamina ne sono una prova eloquente, dimostrano che il processo di attivazione non è dovuto pro-

priamente all' efflavio, ma alla carica propria positiva delle particelle attive dell' emanazione torica, quale fu dimostrata dal Rutherford.

Queste condizioni interessano quindi poco nella presente ricerca. Mi sia permessa qui un' osservazione ad un' affermazione dal Rutherford (Phil. Mag., *49*, p. 8, 1900) che l' emanazione dell' ossido di torio non viene arrestata filtrando per l' ovatta. Ora facendo passare per uno stoppaccetto di ovatta dell' aria passata semplicemente sopra l' ossido di torio si ritrova l' ovatta fortemente radioattiva; ora, secondo ogni probabilità, un' attivazione così energica, come quella osservata, non si otterrebbe, se l' ovatta non arrestasse parte dell' emanazione stessa.

Esperienze nell'aria esposta da molto tempo all'emanazione dell'ossido di torio.

La cassa ricordata nelle esperienze precedenti veniva lasciata chiusa 16 ore prima di procedere all' attivazione della lamina. La bacinella contenente l' ossido di torio poteva essere ricoperta da un foglio di carta senza che si alterassero i risultati.

Influenza della durata dell' effluvio. — Secondo l' interpretazione da me data al fenomeno dell' attivazione e riportata nelle note antecedenti, si comprende che il tempo per ottenere la massima attivazione debba essere dello stesso ordine di quello che occorrerebbe per chiarire un ambiente fumoso o carico di nebbia. Ecco alcuni dati:

Durata dell' effluvio	60′	30′	10′	18′	5′	1′
1/I misurata all' elettrom.	15″	15″	10″,5	33″	18″	28″

Questi dati non sono molto concordanti, perchè, per cause non bene definite, in condizioni apparentemente eguali non si ritrovano le medesime attivazioni, ma il fatto che per un minuto di effluvio si è ottenuto un effetto maggiore di uno di quelli avuti per 10′, che con 5′ si è ottenuto un effetto sensibilmente eguale come con un' ora o mezz' ora, dimostra la precedente affermazione.

Influenza del tempo durante il quale la cassa rimane chiusa. — Ecco alcuni dati sperimentali:

Ore di chiusura	8^h	16^h	24^h	40^h
1/I	34″	15″	15″	15″
	34″	15″	30″	
	24″	10″	6″,5	

A parte le solite divergenze, si può in generale concludere, che dopo 8 ore l' aria ha già acquistato un potere attivante che è la metà circa del massimo, valore che raggiunge dopo circa 16 ore.

Distribuzione della radioattività nella lamina. — Nelle attuali condizioni ho già mostrato che l'attività si distribuisce sulle lamine secondo superficie, che riproducono esattamente le figure del Kundt; mi sia ora lecito di riprodurre (fig. 3) una di queste figure ottenute per via fotografica attra-

Fig. 3

verso il cartone nero, e che presenta una particolarità interessante, cioè un anello nella macchia; particolarità che, come hanno notato Obermayer e Pechler, viene talora mostrato dalle figure del Kundt dirette.

Variazione della radioattività col tempo. — Ecco un esempio: la lamina era rimasta 16 ore racchiusa nella cassa, poi elettrizzata positivamente, cioè con effluvio negativo.

Ore	0	1^h	2^h	$3^h\,30'$	5^h	6^h	24^h
1/I in secondi	28″	29″	29″	30″	33″	37″	128″
I	100	97	97	93	85	76	22

La persistenza della radioattività, come si vede, è molto grande ed è quella che fa riuscire così bene le prove fotografiche. Questo comportamento così diverso da quello presentato dalle lamine attivate nell'aria atmosferica dimostra pienamente che le particelle attive contenute in questa sono del tutto diverse dall'emanazione del torio.

Vorrei ancora accennare al fatto che talora le lamine presentano ancora un leggero aumento col tempo, dopo estratte, come lo prova la seguente misura:

Ore	0^h	$0^h\,15'$	$0^h\,30'$	$0^h\,45'$	$1^h\,30'$	5^h	$7^h\,30'$
1/I in secondi	44″	43″	42″	41″	40″	47″	49″

Questo comportamento però non si ritrova di frequente; per solito la radioattività rimane stazionaria, o quasi, durante le prime tre ore; poi decresce

un po' rapidamente per quindi diminuire sempre più lentamente, secondo una legge assintotica.

Carattere dei raggi emessi dalle lamine attivate. — In primo luogo riferiamo il loro potere di penetrazione. Sopra la lamina attiva furono posti successivamente più fogli di stagnola o di carta e poi misurata al solito la velocità di carica dell' elettrometro.

Seguono alcune misure; l' intensità senza fogli fu ridotta a 100.

Carta dello spessore di mm. 0,022. Curva (1) (fig. 4).

Numero dei fogli.	0	1	2	3	4	5	6
I	100	50	25	14,3	7,3	2,7	0,9

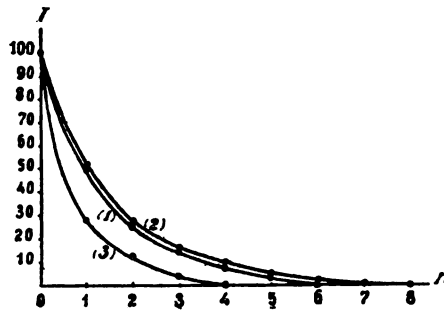



Fig. 4.

Carta dello spessore di mm. 0,015. Curva (2).

Numero fogli	0	1	2	3	4	5	6	7	8
I	100	52	28	16	9	5	2,4	1,1	0,5

Stagnola dello spessore di mm. 0,009. Curva (3).

Numero fogli	0	1	2	3	4
I	100	28	12,5	3,5	0,5

In secondo luogo ho misurato come varii l'intensità della corrente al condensatore nella misura elettrometrica col variare della differenza di potenziale. Nella tabella che segue nella prima linea sono indicati i Volt a cui viene successivamente portata la lamina attiva, nella seconda i secondi impiegati dalla lamina collegata coll' elettrometro per caricarsi al solito da 2 a 6 Volt.

Volt	8	10	12	14	16	18	20	30	40	50	60
1/I	173″	101″	78″,5	64″	58″	49″	45″	40″	37″	35″	33″,5

La figura 5 rappresenta i numeri trovati e mostra come a 60 Volt sia quasi raggiunta la corrente di saturazione.

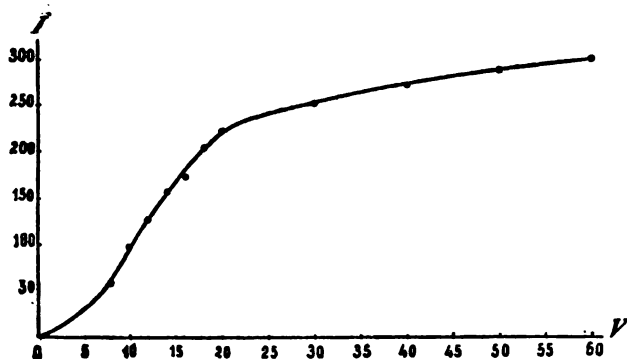



Fig. 5.

Appendice. — In una campana del contenuto di 10 litri collegata con una macchina pneumatica e sul cui fondo era una bacinella contenente ossido di torio fu prima introdotta aria umida, accuratamente priva di pulviscolo atmosferico e dopo 16 ore cercai se si produceva nebbia con un'espansione subitanea entro quei limiti in cui l'aria naturale non presenta questa condensazione; ma non ho ottenuto risultati netti.

Mi preme inoltre di ricordare che filtrando attaverso l'ovatta l'aria della cassa, in cui era stata rinchiusa coll'ossido di torio, ottenni una attivazione così forte dell'ovatta che potei ottenere con questa delle azioni fotografiche attraverso una lamina sottile di alluminio. Il modo col quale la radioattività dell'ovatta decresce spontaneamente col tempo è caratterizzata da questi numeri.

Ore	0^h	1^h	19^h
1/I in secondi	28″	25″	72″

Così anche l'ovatta attivata per filtrazione può presentare quel leggero aumento iniziale già riferito per le lamine attirate coll'effluvio.

Compio il grato dovere di ringraziare pubblicamente il dott. Caboni, che mi fu di efficacissimo aiuto nelle presenti ricerche.

Fisica. — *Sulle rotazioni bimagnetiche del piano di polarizzazione della luce.* Nota di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

In una Nota preliminare precedente, indicai col nome di *rotazioni bimagnetiche*, certe rotazioni subite dal piano di polarizzazione di un raggio luminoso traversante talune soluzioni magnetiche poste in un campo magnetico. Il fenomeno ha luogo se il fascio di raggi è normale alle linee di forza e se il piano di polarizzazione non è parallelo o normale a queste. Riferendomi a quanto dissi nella Nota citata, le rotazioni bimagnetiche possono essere *positive* o *negative*; e mi preme far notare che tali denominazioni sono state da me introdotte, e sono adoperate, per ottenere maggior semplicità di linguaggio, non avendole io ricavate da alcuna ragione teorica o di raffronto con altri fenomeni conosciuti.

Modo di sperimentare. — Prima di indicare i processi da seguirsi per ottenere *liquidi attivi*, liquidi cioè che hanno *potere rotatorio bimagnetico*, dirò brevemente del modo di osservare il fenomeno. La disposizione è simile a quella indicata per la constatazione della birifrangenza (v. Note precedenti); il secondo compensatore D è soppresso, e si possono misurare le rotazioni dell'analizzatore B, leggendo sul cerchio graduato (non segnato in figura) le posizioni angolari di questo. La sorgente di luce in queste esperienze, deve essere o la lampadina a filo molto brillante, o una fenditura sottile illuminata da un arco voltaico. In entrambi i casi la linea molto luminosa che si osserva, se i nicol non sono incrociati, è orizzontale, affinchè il fascio piano di raggi sia nelle sue varie parti, in campo magnetico uniforme. Non succederebbe così se si ponesse il filamento o la fenditura in posizione verticale. Una sorgente larga di luce, come sarebbe tutto un fascio di raggi proveniente da un arco voltaico, senza la delimitazione ottenuta con la fenditura, non consente misure molto precise, giacchè è allora assai difficile giudicare la posizione di assoluta estinsione. È necessario, specie se si fanno delle misure, sapere esattamente quale è l'angolo che il piano di polarizzazione fa colle linee di forza del campo. A tal fine, in una esperienza preliminare, si riempie la vaschetta di *ferro Bravais* vecchio e molto diluito. Questo liquido permette di trovare lè posizioni dei nicol, per le quali non si ha traccia di birifrangenza a meno di *1* o *2 minuti primi*; esse corrispondono alle posizioni 0° e 90°, e con ciò si può, in ciascuna esperienza conoscere la posizione angolare dell'analizzatore. Per osservare la rotazione, bimagnetica si pone il polarizzatore colla sua diagonale maggiore a 45° sul

campo, sia a destra che a sinistra. Se tutto è regolato all'oscurità, e se il liquido è attivo, inviando la corrente nell'elettromagnete, si vede ricomparire la luce, e per riottenere l'oscurità occorre girare l'analizzatore di un piccolo angolo. Se il nuovo angolo tra la diagonale maggiore del nicol e le linee di forza è maggiore di 45° si ha *rotazione positiva*, se è minore si ha la *negativa*.

Liquidi attivi. — Il fenomeno della rotazione bimagnetica nòn era forse prevedibile, ed è anche perciò, che, a differenza della birifrangenza magnetica, io mi imbattei in esso senza che lo cercassi. Ricercando i casi di birifrangenza magnetica passai in rivista le principali soluzioni acquose di sali di ferro, giacchè esse, con maggior probabilità, lasciavano sperare nella constatazione del detto fenomeno; e studiando il comportamento del cloruro ferrico in un campo magnetico, osservai, dopo numerosi tentativi, per la prima volta il fenomeno della rotazione bimagnetica, in luogo della birifrangenza. Il liquido era stato tolto da un vecchio reagentario, travasato in una boccetta. filtrato e introdotto nella vaschetta V. La rotazione, abbastanza netta, era *negativa*. Incominciai subito lo studio di questo fenomeno, ma con grande mia sorpresa mi accorsi che dopo poche ore il liquido della vaschetta, e dopo pochi giorni tutto quello rimasto nell'originaria boccetta, era divenuto completamente inattivo. Preparai allora altre soluzioni di cloruro ferrico con concentrazioni diversissime; mutai l'intensità del campo magnetico partendo dalla più debole sino ad arrivare alla più grande che con la mia elettrocalamita potessi ottenere; provocai alterazioni del cloruro ferrico, sia facendolo bollire poco o ripetutamente, sia trattandolo con lievi quantità di acido cloridrico; molti altri tentativi feci che qui non riporto e passai in fine in rivista tutte le boccette di cloruro ferrico possedute dai numerosi reagentarî degli istituti chimici di Roma; ma non riuscii più a riottenere il fenomeno visto la prima volta. Nell'incertezza in cui mi trovavo, per non aver avuto tempo, non solo di studiare, ma anche di constatare bene il fenomeno, non mi sapevo decidere ad abbandonare questo studio, e, d'altro canto, non vedevo nulla che mi potesse guidare nella ricerca di un fenomeno, che il caso mi aveva fatto scorgere per brevi istanti.

Dopo lunghi tentativi, arrivai finalmente alla conclusione che la soluzione di cloruro ferrico dotata della proprietà suesposta, doveva essere impura: giacchè cloruro ferrico purissimo, sciolto in acqua, e privo di ossicloruri, non presenta mai traccia di rotazione bimagnetica. Rendendo impura la soluzione, col farla agire su speciali idrati di ferro, si può osservare questo fenomeno. Infatti è noto che le soluzioni di cloruro ferrico hanno la proprietà di sciogliere taluni ossidi idrati di ferro. Questo fatto viene appunto utilizzato nella preparazione del ferro dializzato; ma la soluzione di ossido ferrico nel cloruro, ottenuta in una delle maniere indicate nei trattati di chimica, non mostra mai traccia di rotazione; le attuali soluzioni attive

vengono ottenute invece facendo agire il cloruro ferrico su idrati di ferro preparati altrimenti. E qui debbo dire che, forse a causa della poca pratica da me posseduta in fatto di manipolazioni chimiche, non sono riuscito ad individuare chimicamente la costituzione degli idrati di cui si tratta, ma solo a specificare le condizioni, osservando le quali si possono ottenere liquidi attivi. Del resto ciò era per me sufficiente, e sarebbe in seguito còmpito di un chimico il resto. Ecco ora le norme da seguirsi per preparare i detti liquidi attivi. Esse valgono qualora la vaschetta destinata a contenere il liquido sia lunga 7 cm. circa; in caso diverso occorrerebbe studiare la concentrazione più conveniente della soluzione di cloruro ferrico. La soluzione da me adoperata ha sempre la densità di 1,05 circa. Se essa è preparata di recente, il suo colore è giallo-rossastro, e non è molto adatta alle prove successive. Per cui è meglio ricercare del vecchio cloruro ferrico che abbia quella densità, e che, a causa di alterazioni chimiche, sia colorato in giallo canario piuttosto chiaro. Se ciò non è possibile, basta aggiungere ad una soluzione recente poche gocce (in 100 cm. c.) di acido cloridrico concentrato, onde provocare la decolorazione. Si ha così un liquido (*soluzione tipica*) il cui potere assorbente per la luce non è molto forte, e che è sempre inattivo. Per rendere attiva la soluzione tipica si può procedere in diverse guise.

a) Si prepari del cloruro ferroso in soluzione acquosa, e lo si lasci in una bottiglia chiusa per parecchie settimane. Si vuoti la bottiglia, e la si lavi ripetutamente con acqua distillata; sulle sue pareti interne rimangono in certi punti aderenti piccole tracce di un idrato di ferro. Pochi centimetri cubici di soluzione tipica, posti in questa bottiglia e agitati per un paio di minuti, forniscono del liquido attivo. La rotazione bimagnetica che si osserva è sempre *negativa*, e cioè per riottenere l'oscurità, occorre girare alquanto l'analizzatore in guisa che il piano normale alla sezione principale (piano di polarizzazione) si accosti al piano delle linee di forza del campo.

b) Si bagnino con soluzione cloridrica concentrata dei piccoli chiodi di ferro (lunghezza 10 mm., spessore 1 mm. circa) non ossidati; e si pongano così in una bacinella avendo cura di scolare il liquido eccedente. Dopo 48 ore si lavino i chiodi a grand'acqua, si lascino asciugare distendendoli su di un piano di vetro o di porcellana, e si aspetti prima di procedere oltre ancora qualche giorno. In una piccola provetta di vetro si versino circa 10 cm. c. di soluzione tipica e in essa si gettino 2 o 3 gr. di ferro ossidato come si è detto. Si agita per qualche minuto e si filtra. Il liquido così ottenuto è attivo e dà rotazione *negativa*. Un eccessivo soggiorno del ferro ossidato nel cloruro ferrico, nuoce alla nettezza del fenomeno.

c) È questo il processo più semplice e più efficace, per ottenere liquidi con potere rotatorio bimagnetico marcato. In 25 cm. c. di soluzione ti-

pica si pongano 10 gr. di piccoli chiodi di ferro ben tersi; si scalda in un piccolo matraccio, sino all'inizio della ebollizione, avendo cura di non spingere l'operazione tanto da trasformare completamente il cloruro ferrico in ferroso. Si raffredda poi il tutto, si scolano i chiodi, su cui è incominciato un processo di ossidazione, e si distendono su di un foglio di carta bibula. Dopo 3 ore, e non più tardi di 36, il ferro così ossidato serve ad ottenere liquido attivo. Se si procede come in *b*, ma molto rapidamente, lasciando i chiodi in contatto della soluzione ferrica per pochi secondi, si ha liquido attivo positivo; ma talvolta il risultato di questa operazione è incerto, dipendentemente da circostanze che non mi è ben riuscito di determinare. Dopo il primo rapido lavaggio dei chiodi con soluzione tipica, si ripeta l'operazione con altro liquido fresco, agente sugli stessi chiodi, e si agiti la provetta per 2 o 3 minuti. Si ha così sempre liquido attivo *negativo*. Anche qui non si deve prolungare troppo l'azione del sale ferrico sul ferro ossidato. Se la preparazione del liquido attivo vien fatta molto tempo dopo (più di 36 ore circa) quella del ferro ossidato, l'attività del liquido può mancare affatto.

d) Si lasciano attaccare dei pezzi di ferro o chiodi ben tersi, distesi su di una lastra di vetro, dall'acido cloridrico non in eccesso. Dopo tre giorni si scelgano con una pinza, fra i pezzi di ferro, quelli che più marcatamente sono ricoperti da un idrato color ruggine, e su 2 o 3 gr. di essi si facciano agire 10 cm.c. di soluzione tipica: si agita per qualche minuto. Il liquido filtrato dà spesso rotazione *positiva*, ma questo risultato può talvolta mancare, ottenendosi liquido inattivo o negativo.

Riassumendo: è abbastanza facile ottenere liquidi con potere rotatorio negativo, e ulteriori esperienze sarebbero necessarie onde specificare meglio in quali condizioni si ottenga la rotazione positiva. In ogni modo è sempre da avvertire che tutti i liquidi preparati perdono rapidamente la loro attività; la rotazione osservata immediatamente dopo la preparazione resta ridotta a metà già dopo una o due ore, e l'indomani il fenomeno è quasi completamente scomparso. Per cui è certo che il cloruro ferrico lasciato a sè per un certo tempo, è del tutto inattivo, ed evidentemente il liquido che per la prima volta mi aveva fornito la rotazione bimagnetica, doveva avere agito, all'atto dell'esperienza o poco prima, su qualche idrato di ferro che casualmente aderiva alle pareti del recipiente.

Le seguenti misure sono state fatte studiando la rotazione bimagnetica negativa, quella cioè che più facilmente si ottiene, ed ho quasi sempre fatto uso della preparazione indicata in *c*.

Dispersione rotatoria. — Volendo studiare le leggi con cui avviene il predetto fenomeno, occorre adoperare luce monocromatica. Ciò in conseguenza del fatto che i poteri rotatorî per i differenti colori sono differenti. Vi sarebbe dunque da studiare la *dispersione rotatoria bimagnetica*, ma a dire

il vero io credo che ciò, data la piccolezza e la instabilità dei fenomeni, sarebbe molto difficile.

Spessore del liquido. — Mi sono dunque limitato a porre tra l'analizzatore e l'occhio, un vetro verde quasi monocromatico e a studiare il fenomeno solo su questa tinta. Rimane sempre la difficoltà della instabilità del prodotto. Si tratti p. e. di determinare come varii il potere rotatorio con la lunghezza del liquido traversato. Si costruiscono due vaschette di lunghezze eguali rispettivamente a 35 e 70 mm. Riempite di porzioni dello stesso liquido attivo, procedo ad osservazioni delle rotazioni per lo stesso campo (18000 u.) ora per una, ora per l'altra vaschetta, quando i nicol sono a 45° sulle linee di forza. Così, alternando le misure, si vede che i valori della rotazione vanno decrescendo per ciascuna vaschetta, a causa della diminuzione della attività, ma con dieci osservazioni per vaschetta si hanno come medie i valori:

vaschetta di 35 mm.	rotaz.	1° 6′
" " 70 "	"	2° 18′.

Sicchè è da ritenersi che: *la rotazione bimagnetica è proporzionale allo spessore del liquido traversato.* Poichè la rotazione non può crescere indefinitamente, giacchè se il piano di polarizzazione coincide o è normale alle linee di forza essa è nulla, si intende che questa legge è approssimata, e può valere finchè i liquidi (come quelli da me preparati) hanno piccolo potere rotatorio, e spessore relativamente breve.

Intensità del campo. — Per studiare la dipendenza tra la intensità del campo e la rotazione, occorre procedere in maniera analoga. Scelgo quattro valori di quella intensità, e prendendo le medie di più osservazioni si ha:

intensità (u. C. G. S.)	500	1000	5000	18000
rotazione	1° 13′	1° 40′	2° 30′	2° 42′.

Sicchè *il potere rotatorio cresce in principio assai rapidamente col campo, e finisce, al di là di una certa intensità non molto grande, per divenire quasi costante.* Questo fatto mi aveva suggerito l'idea di adoperare vaschette molto lunghe e campi piuttosto deboli onde ottenere cospicue rotazioni. Provai infatti a sostituire espansioni polari molto più lunghe (normalmente al campo) di quelle sinora adoperate e che come è noto erano di 7 cm.; la vaschetta fu cambiata in altra di conveniente lunghezza. Con ciò ottenni realmente rotazioni più forti; ma non guadagnai nulla nella precisione delle misure, giacchè, col crescere dello spessore del liquido, cresceva l'assorbimento della luce, e quindi l'incertezza nel determinare l'angolo di estinsione.

Teoria del fenomeno. — La spiegazione più semplice della rotazione bimagnetica è quella di ammettere un ineguale assorbimento da parte del liquido, delle componenti della vibrazione, normalmente e parallelamente alle linee di forza. Questa idea, che mi fu suggerita dal prof. Voigt, è accennata

in un lavoro teorico sull'argomento pubblicato recentemente da questo fisico (1). È opinione del prof. Voigt che la rotazione bimagnetica debba osservarsi là dove coesiste piccola birifrangenza e notevole pleocroismo magnetico, ma a dire il vero, io ho constatato nette rotazioni senza che abbia potuto scorgere traccia di birifrangenza. Per cui lo studio dell' attuale fenomeno può farsi se non sempre, spesso, indipendentemente dalla birifrangenza. Consideriamo una vibrazione luminosa propagantesi nell' interno di un liquido attivo, normalmente alle linee di forza, e polarizzata in un piano nè parallelo, nè normale al campo. Sia V l' ampiezza della vibrazione all' ingresso nel liquido; se α è il suo angolo colle linee di forza, C_p la sua componente secondo queste e C_n la normale, si avrà

$$\frac{C_n}{C_p} = tg\alpha .$$

Sotto l'azione di un campo di determinata intensità, e per lo spessore totale del liquido, le componenti predette rimangono inegualmente assorbite. Supponiamo che la C_n diventi $k_n C_n$ e la C_p $k_p C_p$, essendo entrambi gli indici k_n e k_p minori di uno, se $k_n < k_p$ la vibrazione uscirà dal liquido con un angolo $\beta < \alpha$ e si avrà rotazione bimagnetica positiva. Sarà allora:

$$\frac{k_n C_n}{k_p C_p} = \mathrm{tg}\,\beta \,, \quad \text{ed anche} \quad \frac{k_p}{k_n} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} \,. \qquad (1)$$

E poichè i due indici di assorbimento sono indipendenti dall'angolo sotto cui entra la vibrazione nel liquido, si intende che *per lo stesso liquido, contenuto nella stessa vaschetta e a parità di campo, il rapporto delle tangenti degli angoli che la vibrazione fa colle linee di forza entrando ed uscendo dal liquido è costante.* Chiamando questo rapporto con m la precedente relazione si può scrivere:

$$\frac{m-1}{m+1} = \frac{\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)}{\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)} \,, \quad \text{od anche} \qquad (2)$$

$$\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) = \frac{m-1}{m+1}\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) \,. \qquad (3)$$

Ora $\alpha - \beta$ è la rotazione bimagnetica che si osserva; dalla (3) si deduce che affinchè essa sia massima, deve essere massimo sen $(\alpha + \beta)$; cioè $\alpha + \beta = 90°$. In pratica i due angoli α e β differiscono di poco, per cui la massima rotazione si ha in vicinanza di 45°, come realmente io avevo trovato.

Onde verificare meglio se la legge delle tangenti è sempre sodisfatta, ho proceduto a numerose misure, applicando la relazione (2). La (1) mal si sarebbe prestata a ciò, poichè è chiaro che, essendo α e β poco differenti,

(1) Drude, Annalen d. Phys. 1902, n. 8, pag. 881.

il rapporto delle loro tangenti, ancorchè la legge enunciata non fosse stata ben sodisfatta, sarebbe stato sempre assai prossimo all'unità, e cioè vicino al valore di m. La (2) si presta meglio, poichè al primo membro comparisce come fattore l'eccesso di m sull'unità.

Servendomi di liquidi di recente preparazione, ho determinato i valori di $\alpha - \beta$ per α prossimo a 20°, 45°, e 70°. E ciò con il solito criterio, onde eliminare errori dovuti alla continua diminuzione di attività di ciascun liquido. Le misure fatte con una sola preparazione, non sarebbero state sufficienti per verificare o meno la legge delle tangenti, per cui ripetei per parecchi giorni di seguito la serie di osservazioni, rinnovando ogni volta il liquido. Le seguenti cifre sono le medie delle osservazioni eseguite cambiando dieci volte il liquido attivo, e con ciascun campione venne osservato dieci volte di seguito il valore della rotazione, per i tre angoli predetti:

α	20°34′	45°0′	70°5′
β	19°19′	42°56′	68°43′
rotazione	1°15′	2°4′	1°22′
$\frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$	0,0340	0,0361	0,0362

Per cui si vede che la legge delle tangenti è sodisfatta con sufficiente approssimazione.

Un'ulteriore verifica sarebbe stata desiderabile, e cioè la constatazione diretta del diverso assorbimento, a seconda della posizione del piano di polarizzazione, del fascio traversante il liquido, normalmente alle linee di forza. E propriamente, nel caso di rotazione bimagnetica positiva, l'onda più assorbita dovrebbe esser quella il cui piano di polarizzazione coincide con quello delle linee di forza, e nel caso della negativa, l'onda polarizzata normalmente. Ora benchè io avessi ottenuto talvolta per pochi minuti liquidi così attivi da far rotare il piano di polarizzazione per 4°30′ (nicol a 45° sul campo), pure non potei mai constatare alcun sensibile mutamento nell'intensità luminosa di un fascio di raggi polarizzato sia orizzontalmente che verticalmente, all'istante della eccitazione del campo.

Nello studio della birifrangenza magnetica presentata dal ferro dializzato, feci notare che essa è sempre accompagnata da dicroismo magnetico, e che i due fenomeni sono collegati in guisa, da essere sempre l'onda più lenta la più assorbita. Sembra a priori possibile, in un liquido che contemporaneamente presenti, all'eccitazione del campo, birifrangenza, pleocroismo, e potere rotatorio bimagnetico, studiare quest'ultimo dopo aver compensata la prima. E ammesso ciò, se il comportamento dei liquidi studiati in questa Nota fosse paragonabile a quello del ferro dializzato, salvo la prevalenza nei primi del dicroismo sulla birifrangenza (la quale sarebbe inosservabile), si dovrebbe concludere che a *rotazione bimagnetica positiva* corrisponde *biri-*

frangenza negativa e viceversa. Allo scopo di verificare la giustezza o meno di questa veduta, mi diedi a ricercare se tra i campioni di ferro dializzato da me studiati ve ne fosse taluno che oltre alla birifrangenza e al dicroismo, presentasse anche il fenomeno della rotazione. Potei infatti trovare qualche esempio di ferro dializzato dotato di piccola birifrangenza positiva mista a rotazione bimagnetica negativa (ferro del 4° tipo, v. Note prec.). Mi volli però assicurare se un tal risultato fosse senz'altro da ammettersi come costante, e a tal fine studiai accuratamente gli altri ferri dializzati anche molto attivi per birifrangenza, che avevo a mia disposizione. In questo studio non potei andare molto avanti, giacchè mi accorsi che a causa dei forti valori della birifrangenza, era impossibile ottenere completa oscurità per quanto si girasse l'analizzatore, dopo aver compensato la birifrangenza per un dato colore, od averla portata uguale ad un numero intero di lunghezze di onda, regolando l'intensità del campo. Solo sul punto di inversione, se questo era un po' alto, mi fu possibile constatare nettamente la rotazione. Orbene per tre campioni, i soli che possedessero punto di inversione elevato (intorno a 5000 u.), potei constatare che, per intensità del campo un po' minore, eguale e un po' maggiore di quella corrispondente al punto di inversione, i liquidi avevano netti poteri rotatorî bimagnetici negativi (circa due gradi di circonferenza, essendo i nicol a 45° sul campo). Questo risultato ci dice dunque che il segno della rotazione bimagnetica non è sempre collegato con quello della birifrangenza, e qualche altra ipotesi sarà necessaria onde potere mantenere la spiegazione del prof. Voigt, come per esempio quella che il cambiamento di segno della birifrangenza non avviene, al crescere del campo, contemporaneamente a quello del dicroismo. Ciò del resto sarebbe assai difficile constatare, giacchè quest'ultimo fenomeno è, in vicinanza del punto di inversione della birifrangenza, tanto debole da essere inosservabile.

Terminerò questo studio avvertendo che nell'esposizione dei fatti, ho sempre cercato di indicare in principio i più semplici per passare poi ai complicati. Ma se per i primi mi è stato possibile specificare talvolta circostanze essenziali per la constatazione dei fenomeni, e tal'altra stabilire leggi a cui questi fenomeni sodisfanno, ho dovuto spesso rinunziare allo studio degli altri, a causa delle molteplici difficoltà da me incontrate. È perciò che mi limito per esempio ad accennare che si può constatare ancora la sovrapposizione di rotazioni a birifrangenza anche nel caso di soluzioni di cloruro ferrico, ma che, precisare le condizioni essenziali affinchè ciò avvenga, mi è stato sinora impossibile.

E infine dirò che il prof. Sella mi ha fatto notare che il dott. Kerr [1] aveva già trovato in elettrostatica, un fenomeno analogo a quello di cui è

[1] Philos. Magaz., v. 8, 1879, pag. 100.

oggetto questa Nota. Rotazioni del piano di polarizzazione della luce del tutto simili alle descritte, furono constatate dal Kerr; adottando per esse denominazioni analoghe a quelle da me ora adoperate, esse, come apparisce dalla Memoria del Kerr, erano *negative*, e furono osservate nel cloruro di stagno sotto l'azione di un campo elettrostatico. Questo fatto, dimenticato forse dai fisici, non fu oggetto di accurati studî nemmeno da parte dello stesso Kerr, a causa della alterabilità del liquido in presenza dell'aria. L'aspetto alquanto torbido del liquido studiato dal Kerr si rileva anche nelle soluzioni di cloruro ferrico da me adoperate e forse l'assoluta analogia dei due fenomeni, ci aiuterà in seguito nel dare una spiegazione più completa di quella più sopra riportata.

Fisica. — *Determinazione dei potenziali alternanti.* Nota del dott. Camillo Carpini, presentata dal Socio Blaserna.

1. In una Nota precedente [1] ho fatto vedere come e con quale approssimazione si possa determinare, con i mezzi comuni da laboratorio, il potenziale elettrostatico, servendosi della deformazione prodotta in un liquido piano conduttore e in comunicazione col suolo, da una sfera sovrastante elettrizzata.

Mi proposi in seguito di esaminare che cosa avviene di questa deformazione quando la sfera viene portata a potenziali alternanti sinusoidalmente. La prima questione che si presentava era di esaminare se e con quale frequenza di alternazione si ha una deformazione costante o variabile con le vicende del potenziale. Adoperando come liquido l'olio di olivo, non ottenni alcuna deformazione netta, che potei invece raggiungere sostituendo un liquido conduttore, come l'acqua leggermente acidulata, con una frequenza di 80 alternazioni al secondo. Un esame stroboscopico mi convinse che con questa frequenza la deformazione poteva ritenersi permanente.

Applicando a questa deformazione le formule del Sella, trovate per il caso statico, si ottiene un certo potenziale; io mi proposi di determinare in che relazione stesse col potenziale alternato cui era portata la sfera, ciò che feci determinando il potenziale efficace mediante la distanza esplosiva fra punta e piano. I numeri che in seguito saranno riportati dimostrano che la deformazione del liquido corrisponde al potenziale efficace.

2. Prima di cominciare le misure, mi proposi di vedere se si potesse o no semplificare il metodo dell'astigmatismo da me adoperato nella prima

[1] Rend. d. Acc. d. Lincei. (5) XI, 65, 1902.

ricerca per determinare il raggio di curvatura della superficie liquida deformata. È nota la relazione:

$$\varrho = 2 \frac{s' t'}{s' - t'} \text{ sen } \varphi \text{ tang } \varphi$$

che dà il raggio di curvatura in funzione delle distanze s', t' delle due linee astigmatiche dalla superficie riflettente e dell'angolo φ di incidenza della luce. Nella mia prima ricerca determinavo direttamente le due distanze s' e t' spostando uno schermo sul quale erano tracciate delle linee. Ora invece volli ridurre la misura di queste due distanze a quella dello spostamento dell'oculare per la messa a fuoco delle due linee astigmatiche. La questione è molto semplice; infatti è chiaro che se si conosce la posizione dei piani principali e la distanza focale della lente obbiettiva e se si misura la distanza fra un determinato punto dell'oculare e l'immagine data dall'obbiettivo nella posizione della visione distinta, determinando la distanza di questo punto dall'obbiettivo per una data immagine, si potrà risalire alla determinazione della distanza dell'oggetto corrispondente dell'obbiettivo, e quindi alla determinazione della posizione delle linee astigmatiche.

Per confrontare i due metodi feci una serie di misure con una lente piano convessa di cui il raggio di curvatura misurato allo sferometro era di cm. 75. I numeri che seguono sono la media di parecchie misure:

1° Metodo $s' =$ cm. 74,5 $t' =$ cm. 10,6 $r =$ cm. 69,1
2° Metodo $s' =$ cm. 76,0 $t' =$ cm. 10,9 $r =$ cm. 71,1

Tali numeri mostrano l'attendibilità pratica del secondo metodo, che sperimentalmente è molto più semplice del primo, perchè una volta determinate con cura le costanti ottiche del cannocchiale si può dal solo spostamento dell'oculare dedurre le due grandezze s' e t', evitando così la puntatura della mira, richiesta dal primo metodo, puntatura che riesce praticamente più difficile di quella delle linee astigmatiche per la grande influenza che ha il modo con cui viene illuminata la mira stessa.

Perciò nella ricerca, che segue, ho adoperato di preferenza il secondo metodo, pur controllandolo talvolta col primo.

3. La disposizione sperimentale fu la seguente: il liquido messo al suolo comunicava con un polo del secondario di un rocchetto di Rumhkorff, mentre l'altro polo comunicava con la sfera deformatrice isolata. Nel primario, recante un tasto interruttore, circolava la corrente alternata di città trasformata a 100 Volt, con una frequenza di 80 alternazioni al secondo: una resistenza ad acqua e un reostata permettevano di variare il potenziale ai poli del secondario.

La distanza esplosiva, per la determinazione del potenziale, fu misurata tra un piano di ferro ed un cono di ottone (angolo 15°) munito di vite mi-

crometrica. Le superficie erano ripulite con cura assai spesso ed il cono sovente cambiato. Onde tener conto inoltre di possibili variazioni del potenziale durante il tempo della determinazione del raggio di curvatura, misuravo la distanza esplosiva sia prima, sia dopo tale determinazione.

I potenziali che saranno in seguito riportati corrispondentemente alle distanze esplosive sono stati tratti dalla curva costruita in base ai risultati che l'ing. Jona dà nell' Elettricista ([1]) ed in base alla seguente tabella, che debbo alla sua cortesia e che completa quei risultati, per voltaggi più bassi.

Distanza esplosiva	Volt efficaci
0,5	1250
1,0	1750
1,5	2150
2,0	2500
2,5	2850
3,0	3220
4,0	3950
5,0	4700
6,0	5350
7,0	6100
8,0	6750
9,0	7450
10,0	8200

4. Per avere una idea dell' approssimazione da me raggiunta col metodo dianzi esposto, trascrivo una delle serie di osservazioni tra le molte eseguite:

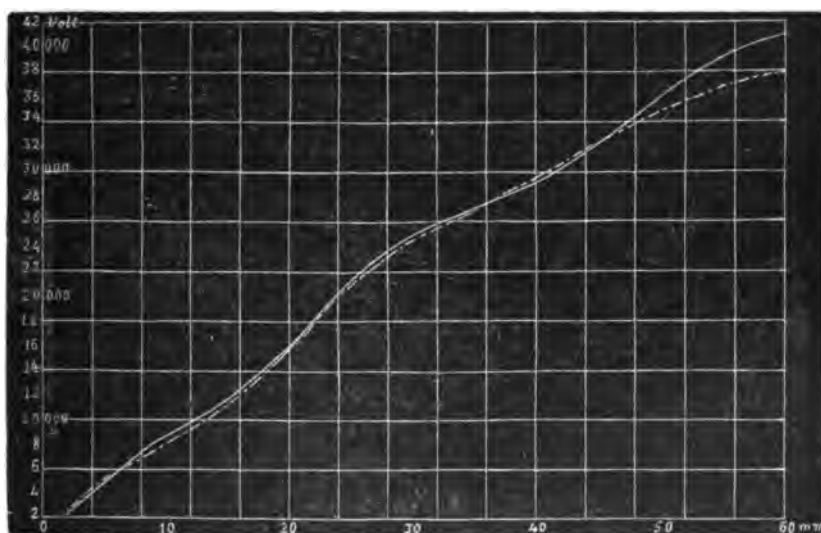
	Angolo luce 74°12′				
	s'	t'	ϱ	Potenziale	Dist. espl.
Dist. bordo inferiore della sfera dal liquido mm. 5,56.	cm. 66,0	5,0	cm. 367,9	Volt. 4208	4,6
	67,0	5,5	407,5	4092	4,5
	69,0	5,0	366,6	4314	4,8
	72,0	5,2	381,2	4233	4,5
	72,5	5,0	365,2	4323	4,5
	71,5	5,0	365,6	4320	5,0
	71,0	5,0	365,8	4317	5,0

Lo scartamento massimo dal potenziale medio è di Volt 166, mentre quello della distanza esplosiva è di mm. 0,3, il che corrisponde secondo i risultati dello Jona ad una variazione di Volt 261; ciò che indicherebbe una costanza maggiore nelle mie determinazioni.

([1]) Anno 1899.

Riassumo nella seguente tabella la media di molte serie di osservazioni ponendo a lato dei potenziali da me determinati quelli dedotti dalle esperienze dell'ing. Jona.

Dist. bordo inf. sfera dal liquido.	Dist. esplosiva	Potenziale in Volt dedotto	(Jona)
mm. 5,56	mm. 2,4	2310	
	3,6	3618	3628
	4,6	4274	4325
mm. 11,33	8,2	7493	6840
	9,2	8052	7600
	11,6	9642	9160
mm. 24,14	21,1	16970	17600
	29,5	24802	24400
	42,7	30562	30650
	49,3	35435	34594
	60,0	40987	38000

Aggiungo due curve ottenute con i numeri della tabella precedente — (ascisse: distanze esplosive — ordinate: potenziali) la curva continua rappresenta i miei risultati, la punteggiata quelli dell'ing. Jona.

Essendo le due curve quasi identiche, si deduce che *il fenomeno della deformazione della superficie liquida corrisponde al potenziale efficace.*

Non mi è stato possibile superare i 40000 Volt, perchè nel liquido succedono perturbazioni tali da rendere tremolante il raggio riflesso, sì da infirmare la precisione della misura del raggio di curvatura.

Noto infine come trattandosi di potenziali variabili debba entrare in giuoco la conduttività del liquido. Alcune esperienze su liquidi diversamente conduttori, fatte anche allo stesso potenziale mi hanno dato i seguenti risultati:

	Acqua	Alcool amilico	Alcool amilico con KCl
Potenz. in Volt	23600	23400	24000

Da tali numeri sembra potersi concludere che l'influenza della conduttività non si fa sentire nei limiti, che il metodo stesso può garantire.

5. Può sembrare strano l'avere ottenuto deformazioni permanenti con la frequenza di 80 alternazioni al secondo, specie se si pensi che J. H. Vincent [1] ottenne onde stazionarie nel mercurio percosso dalla punta di un corista, che vibrava con quella stessa frequenza. Fui così condotto a cercare il limite delle alternazioni, oltre il quale il liquido comincia a pulsare. Non potendo modificare il periodo della corrente sinusoidale, la sostituii con una corrente continua interrotta periodicamente da un interruttore Foucault: però giova notare che in tal caso non si ha un andamento sinusoidale, ma solo una serie di sbuffi di corrente interrotti da alcuni istanti di corrente nulla e che quindi questo stato di cose non corrisponde a quello da me studiato. Fino a 14 interruzioni al secondo, il liquido riproduceva esattamente le pulsazioni della corrente. Sostituii poi all'interruttore Foucault un corista elettromagnetico con un periodo variabile da 30 a 64 vibrazioni al secondo. Ecco i risultati ottenuti all'esame stroboscopico. Partendo da una piccola frequenza e puntando la linea astigmatica verticale, se è opportuna la velocità del disco di cartone forato, al posto della linea verticale comparisce una piccola ellisse, cioè si coglie il liquido in una fase, per cui la sua deformazione è adatta a dare nel campo del cannocchiale la linea astigmatica orizzontale. Crescendo il numero delle vibrazioni, l'ellisse diventa sempre più piccola fino a scomparire del tutto verso 45 o 50 vibrazioni al secondo. Si può dunque ritenere che verso una tale frequenza il liquido non risponda più alle pulsazioni della corrente.

6. Mi sia permessa una piccola osservazione alla mia prima Nota sopra citata. Trattandosi di raggi di curvatura non molto grandi, come quelli che ho per solito adoperati, bisognerebbe tenere conto anche della capillarità che si aggiunge, nell'opporsi al sollevamento del liquido, alla forza di gravità, in modo che al termine $g\delta\zeta$ andrebbe aggiunta $\frac{2A}{\varrho}$ in cui A è la costante di capillarità e ϱ il raggio di curvatura. Per rendere conto della influenza di questo termine correttivo osservo che per $\varrho = 300$ cm. ed $A = 3,5$ (mm. mgr.) per l'olio di olivo, si avrebbe $g\delta\zeta = 5$ e d'altra parte $\frac{2A}{\varrho} = 0,23$. Ciò che mostra appunto che l'influenza della capillarità non è trascurabile in un calcolo rigoroso.

[1] Philosophical Mag. 1899, vol. 48, pag. 338.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio nazionale Riccardo Felici, mancato ai vivi il 20 luglio 1902; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 25 febbraio 1875.

CORRISPONDENZA

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze e lettere di Copenaghen; la Società zoologica di Tokyo; la Società Reale ed il Museo britannico di Londra; la Società Reale delle scienze di Upsala; la R. Scuola Navale superiore di Genova; il Museo zoologico dell'Università di Copenaghen.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dal 7 luglio al 3 di agosto 1902.

Bastian H. Ch. — Studies in heterogenesis. I, II. London, 1901. 8°.
Biffi S. — Opere Complete. Milano, 1902. 8°. 5 voll.
Brioschi Fr. — Opere matematiche. T. II. Milano, 1902. 4°.
Gallegos J. — Magnetismo universal. Guatemala, 1902. 8°.
Gibelli G. (In memoria di). 1831-1898. Genova, 1902. 8°.
Guccia G. B. — Sulle curve algebriche piane. Palermo, 1902. 8°.
Id. — Sulle superficie algebriche. Palermo, 1902. 8°.
Haasemann L. — Der Pendelapparat für relative Schweremessungen der deutschen Südpolarexpedition. Berlin, 1902. 8°.
Ingolf-Expedition (The Danish). Vol. VI. 1. Copenhagen, 1902. 4°.
Kölliker A. — Ueber die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel und Reptilien. Leipzig, 1902. 8°.
Laurent H. — Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géometrie. Paris, 1902. 8°.
Loriga G. — Notizie e documenti sulla cura dell'afta epizootica con le iniezioni endovenose di sublimato corrosivo. Roma, 1902. 8°.
Meli R. — Notizie scientifico-tecniche sui travertini e specialmente su quelli esistenti nella pianura sotto Tivoli. Roma, 1902. 4°.
Niederlein G. — Ressources végétales des Colonies françaises. Paris, 1902. 4°.
Passerini N. — Il Letame di stalla. Firenze, 1902. 8°.

Pflüger E. — Ueber den Glykogengehalt der Thiere im Hungerzustand. Bonn, 1902. 8°.

Résultats du Voyage du S. Y. Belgica en 1897-1898-1899. Rapports scientifiques. 12 fasc. Anvers, 1901. 4°.

Russo A. — Studî su gli Echinodermi. Catania, 1902. 4°.

Semmola E. — La pressione dell'aria a Napoli ed al Vesuvio. Napoli, 1902. 8°.

Veronese G. — Les postulats de la géométrie dans l'enseignement. Paris, 1900. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 17 agosto 1902.

Matematica. — *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second'ordine, e su di una estensione dei simboli di Christoffel.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

L'argomento cui si riferisce questa Nota è stato da me cominciato a trattare nei due lavori: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni ai differenziali totali di second'ordine* (Ann. di Mat. (3), t. 7), e: *Un teorema della teoria invariantiva*, ecc. (Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, 1901), nel primo dei quali ho dimostrato l'esistenza di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali di second'ordine e di una espressione a derivate parziali di second'ordine, analogo al noto invariante per le forme ordinarie pfaffiane; e nel secondo ho dimostrato l'invariantività delle caratteristiche di certe matrici.

Ora mi propongo di trovare altri invarianti e forme differenziali covarianti, e di far vedere come possa costruirsi una teoria la quale può reputarsi una estensione di quella dei simboli di Christoffel relativi alle *forme differenziali quadratiche*; in simile modo otterrò poi anche, per una espressione ai differenziali secondi, l'estensione degli ordinarii *parametri differenziali*.

Dei risultati di questa Nota mi servirò in altro lavoro per trattare il problema dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione ai differenziali secondi.

1. È necessario richiamare brevemente i simboli e le notazioni introdotte nelle due succitate Memorie.

Sia data la espressione

$$\mathrm{U} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_{ij} \, dx_i \, dx_j \,, \qquad (\mathrm{X}_{ij} = \mathrm{X}_{ji}) \,, \tag{1}$$

e introduciamo i seguenti simboli:

$$\left\{ \begin{aligned} (ij) &= \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathrm{X}_j}{\partial x_i} \\ ((ij)) &= \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_j} - \mathrm{X}_{ij} \\ \}ij\{ &= \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{X}_j}{\partial x_i} - 2\mathrm{X}_{ij} \,, \\ \}ijk\{ &= \frac{\partial^2 \mathrm{X}_k}{\partial x_i \, \partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{X}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathrm{X}_{jk}}{\partial x_i} \,. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Fra questi sussistono le relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} (ij) &= ((ij)) - ((ji)) \\ \}ij\{ &= ((ij)) + ((ji)) \\ \}ijk\{ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \}kj\{ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \}ki\{ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \}ij\{ \,. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Operando una trasformazione di variabili, questi simboli si trasformano colle formole

$$\begin{aligned} (ij) &= \sum_r \sum_s (rs)' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \\ ((ij)) &= \sum_r \sum_s ((rs))' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \\ \}ij\{ &= \sum_r \sum_s \}rs\{' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \,, \end{aligned}$$

$$\}ijk\{ = \sum_r \sum_s \sum_t \}rts\{' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_t}{\partial x_j} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} + \sum_s \sum_t \}st\{' \frac{\partial y_t}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

dove le y sono le nuove variabili, e i simboli cogli apici $'$ rappresentano i valori dei medesimi espressi nelle y; le prime di queste formole sono assai facili a trovarsi, l'ultima è stata calcolata nel secondo dei lavori succitati.

2. Si dimostra subito che *le forme differenziali quadratiche*

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \sum_i \sum_j ((ij)) \, dx_i \, dx_j \\ \mathrm{B} &= \sum_i \sum_j \}ij\{ \, dx_i \, dx_j = 2\mathrm{A} \end{aligned}$$

sono covarianti.

In effetti adoperando le suindicate formole di trasformazione si ha

$$A = \sum_{i,j,r,s,p,q} \cdots \sum ((r\,s))'\, dy_p\, dy_q \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{dy_s}{\partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_j}{\partial y_q}$$

e osservando al solito che

$$\sum_i \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_p}$$

è uguale a zero o ad 1, secondochè gli indici r, p sono diversi od uguali, e che lo stesso si ha per il $\sum_j$, si ricava che i termini non zero del precedente sommatorio sestuplo sono solo quelli in cui $p = r$, $q = s$, e quindi resta

$$A = \sum_r \sum_s ((r\,s))'\, dy_r\, dy_s\,,$$

il che mostra la invariantività di A.

È utile ricordare che i covarianti quadratici A o B hanno un altro intimo legame con la data espressione ai differenziali secondi, e tal legame è quello espresso dalla formola, già trovata nella Memoria negli Annali di Matematica:

$$U = d\,V - A = dV - \frac{1}{2} B, \tag{4}$$

in cui è

$$V = \sum_i X_i\, dx_i\,, \tag{5}$$

e si può osservare *che anche* V *è una forma pfaffiana covariante in rapporto ad* U.

Un fatto importante ad osservare è che *il simbolo* $\}i\,j\,k\{$ *introdotto nei precedenti lavori* nei quali esso ha avuto un posto notevole, *considerato invece in rapporto alla forma differenziale quadratica* B, *si identifica col noto simbolo a tre indici di prima specie di Christoffel,* come risulta immediatamente dall'ultima delle relazioni (3).

Esso è così, considerato in rapporto alla espressione ai differenziali secondi U, una *estensione* del simbolo di Christoffel, e diventerebbe eguale a questo (moltiplicato per — 2) quando la U diventasse una ordinaria forma differenziale quadratica, cioè fossero zero i coefficienti X_k.

Da questa osservazione semplicissima *risulta che tutta la teoria dei simboli di Christoffel e delle relazioni fra essi esistenti, resta estesa senz'altro al caso in cui si assume per forma fondamentale la* U. Così p. es. ricordando la nota formola [1] esistente fra i simboli a tre indici di

[1] Vedi p. es. Bianchi, *Geometria differenziale*, 2ª ediz., vol. I, pag. 66.

Christoffel, *si può dedurre fra i simboli relativi alla forma* U *la seguente relazione:*

$$\sum_i \sum_j \{M'\}_{ij} \{ij\,k\} = -\frac{\partial \log \sqrt{\{M'\}}}{\partial x_k} - \sum_i \sum_j \{ik\} \frac{\partial \{M'\}_{ij}}{\partial x_i} \tag{6}$$

dove $\{M'\}$ rappresenta, giusta una notazione già da noi adoperata nella seconda delle Note citate in principio, il determinante degli elementi $\{i\,j\}$, e le $\{M'\}_{ij}$ rappresentano i complementi algebrici degli elementi del medesimo determinante, divisi per il determinante stesso.

D'altra parte, servendoci di un risultato da noi ottenuto più in generale nella stessa Nota (1), può enunciarsi, per gli ordinarî simboli di Christoffel, un teorema, che potrebbe dimostrarsi anche direttamente, ma che non credo ancora esplicitamente notato.

Ponendo $X_1 = X_2 = \ldots\ldots = X_n = 0$, e osservando che allora le matrici $\{M_i\}$ risultano formate mediante gli ordinarî simboli di Christoffel

$$\begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix},$$

si deduce che *la matrice*

$$\left\| \begin{array}{cccc}
0 & X_{11} & \ldots\ldots\ldots & X_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & X_{n1} & \ldots\ldots\ldots & X_{nn} \\
X_{11} & \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 1,1 \\ n \end{bmatrix} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
X_{1n} & \begin{bmatrix} 1,n \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 1,n \\ n \end{bmatrix} \\
X_{21} & \begin{bmatrix} 2,1 \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 2,1 \\ n \end{bmatrix} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
X_{2n} & \begin{bmatrix} 2,n \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 2,n \\ n \end{bmatrix} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \right\| \tag{7}$$

(1) Prendo occasione da ciò per notare che nell'enunciato del teorema alla fine del § 2 del predetto lavoro, con $\sum_i \{M_i\}$ si *deve* intendere la somma di tutti gli $\{M_i\}$, e non, come ivi si è detto, di un arbitrario numero di essi.

Inoltre, alla fine del lavoro, laddove si fa il prodotto *per colonne* della matrice (16) per la (11), bisogna invece intendere eseguito il prodotto delle due matrici, combinando le *linee* di (16) con le colonne di (11).

come anche quella ottenuta da questa colla soppressione della prima colonna, hanno caratteristiche invarianti per qualunque trasformazione di variabili.

In simile modo si può intendere anche estesa la costruzione dei *parametri differenziali* costruendo quelli in rapporto alla forma B, e considerandoli come *parametri differenziali* relativi alla espressione ai differenziali secondi U.

3. Immaginiamo ora una trasformazione infinitesimale

$$\Xi f = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Poichè le formole di trasformazione per le ξ_k sono evidentemente identiche a quelle per i differenziali dx_k, dalla invariantività di A, B, risulta immediatamente quella delle seguenti forme pfaffiane:

$$\text{(9)}\quad C = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, dx_j\ ,\ D = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, dx_j\ ,\ E = \sum_{ij} \}ij\{\, \xi_i\, dx_j = C + D$$

e similmente delle seguenti formazioni:

$$G = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, \xi_j\ ,\ H = \sum_{ij} \}ij\{\, \xi_i\, \xi_j, \tag{10}$$

Poichè le parentesi $(i\,j)$ si trasformano colle stesse formole che le $((i\,j))$, $\}i\,j\{$, alle forme pfaffiane (9) potrebbe anche aggiungersi la

$$F = \sum_{ij} (ij)\, \xi_i\, dx_j = C - D \tag{11}$$

la quale interviene già nella teoria delle ordinarie forme pfaffiane, quando si studia il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una forma di primo ordine, e che è un covariante simultaneo di V, e Ξ, mentre V, a sua volta, è un covariante di U.

Un importante *covariante di second'ordine della forma* U, è il seguente, il quale si presenta, come vedremo in seguito, nello studio dell'applicazione della trasformazione infinitesima Ξ ad U, facendo lo stesso ufficio che la F fa in rapporto a V:

$$L = \sum_k \left[\sum_r \}kr\{\, \xi_r \right] d^2 x_k + \sum_i \sum_j \left[\sum_r \}ijr\{\, \xi_r \right] dx_i\, dx_j. \tag{12}$$

Trasformando infatti questa espressione nelle y, si ottiene:

$$\sum_{p,q,r,s,k} \{pq\}' \xi_s \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \left[\sum_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h} d^2 y_h + \sum_h \sum_l \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_h \partial y_l} dy_h \, dy_l \right] +$$

$$+ \sum_{i,j,r,h,l} \left[\sum_{p,q} \{pq\}' \xi_s \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} + \sum_{p,q,k} \{pqh\}' \xi_s \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \right] \times$$

$$\times \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} dy_h \, dy_l \, .$$

Ora si ha identicamente

$$(13) \qquad \sum_r \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} = 0 \,, \qquad \text{se } q \text{ è diverso da } s$$

$$= 1 \,, \qquad \text{se } q \text{ è uguale a } s$$

donde si ricava, colla derivazione, un' altra formola identica, la quale, scritta con opportuno scambio di indici, è la seguente:

$$\sum_k \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_h \partial y_l} + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} = 0 \, .$$

Con ciò si vede che la somma del secondo e terzo termine della precedente espressione è identicamente zero, ed applicando poi ripetutamente la (13) agli altri termini, si riconosce infine *la invariantività di* L.

Di qui può ricavarsi una serie di altri risultati; così p. es. immaginando una espressione alle derivate parziali di primo e second' ordine

$$(14) \qquad \Xi' f = \sum_k \xi'_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \sum_j \xi'_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}$$

e formando l' invariante simultaneo di L e di Ξ',

$$\mathrm{N} = \sum_k \sum_r \{k\,r\} \xi_r \xi'_k + \sum_i \sum_j \sum_r \{i\,j\,r\} \xi_r \xi'_{ij}$$

si ha *un nuovo invariante relativo alla forma* U *fondamentale* e che ha evidentemente come caso particolare l' invariante H.

Inoltre formando i simboli di Christoffel *estesi*, relativi alla forma L, si può con questi costruire delle nuove matrici di cui le caratteristiche sono invarianti; si può poi costruire *il covariante quadratico* di L, i suoi *parametri differenziali*, ecc., e si ha così una serie di formazioni che sono *invarianti* rispetto al sistema della forma U fondamentale e di una trasformazione infinitesima.

Come casi particolari possono poi dedursi dei teoremi relativi alle ordinarie forme differenziali quadratiche, teoremi che naturalmente potrebbero anche dimostrarsi direttamente.

Così per esempio:

La espressione ai differenziali secondi

$$(15)\qquad \sum_k \sum_r X_{kr}\,\xi_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} \xi_r\, dx_i\, dx_j\,,$$

dove

$$\begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix}$$

rappresentano gli ordinari simboli di Christoffel, è covariante simultaneo della forma differenziale quadratica

$$(16)\qquad U' \equiv \sum_i \sum_j X_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

e della trasformazione infinitesima Ξ.

La espressione ai differenziali secondi

$$(17)\qquad \sum_k \sum_r X_{kr}\,\xi_r\,\xi'_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} \xi_r\,\xi'_{ij}$$

è invariante simultaneo di U' e delle due espressioni alle derivate parziali Ξ, Ξ'.

Formando i parametri differenziali *in senso esteso* relativi alla forma (15), si ottiene il risultato:

La espressione

$$\frac{1}{P} \sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dove le P_{ij} sono i complementi algebrici degli elementi p_{ij} del determinante P, e i p_{ij} sono formati, mediante i coefficienti della forma differenziale quadratica U', nel seguente modo

$$(19)\qquad p_{ij} = \sum_r \left[\frac{\partial X_{ij}}{dx_r}\,\xi_r + X_{ir}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} + X_{jr}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right],$$

è parametro differenziale relativo alla forma U' e alla trasformazione infinitesima Ξ.

Notiamo infine che (osservando che i differenziali dx_r si trasformano come i ξ_r) dalla invariantività di L *si deduce che*

$$(20)\qquad Q = \sum \sum_r \}k\,r\{\, dx_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \}i\,j\,r\{\, dx_r\, dx_i\, dx_j$$

è un altro covariante di 2° ordine relativo alla forma ai differenziali secondi U; e quindi anche che

$$(21)\qquad \sum_k \sum_r X_{kr}\, dx_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} dx_r\, dx_i\, dx_j$$

formato mediante i simboli di Christoffel, è covariante della forma differenziale quadratica U'.

Geologia. — *I terreni eocenici dei dintorni di Metkovich in Dalmazia e in Erzegovina* (¹). Nota del Socio C. De Stefani e del dott. A. Martelli.

Sulla destra della Narenta il calcare eocenico è già segnato a Vido e secondo il prof. De Stefani si estende anche a Gabela, mentre dei terreni di Metkovich a sinistra della stessa Narenta è soltanto indicato, nelle carte geologiche attualmente esistenti, un lembo assai più a sud del paese. Tale lembo eocenico viene giustamente dallo Stache (²) attribuito all'*Hauptalveolinen- und Nummulitenkalk*.

Della fauna eocenica di Metkovich, a proposito di un confronto fra i depositi nummulitici del Friuli e quelli della Dalmazia, viene fatto un fugace accenno in un lavoro del prof. O. Marinelli (³) il quale ebbe occasione di esaminare parte del materiale raccolto dal prof. De Stefani.

Formazioni cretacee.

La metà orientale di Metkovich si trova sopra una strettissima e regolare piega anticlinale cretacea, diretta, come le altre della regione, da N.O.

(¹) La parte stratigrafica è del prof. De Stefani, la parte paleontologica del dott. Martelli. I fossili di Sibanica e di Krupa ci vennero forniti dal prof. Gasperini di Spalato che sentitamente ringraziamo.

(²) Stache G. *Die liburnische Stufe und deren Grenz-Horizonte.* Abhand. der k. k. geolog. Reichsanstalt, Band XIII Wien 1899.

(³) Marinelli O. *Descrizione geologica dei dintorni di Tarcento nel Friuli.* Pubb. del R. Ist. di Studi sup. pratici e di perfez. Firenze 1902, pag. 71.

a S.E. e costituita da un calcare bianco sporco con *Radiolites* ed altri fossili frammentizi. L'anticlinale in parola è regolare, perchè mentre gli strati sono diretti da N.O. a S.E., a ponente e a mezzogiorno di Metkovich pendono di 60° a S.O., e a levante sono immersi a N.E. Quasi immediatamente da una parte e dall'altra succedono i terreni eocenici; a distanza, tanto a levante nella valle della Krupa in Erzegovina quanto dall'altra parte a S.O. presso S. Antonio in Dalmazia, e un poco più a valle lungo la Narenta, si ritrovano le adiacenti pieghe anticlinali cretacee con la già menzionata orientazione.

Per tal modo, i terreni eocenici che noi stiamo per prendere in considerazione, occupano due abbastanza larghi e regolari sinclinali.

La concordanza fra le diverse roccie è perfetta, però la presenza di parziali flessioni ed inversioni fa prova delle rilevanti pressioni a cui la regione è stata soggetta.

Gli strati cretacei di S. Antonio contengono *Hippurites lumbricalis* D'Orb., numerose *Radiolites* ed altre specie in parte ben conservate, in parte pure in frammenti piccolissimi, insieme con radioli di *echini* e con traccie di *crinoidi*, *corallari* ecc. La roccia consta del solito calcare subcristallino e ceroide che costituisce la Creta superiore nella Morea, nelle isole adiacenti, nel littorale Albanese, in Dalmazia, al Gargano e nell'Appennino centrale, e che per essere qui poco marnoso e meno sfaldabile di quello nummulitico, si copre difficilmente di vegetazione.

In alcuni strati più marnosi compaiono anche degli *Inocerami* con rudiste frammentizie e in quelli superiori, per una trentina di metri, si hanno esemplari di *Hippurites* del tipo della *H. organisans* Mont., ed altre rudiste che però non si prestano ad una sicura determinazione specifica.

Formazione eocenica.

I. Dalla parte di S. Antonio succede concordante sulla Creta, il calcare con *Miliolinae* e con piccole *Alveolinae*.

La stessa formazione comparisce nella parte opposta dell'anticlinale di Metkovich, non molto oltre il paese ma prima di arrivare al confine erzegovese, con un calcare marnoso grigio o più spesso color avana chiaro con *Miliolinae* e con rarissime *Alveolinae* e con gasteropodi e lamellibranchi mal conservati, nel quale alternano schisti galestrini e calcari marnosi molto friabili.

II. Tornando dalla parte di S. Antonio, superiormente, per cinquanta metri di altezza, abbondano nella stessa roccia calcarea le grosse Alveoline, ora più ora meno abbondanti. La roccia è bianchiccia, non cristallina e pendente circa 60° a S.O. Vi abbiamo distinto numerosi esemplari delle

seguenti specie, comuni alla parte media e superiore dell'eocene inferiore.

Alveolina ellipsoidalis Schwag.
Alveolina oblonga d'Orb.
Alveolina ovolum Stache.
Alveolina frumentiformis Schwag.
Orbitulites confr. *Pharaonum* Schwag.

A levante dell'anticlinale di Metkovich, al confine erzegovese, sopra ai calcari a Milioline si ripete questo medesimo calcare sempre marnoso con abbondanti *Alveoline*, piccole *Ostreae* ed altri bivalvi, e seguita fino all'estremo settentrionale del paese di Doljane in Erzegovina, con frequenti alternanze di strati calcarei senza fossili.

Nelle assise più alte sono *Ostreae* abbastanza comuni, *Modiolae, Cardium, Turbo*, difficili però ad isolarsi. Non vi compaiono le nummuliti.

III. Ancora dalla parte di S. Antonio, sopra al calcare ora considerato, ne succede un altro, consimile per i caratteri litologici, con grosse *Alveolinae* e piccole e rare *Nummulites* che non abbiamo potuto determinare con sicurezza a causa della difficoltà di isolarle. Non escludiamo però che possa trattarsi della coppia *Nummulites elegans* Sow.-*N. planulata Lamk.* propria del livello inferiore delle nummuliti (piano Ypresiano) nel qual caso questa roccia con grosse alveoline e piccole nummuliti ci attesterebbe con tutta probabilità la presenza di formazioni riferibili alla parte più alta dell'Eocene inferiore, mentre la sottostante a sole grosse alveoline ne rappresenterebbe la parte media.

IV. Proseguendo ancora, presso S. Antonio succede un calcare con *Nummulites* e *Assilinae,* ma senza Alveoline, mentre inferiormente le Assiline mancano affatto.

Nello stesso sinclinale, dalla parte di Metkovich, poco oltre il paese al piede del poggio di Gledavac, si ha il medesimo calcare con Nummuliti e abbondanti Assiline; esso è alquanto marnoso, gialliccio chiaro, e con frequenti alternanze non solo di straterelli di marne assai ben distinti senza però far passaggio a vero *Flysch*, ma anche di qualche strato di calcare più compatto privo di fossili e somigliante all'*Alberese* dell'Appennino.

Ordinariamente questo calcare nummulitico è compatto come quello di Sebenico, di Scardona, di Busi e di altre parti della Dalmazia, ma non di rado i fossili si sfanno e restano completamente isolati sul terreno. In abbondanza il De Stefani vi ha raccolto esemplari delle seguenti specie:

Nummulites Lamarcki d'Arch. et H.
N. laevigata Lamk. var. *scabra* Lamk. (forma subglobosa e forma depressa).
N. laevigata Lamk. var. *astyla* Tell.

Nummulites subitalica Tell.
N. italica Tell.
N. Lucasana Defr. (tipo).
N. Lucasana Defr. var. *depressa* d'Arch. et H.
N. Lucasana Defr. var. *granulata* de la Harpe.
N. Lucasana Defr. var. *Meneghinii* d'Arch. et H.
N. Lucasana Defr. var. *obsoleta* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *aturensis* d'Arch. et H.
N. perforata d'Orb. var. *Renevieri* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *granulata* Tell.
N. perforata d'Orb. var. *obesa* Leym.
N. Guettardi d'Arch. et H.
N. biaritzensis d'Arch.
N. sub-Beaumonti de la Harpe.
N. Beaumonti d'Arch. et H.
Nummulites sp. nov.
Assilina subspira de la Harpe.
A. spira de Roissy.
A. mamillata d'Arch. var. *plicata* de la Harpe.
A. mamillata d'Arch. var. *granulosa* de la Harpe.
A. exponens Sow. var. *plicata* de la Harpe.
A. exponens Sow. var. *granulosa* d'Arch. et H.

È interessante notare come in questa zona non apparisca mai la coppia *N. Tchihatcheffi-complanata*, che ordinariamente trovasi infatti ad un livello più alto.

Dalla continuazione dei medesimi strati poco più a sud. da Šibanica (*Šibovnica* della carta) sul confine erzegovese, proviene la piccola collezione di nummuliti disgregate inviataci gentilmente in comunicazione dell'egregio prof. Riccardo Gasperini di Spalato; essa ci ha infatti mostrato una identità specifica e numerica quasi perfetta, con le forme di nummulitidi ora citate per i pressi di Metkovich e di Gledavac — S. Antonio.

Una breve zona di calcari con rare *Nummulites* e detriti di altri fossili, sembra occupare il mezzo del sinclinale a ponente di Metkovich.

V. A levante di Metkovic dalla parte dell'Erzegovina ed oltre Doljane, dopo una brevissima interruzione corrispondente alla zona IV, in un tratto di terreno sul quale non si è portata la nostra personale osservazione, succedono gli strati nummulitici di Dracevo e Krupa, delle cui nummuliti disgregate ci ha procurato un'altra piccola collezione il prof. Gasperini. Riportiamo la nota delle specie da noi determinate:

Nummulites Lucasana Defr. (tipo).
N. Lucasana Defr. var. *obsoleta* de la Harpe.

Nummulites Lucasana Defr. var. *depressa* d'Arch. et H.
N. Lucasana Defr. var. *granulata* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *aturensis* d'Arch. et H.
N. perforata d'Orb. var. *obesa* Leym.
N. perforata d'Orb. var. *Renevieri* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *granulata* Tell.
N. Molli d'Arch. var. *Verbeeki* Tell.
N. Brongniarti d'Arch. et H.
N. subdiscorbina de la Harpe.
N. discorbina Schloth.
N. Tchihatcheffi d'Arch. et H.
N. complanata Lamk.
N. latispira Menegh.
N. distans Desh.

La divisione che lo Stache (1) adotta per l'antico terziario dell' Istria e della Dalmazia, può applicarsi in modo generale anche nei dintorni di Metkovich, nei quali — eccezione fatta per le formazioni salmastre che nell' Istria susseguono alla Creta e che qui mancano — si trova il calcare ad alveoline alla base dell'*Hauptnummulitenkalk*. Senonchè, la divisione di Stache è troppo lata specialmente per l'orizzonte delle due *N. perforata* e *complanata* che egli riunisce insieme, e che, quando realmente siano accompagnate, come per esempio al Monte Marian di Spalato e a Krupa in Erzegovina, corririspondono soltanto al Luteziano superiore e non a piani più antichi.

Dal classico lavoro del De la Harpe sopra le nummulitidi d' Egitto e del deserto libico (2) e da quello del Tellini sulle nummulitidi della Maiella, del Gargano e delle isole Tremiti (3) risulta come non si possano dividere i terreni nummulitici di quelle regioni in tanti livelli distintamente caratterizzati da specie peculiari di nummulitidi. E così anche dallo studio dei terreni nummulitici di Spalato noi ci siamo convinti come solo l'aggruppamento delle specie, secondo i criterî che hanno guidato lo stesso De la Harpe (4) a stabilire la sua scala delle nummuliti, possa condurre con tutta probabilità all'esatto riconoscimento dell'orizzonte.

(1) Stache G., op. cit. pag. 56.

(2) De la Harpe Ph., *Monographie der in Aegypten und der lybischen Wüste vorkommenden Nummuliten.* Palaeontographica 1883.

(3) Tellini A. *Le Nummulitidi della Maiella, delle isole Tremiti e del Gargano.* Boll. Soc. Geol. It. Vol. X (1890).

(4) De la Harpe Ph. *Étude des Nummulites de la Suisse.* Mém. de la Soc. Paléont. Suisse, vol. VII, pag. 76.

Il complesso delle citate forme ci porta a conchiudere che nei dintorni di Metkovich, almeno per i livelli stratigrafici più bassi dell'*Hauptnummulitenkalk*, si osserva una successione di nummuliti che non si scosta molto da quella normale. Vi troviamo infatti da prima abbondanza di quelle principali specie subreticolate (*N. Lamarcki* e *laevigata*) e granulate (*N. Lucasana* e *perforata*) che ovunque, *quando non si trovano insieme alla coppia N. Tchihatcheffi-complanata*, rappresentano le formazioni più basse dell'eocene medio passando poi a caratterizzare anche la parte media dello stesso eocene medio o Luteziano, quando le Assiline si associano ad esse in gran numero.

Riconosciuto quindi nei dintorni di Metkovich il graduale passaggio dalla base dell'eocene al Luteziano medio, si comprende pure come i menzionati terreni si completino infine, mercè l'intervento della *N. Tchihatcheffi* e *complanata*, con quelli immediatamente più alti di Krupa e di Spalato.

Senza dilungarci in superflui dettagli, riassumiamo nel presente quadro la successione dei terreni eocenici di Metkovich e Spalato, secondo le nostre attuali osservazioni e secondo quelle riportate in una precedente Nota ([1]).

	PIANI	FACIES	TERRENI	
			Dintorni di Metkovich	Dintorni di Spalato
Eocene medio	Luteziano superiore	Calcari nummulitici con *N. Tchihatcheffi* e *complanata*.	Krupa, Dracevo (Erzegovina).	S. Stefano e Botticelle. Monte Marian.
				Spalato.
	Luteziano medio . .	Calcari compatti e disgregabili con prevalenza di Assiline e Nummuliti granulose.	Sibanica. Occidente del Geedavac presso S.Antonio a levante e a mezzogiorno. Sud di Metkovich.	Salona.
	Luteziano inferiore	Calcari con prevalenza di Nummuliti subreticolate.		
Eocene inferiore	Ypressiano	Calcare a grosse Alveoline e piccoli Nummuliti.	Fra Metkovich e S. Antonio. Al confine erzegovese.	
	Sparnaciano.	Calcare a grosse Alveoline.	Gabela. Doljane. Fra Metkovic e S. Antonio. Colline alla foce della Narenta.	
	Tanetiano	Calcare a Milioline e piccole Alveoline.	Ad oriente di Metkovich prima di giungere al confine erzegovese.	Calcare grigio a vana tra Salona e Clissa.

Adottiamo convenzionalmente la classificazione del De Lapparent, senza pregiudicare nessuna di quelle questioni che in proposito potrebbero sollevarsi.

([1]) Martelli A. *I terreni nummutitici di Spalato in Dalmazia.* Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XI, pag. 334 (Sez. sc. mat. fis. e nat. Seduta del 20 aprile 1902).

Matematica. — *Alcuni teoremi che possono tener luogo di quello della media, per funzioni le cui derivate non sono atte alla integrazione definita.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In questa Nota mi propongo di determinare delle condizioni sufficienti per la validità della formula

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx \leqq f(x) - f(x_0),$$

o dell'altra

$$\int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx \geqq f(x) - f(x_0)$$

(φ , ψ funzioni integrabili nell' intervallo $(x_0 , \ldots x)$), nei casi in cui non è noto se la $f'(x)$ sia integrabile nell' intervallo $(x_0 , \ldots x)$, ma si sa che, fatta tutto al più eccezione dai punti di un insieme discreto, è ivi soddisfatta l'una o l'altra (o l' una e l'altra) delle condizioni:

$$\varphi(x) \leqq f'(x) \quad , \quad \psi(x) \geqq f'(x).$$

Benchè le osservazioni del Dini ed i noti esempî del Volterra e del Kopcke relativi a funzioni che hanno derivata in tutti i punti di un determinato intervallo, senza che questa derivata sia ivi atta alla integrazione definita, si riferiscano a funzioni che fanno infinite oscillazioni; non si può con sicurezza affermare che non vi sieno anche funzioni monotone le cui derivate non sono atte alla integrazione definita.

Incomincierò perciò dal considerare il caso di funzioni monotone, che è quello che presenta minori difficoltà ed ha importanza maggiore.

1. Teorema I. — *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x, ad un valore, monotona, finita e derivabile in tutti i punti di un intervallo finito $(x_0 , \ldots x)$, si conoscano due funzioni φ , ψ atte alla integrazione definita in quel medesimo intervallo e, in ogni punto di esso, sia soddisfatta l'una o l'altra (o l'una e l'altra) delle due relazioni:*

$$(1) \qquad \varphi(x) \leqq |f'(x)| \quad , \quad |f'(x)| \leqq \psi(x).$$

Dico che, indipendentemente dalla integrabilità della $f'(x)$, si ha corrispondentemente:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x)-f(x_0)| \quad ; \quad |f(x)-f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx \,.$$

Si divida infatti l'intervallo $(x_0, \dots x)$ in un numero arbitrario di tratti $(x_0, \dots x_1), (x_1, \dots x_2), \dots (x_n, \dots x)$. Chiamando δ_s l'ampiezza del tratto $(x_s, \dots x_{s+1})$, $(s=0,1,2\dots n,\ x_{n+1}=x)$, si ha:

$$(3) \qquad \begin{cases} |f(x_{s+1})-f(x_s)| = \delta_s |f'(\xi_s)| \\ (s=0,1,\dots n,\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_{s+1}) \,. \end{cases}$$

Dalle (1) si ricava:

$$(4) \qquad \delta_s\,\varphi(\xi_s) \leqq \delta_s |f'(\xi_s)| \quad , \quad \delta_s |f'(\xi_s)| \leqq \delta_s\,\psi(\xi_s) \,,$$

dunque:

$$\begin{cases} \delta_s\,\varphi(\xi_s) \leqq |f(x_{s+1})-f(x_s)| \quad , \quad |f(x_{s-1})-f(x_s)| \leqq \delta_s\,\psi(\xi_s) \\ \qquad (s=0,1\dots n,\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_{s+1}) \end{cases}$$

e, sommando:

$$\begin{cases} \sum_{s=0}^{n} \delta_s\,\varphi(\xi_s) \leqq \sum_{s=0}^{n} \Big|f(x_{s+1})-f(x_s)\Big| \quad , \quad \sum_{s=0}^{n} \Big|f(x_{s+1})-f(x_s)\Big| \sum_{s=0}^{n} \delta_s\,\psi(\xi_s) \,. \\ \qquad s=0,1,\dots n,\ x_s \leqq \xi \leqq x_{s+1} \end{cases}$$

Essendo ora la $f(x)$ monotona, le differenze $f(x_{s+1})-f(x_s)$ hanno tutte il medesimo segno, epperò:

$$\sum |f(x_{s+1})-f(x_s)| = |f(x)-f(x_0)|$$

ed anche:

$$(5) \qquad \begin{cases} \sum_{s=0}^{n} \delta_s\,\varphi(\xi_s) \leqq |f(x)-f(x_0)| \quad , \quad |f(x)-f(x_0)| \leqq \sum_{s=0}^{n} \delta_s\,\psi(\xi_s) \\ \qquad s=0,1,\dots n,\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_{s+1} \end{cases}$$

Di qui, per le ipotesi poste, si ricava appunto:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x)-f(x_0)| \quad , \quad |f(x)-f(x_0) \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx \,.$$

2. Il teorema ora dimostrato giustifica le deduzioni fatte ai nn. 17 e 21 della Memoria: *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* (Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena, a. 1901).

3. Teorema II. — *La funzione $f(x)$ della variabile reale x, sia ad un valore, monotona, finita, derivabile in tutti i punti dell'intervallo $(x_0, \ldots x)$. Sieno φ e ψ due funzioni atte alla integrazione definita, in quel medesimo intervallo. Se in ogni tratto arbitrariamente piccolo $(x_s, \ldots, x_{s+1})$ $x_0 \leqq x_s < x_{s+1} \leqq x$, il limite inferiore dei valori della φ non è maggiore di quello dei valori assoluti della $f'(x)$; od* (ed) *il limite superiore di questi valori assoluti non è maggiore di quello della ψ in quel tratto, si avrà, indipendentemente dalle integrabilità della $f'(x)$:*

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx \leqq |f(x) - f(x)| \quad , \quad |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx .$$

4. Teorema III. — *Sia $(x_0, \ldots x)$ un intervallo dove la $f(x)$ è ad un valore, monotona, finita e derivabile e le φ e ψ sono integrabili assolutamente* (1). *Consideriamo l'insieme* K *dei punti che rimangono in quell'intervallo dopo che se ne è sottratto un insieme discreto Ξ* (2) *e supponiamo che il limite inferiore dei valori che la φ assume nei punti di* K *che sono situati in un tratto qualunque $(x_s, \ldots x_{s+1})$ $x_0 \leqq x_s < x_{s+1} \leqq x$, dell'intervallo dato, non sia maggiore del limite inferiore dei valori assoluti della $f'(x)$ in quei medesimi punti, o* (e) *che il limite superiore di quei valori assoluti della $f'(x)$, non sia maggiore del corrispondente limite superiore della ψ.*

Sarà soddisfatta l'una o l'altra (l'una e l'altra) delle due relazioni:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx \leqq |f(x) - f(x_0)| \quad , \quad |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx .$$

Ad ogni numero ε positivo, arbitrario, possiamo far corrispondere una scomposizione dell' intervallo $(x_0, \ldots x)$ in un numero finito di tratti, con la condizione che, la somma $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_p$ delle lunghezze dei tratti

$$(x_1, \ldots x_1 + \delta_1) \; , \; (x_2, \ldots x_2 + \delta_2), \ldots (x_p, \ldots x_p + \delta_p),$$

che contengono punti di Ξ sia minore di ε.

Anche ciascuno dei numeri $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ può dunque essere supposto minore di ε.

Tenendo conto delle ipotesi poste per la f e per le φ e ψ, potremo,

(1) Cfr. Stolz, Wien. Berichte, 107, 108. Vedi anche E. H. Moore, *Of improper definite integrals*, Trans. American. Math. Soc., vol. 2, n. 3, pagg. 296-330; vol. 2, n. 4, pagg. 459-475 (1901).

(2) Cfr. la mia Nota: *Contributo alla teoria degl' insiemi*, n. 1.

ad ogni numero positivo σ, far corrispondere un ε abbastanza piccolo perchè sieno contemporaneamente minori di σ le tre somme [1]:

$$(6)\quad \begin{cases} S = |f(x_1+\delta_1) - f(x_1)| + |f(x_2+\delta_2) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_p+\delta_p) - f(x_p)|, \\ S_1 = \left| \int_{x_1}^{x_1+\delta_1} \varphi(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_2+\delta_2} \varphi(x)\,dx \right| + \cdots + \left| \int_{x_p}^{x_p+\delta_p} \varphi(x)\,dx \right| \\ S_2 = \left| \int_{x_1}^{x_1+\delta_1} \psi(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_1+\delta_2} \psi(x)\,dx \right| + \cdots + \left| \int_{x_p}^{x_p+\delta_p} \psi(x)\,dx \right| . \end{cases}$$

Siccome poi negli intervalli

$$(x_0, \dots x_1) \;,\; (x_1+\delta_1, \dots x_2), \dots (x_p+\delta_p, \dots x)$$

sono soddisfatte le condizioni richieste nell'enunciato del teorema II, avremo le relazioni:

$$(7)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x_1) - f(x_0)| \quad , \quad |f(x_1) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx \\ \int_{x_1+\delta_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x_2) - f(x_1+\delta_1)| \quad , \quad |f(x_2) - f(x_1+\delta_1)| \leqq \int_{x_1+\delta_1}^{x_2} \psi(x)\,dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_{x_p+\delta_p}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x) - f(x_p+\delta_p)| \quad , \quad |f(x) - f(x_p+\delta_p)| \leqq \int_{x_p+\delta_p}^{x} \psi(x)\,dx . \end{cases}$$

Tenendo conto delle (6) e del fatto che la $f(x)$ è monotona, si ha:

$$(8)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx + \int_{x_1+\delta_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx + \cdots + \int_{x_p+\delta_p}^{x} \varphi(x)\,dx \geqq \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx - S_1 \\ \int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx + \int_{x_p+\delta_p}^{x_2} \psi(x)\,dx + \cdots + \int_{x_p+\delta_p}^{x} \psi(x)\,dx \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx + S_2 \\ |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1+\delta_1)| + \cdots + |f(x) - f(x_p+\delta_p)| = \\ = |f(x) - f(x_0)| - S . \end{cases}$$

Da queste, e dalle (7), si ricava:

$$(9)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx - (S_1 - S) \leqq |f(x) - f(x_0)| , \\ |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx + (S + S_2) . \end{cases}$$

[1] Cfr. p. e. E. H. Moore, loc. cit., pag. 310. La Memoria del Moore contiene anche copiose notizie bibliografiche, alle quali rimando per le citazioni su questo argomento.

Ricordando che, indipendentemente dai valori delle espressioni $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx$, $\int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx$, $|f(x) - f(x)|$, le quantità positive S, S_1, S_2, possono farsi piccole a piacere, possiamo dalle (9) dedurre le relazioni richieste:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx \leqq |f(x) - f(x_0)| \quad , \quad |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx .$$

Questo teorema non esclude che nei punti di un insieme discreto Ξ, le funzioni f', φ, ψ, possono assumere valori nulli od infiniti.

4. Per le funzioni non monotone i teoremi precedenti possono cessare dall'essere validi. Si hanno però sempre i teoremi seguenti:

Teorema IV. — *Se $f(x)$ è una funzione della variabile reale x, ad un valore finita, continua, derivabile in un dato intervallo $(x_0, \ldots x)$; se esiste una funzione $\psi(x)$ integrabile assolutamente* (¹) *nello stesso intervallo, con la proprietà che, fatta tutto al più eccezione dai punti di un insieme discreto Ξ, in ogni tratto $(x_s, \ldots x_s + \delta_s)$, per quanto si voglia piccolo di $(x_0, \ldots x)$, il limite superiore dei valori assoluti della $f'(x)$, non sia maggiore del limite superiore L_s delle ψ, si ha la relazione:*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx .$$

La dimostrazione si fa osservando che, in ogni intervallo $(x_s, \ldots x_s + \delta_s)$ non contenente punti di Ξ si ha

$$\begin{cases} |f(x_s + \delta_s) - f(x_s)| = \delta_s |f'(\xi_s)| \leqq \delta_s L_s \\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_s + \delta_s , \end{cases}$$

e che

$$|\Sigma f(x_s + \delta_s) - f(x_s)| \leqq \Sigma |f(x_s + \delta_s) - f(x_s)| \leqq \Sigma \delta_s L_s .$$

Teorema V. — *Sia $(x_0, \ldots x)$ un intervallo dove la funzione $f(x)$ è ad un valore finita, continua, derivabile, e le funzioni φ, ψ sono assolutamente integrabili.*

Indichiamo con K l'insieme dei punti che rimangono in quell'intervallo, dopo che se ne è sottratto un insieme discreto Ξ, e supponiamo

(¹) Cfr. Stolz, *Grundzüge*, vol. 3 (1899) pag. 122 e segg. Moore, *Of improper definite integrals* (Trans. of the. Am. Math. Soc. (1901), pag. 322.

che il limite inferiore l_s *dei valori che la* φ *assume nei punti appartenenti a* K *e situati in un tratto qualunque* $(x_s, \dots x_{s+1})$, $x_0 \leqq x_s < x_{s+1} \leqq x$, *dell'intervallo* $(x_0, \dots x)$, *non sia maggiore del limite inferiore dei valori che la* f' *ha in quegli stessi punti,* o (e) che, *il limite superiore di questi valori, non sia maggiore del corrispondente limite superiore* L_s *della* ψ, *si avrà l'una o l'altra (l'una e l'altra) delle relazioni seguenti:*

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx \leqq f(x) - f(x_0) \quad , \quad f(x) - f(x_0) \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx \,.$$

L' importanza pratica di questo teorema è molto minore di quella del teorema III poichè qui, anche quando le (10) sieno entrambe soddisfatte e sieno finiti e diversi dallo zero i due integrali $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx$, $\int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx$, non si può affermare che sia diversa dallo zero anche la differenza $f(x) - f(x_0)$ se non nel caso che quei due integrali abbiano lo stesso segno.

La seconda di quelle relazioni, non può poi da sola assicurarci che non sia infinito il valore assoluto $|f(x) - f(x_0)|$.

Il teorema si dimostra partendo dalla relazione

$$\begin{cases} l_s \leqq f(\xi_s) \leqq L_s \\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_s + \delta_s \end{cases}$$

con considerazioni analoghe a quelle svolte al teorema III. Basta soltanto, conservando le notazioni (6), sostituire l'ultima delle formule (8) con la seguente:

$$f(x) - f(x_0) - S \leqq f(x_1) - f(x_0) +$$
$$+ f(x_2) - f(x_1 + \delta_1) + \cdots + f(x) - f(x_p + \delta_p) \leqq f(x) - f(x_0) + S \,,$$

ed al posto delle (9) scrivere le seguenti:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx - (S_1 + S) \leqq f(x) - f(x_0) \ , \ f(x) - f(x_0) \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx + S_2 + S \,.$$

I risultamenti a cui sono giunto in questa Nota e nella precedente che ha il titolo: *Contributo alla teoria degli insiemi*, servono di preparazione allo studio del problema seguente:

Due funzioni f, φ, *della variabile reale* x, *uniformi, finite, derivabili nei punti di un determinato intorno di un punto* $x = a$, *sono, nel punto* a *stesso, entrambe infinite od infinitesime.*

Il quoziente delle derivate: $\frac{f'}{\varphi'}$, *in tutti i punti di un insieme* K *contenuto in quell'intorno, soddisfa una relazione della forma:*

$$\mu \leqq \left| \frac{f'}{\varphi'} \right| \leqq \mathrm{M},$$

μ, M, *numeri positivi. Nei punti* $[\xi]$ *dell'intorno considerato, non appartenenti a* K, *quel quoziente può invece assumere valori arbitrari.*

Si domanda qual relazione occorre e basta che interceda fra le dimensioni degli insiemi K, $[\xi]$, *perchè il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *delle funzioni date soddisfi, in* t u t t i *i punti di un determinato intorno del punto* $x = a$, *la relazione:*

$$\nu \leqq \left| \frac{f}{\varphi} \right| \leqq \mathrm{N},$$

ν, N, *numeri positivi.*

La risoluzione di questo problema ed alcune applicazioni alla determinazione dell'ordine di infinito, si trovano in una memoria che è in corso di stampa negli Annali di matematica.

Matematica. — *Su una classe di equazioni a radici reali.* Nota di Onorato Niccoletti, presentata dal Socio L. Bianchi.

Una delle più semplici dimostrazioni della realità delle radici della equazione *secolare* (da cui dipende ad es. la determinazione degli assi di una quadrica a coefficienti reali di un S_n) è fondata sull'ortogonalità di due *direzioni principali* corrispondenti a radici diverse della equazione stessa. Quest'osservazione, convenientemente estesa, vale in molti altri casi e conduce ad una classe di equazioni, e di sistemi di equazioni, a radici tutte reali, di cui l'equazione secolare è caso particolarissimo. Mi permetto di comunicare alla R. Accademia i risultati ottenuti per questa via, riserbandomi di darne in altro luogo le dimostrazioni.

1. Una forma bilineare in $2n$ variabili $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$, $\mathrm{A} = \sum_1^n {}_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu$ si dice di *Hermite* e di *prima* (*seconda specie*) quando per tutti i valori degli indici μ e ν i coefficienti $a_{\mu\nu}$ e $\pm a_{\nu\mu}$ sian numeri complessi coniugati, sia cioè, con simboli noti, $\bar{a}_{\mu\nu} = \pm a_{\nu\mu}$. Una forma di Hermite di seconda specie si cambia in una di prima, moltiplicandola per i

e inversamente: dando alle variabili x_μ, y_μ valori complessi coniugati, assume un valore reale (o puramente immaginario) secondo che è di prima (o di seconda) specie.

Le forme di Hermite di prima specie, come le forme quadratiche a coefficienti reali, si dividono in riducibili ed irriducibili, in definite, semidefinite, indefinite [1]. Una forma di Hermite di prima specie non indefinita si dirà poi *parzialmente definita rispetto alle variabili* $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots x_{h_l}$ (e $y_{h_1}, y_{h_2} \dots y_{h_l}$) quando l'annullarsi della forma per valori complessi coniugati delle variabili porti di necessità l'annullarsi delle $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots x_{h_l}$ (e delle coniugate). Perchè questo sia è necessario e sufficiente, oltre esser la forma non indefinita, che sopprimendo dal *discriminante* $a = |a_{\mu\nu}|$ della forma le righe (o le colonne) relative alle variabili $x_{h_1}, \dots x_{h_l}$, la caratteristica della matrice residua sia inferiore di altrettante unità a quella del discriminante della forma stessa.

2. Siano ora:

$$(1) \qquad A(x, y) = \Sigma_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu ; \quad B(x, y) = \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu y_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots n)$$

due forme bilineari nelle $2n$ variabili $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$: e si consideri l'equazione in ω:

$$(2) \qquad D(\omega) = |a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots n).$$

I coefficienti di questa equazione sono gli invarianti simultanei delle due forme A e B; le sue radici $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ sono quindi invarianti *assoluti* delle due forme. Se ω_r è una qualunque radice, i due sistemi di equazioni lineari omogenee nelle incognite $x^{(r)}, y^{(r)}$:

$$(3_r) \qquad \sum_1^n{}_\mu (a_{\mu\nu} - \omega_r b_{\mu\nu}) x_\mu^{(r)} = 0 \quad (\nu = 1, 2 \dots n),$$

$$(4_r) \qquad \sum_1^n{}_\nu (a_{\mu\nu} - \omega_r b_{\mu\nu}) y_\nu^{(r)} = 0 \quad (\mu = 1, 2 \dots n),$$

ammettono soluzioni $x_1^{(r)} \dots x_n^{(r)}$ $(y_1^{(r)} \dots y_n^{(r)})$ *non tutte nulle*; e se ω_r, ω_s sono due radici *diverse* della (2), $x^{(r)}, y^{(s)}$ soluzioni delle corrispondenti equazioni (3_r), (4_s), *si ha la relazione fondamentale*:

$$(5) \qquad B(x^{(r)}, y^{(s)}) = \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu^{(r)} y_\nu^{(s)} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots n).$$

Le A e B siano ora forme di Hermite di prima specie (od ambedue di seconda, il che è lo stesso); l'equazione (2) ha allora i coefficienti reali

[1] Cfr. Ricci, *Algebra*, pag. 131 e segg.; Loewy, Giornale di Crelle, Bd. 120 S. 53-72.

e quindi le sue radici complesse, se ne ha, sono a coppia coniugate; se ω_1 ed ω_2 sono due tali radici complesse coniugate (e quindi $\omega_1 \neq \omega_2$), è subito visto che nelle (3_1), (4_2) *possono* $x_\nu^{(1)}, y_\nu^{(2)}$ prendersi complesse coniugate, $y_\nu^{(2)} = \bar{x}_\nu^{(1)}$; ed allora la (5), fattovi $r = 1, s = 2$, diventa:

$$B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu^{(1)} \bar{x}_\nu^{(1)} = 0\,. \tag{6}$$

Sia ora la B parzialmente definita rispetto alle x_1, x_2, x_m; la (6) dimostra che deve allora aversi:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_m^{(1)} = 0\,.$$

In tale ipotesi le equazioni (3_1) sono dunque tali che per qualunque loro soluzione deve essere $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_m^{(1)} = 0$; e quindi, ove la radice ω_1 renda il determinante (2) di caratteristica $r < n$, essa deve rendere di caratteristica $r - m$ la matrice formata dalle ultime $n - m$ righe (o colonne) del determinante stesso.

Consideriamo ora il caso che la B contenga *solo* le variabili $x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_m$ e quindi sia rispetto ad esse totalmente definita: la condizione superiore non può essere allora soddisfatta (purchè il determinante (2) non sia identicamente nullo, per qualunque ω), poichè la matrice delle ultime $n - m$ righe è indipendente da ω ed ha quindi la caratteristica $n - m$. D'altronde è sempre possibile trasformare la B in una forma di Hermite definita in tutte le variabili che contiene. Ne segue *il teorema fondamentale*:

I. *Se* A *e* B *sono due forme di Hermite di prima specie ed una di esse, ad es. la* B *non è indefinita, l'equazione*:

$$|a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu\,, \nu = 1\,, 2 \ldots n) \tag{2}$$

ha tutte le radici reali.

Considerando insieme colla forma $A - \omega B$ le forme bilineari ad essa *associate* [1], ed estendendo un procedimento già tenuto dal Clebsch in un caso particolare [2], si dimostra anche:

II. *Una radice multipla di ordine* ϱ *della equazione* (2) *rende il determinante* $D(\omega)$ *di caratteristica* $n - \varrho$.

[1] Cfr. Niccoletti, Atti dell'Accademia di Torino, 15 giugno 1902.
[2] Clebsch, Giornale di Crelle, Bd. 62, pag. 232 segg.

Indichiamo con $D_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega)$ il minore principale di ordine $n-k$ del determinante (2), che si ottiene sopprimendovi le righe e le colonne $i_1\, i_2 \dots i_k$; sia inoltre η l'unità negativa o positiva, secondochè B è positiva o negativa (per valori complessi coniugati delle variabili, che non l'annullino); ponendo:

$$(7) \qquad \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega) = \eta^k \,.\, D_{i_1 \dots i_k}(\omega)$$

ed indicando con $i_1 \dots i_n$ una determinata permutazione degli indici $1, 2 \dots n$, consideriamo la successione di $n+1$ funzioni:

$$(8) \qquad D(\omega)\,,\ \Delta_{i_1}(\omega)\,,\ \Delta_{i_1 i_2}(\omega)\,, \dots \Delta_{i_1 \dots i_n}(\omega) = 1\,;$$

si ha per essa il teorema:

III. *Se tra le funzioni* (8) *non ve ne sono delle identicamente nulle, nè due qualunque consecutive si annullano per uno stesso valore di* ω, *la* (8) *è una successione di Sturm per la equazione* (2) *e quindi il numero delle radici reali di essa equazione comprese in un intervallo* $(\alpha\beta)$ (*ciascuna contata col suo ordine di moltiplicità*) *è uguale al numero delle variazioni che la* (8) *perde nell'intervallo stesso* (¹).

3. Alcune osservazioni sui risultati che precedono.

a) Particolarizzando convenientemente le forme A e B, si hanno dalla (2) delle classi di equazioni, apparentemente diverse, con radici tutte reali, considerate, tra gli altri, da Bochardt, Clebsch, Christoffel ecc. ecc. (²).

b) I teoremi I e II possono evidentemente enunciarsi dicendo che: *I divisori elementari del determinante* $D(\omega)$, *corrispondenti alle radici finite della* (2), *sono reali e lineari* (³); si ottiene in tal guisa la prima parte di un teorema, ottenuto la prima volta, per via trascendente, dal sig. Gundelfinder (⁴). Il teorema del sig. Gundelfinder considera anche i divisori elementari corrispondenti alle radici infinite della (2) e dimostra che essi possono avere solo il primo ed il secondo grado. Delle proprietà elementari della teoria dei determinanti permettono di ottenere (e precisare) questo risultato: si ha così in ciò che precede una dimostrazione puramente algebrica, e di carattere elementare, del teorema del sig. Gundelfinder.

c) Delle due forme di Hermite A e B, una B sia di prima specie, l'altra A di seconda. Ci riduciamo al caso dianzi trattato cambiando ω in $i\omega$. Se dunque la B non è indefinita, la equazione (2) ha in questo caso tutte radici *immaginarie pure*. Essa avrà inoltre i coefficienti reali quando sian

(¹) Weber, *Algebra*, vol. I, prima ediz., pag. 276.

(²) Clebsch, Giornale di Crelle, Bd. 57, pag. 327; e 62, pag. 232. Christoffel — ibidem Bd. 63, s. 255.

(³) Muth, *Elementartheiler*, pag. 179.

(⁴) Hesse, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie*, seconda ediz., 1876, supp. X.

tali i coefficienti di A e di B, quando la B sia dunque reale e simmetrica (e non indefinita), la A reale ed emisimmetrica. In questo caso la (2) può ridursi a contenere solo le potenze pari di ω e posto $\omega^2 = -u$, si ottiene da essa *un'equazione* $H(u) = 0$ *a radici tutte reali e positive.*

d) L'equazione (2) conserverà tutte le radici reali, quando, nelle ipotesi superiori, o se ne moltiplichi il primo membro per un fattore non nullo, ad es. per un determinante di ordine n indipendente da ω e diverso da zero, oppure quando si eseguiscano sulle x e sulle y sostituzioni lineari arbitrarie. Si ottengono così delle equazioni a radici tutte reali di forma molto diversa dalla (2): tra queste ve ne è una classe, dovuta ancora al sig. Gundelfinder [1].

e) Infine delle due forme bilineari A e B, l'una, ad es. la B sia di Hermite, di prima specie, e *definita*; la A sia qualunque. La (2) avrà allora in generale coefficienti e radici complesse, ma se ne può limitare la parte reale e l'immaginaria; più in generale si ha il teorema:

Se la B *è una forma definita di Hermite, ed* $\omega = p + iq$ *è una radice della* (2), *indicando con* ϱ *e* σ *due indeterminate* *reali* *affatto arbitrarie, con* $M_{\varrho\sigma}$, $m_{\varrho\sigma}$ *la massima e minima radice dell'equazione* (*a radici tutte reali*):

$$\left| \varrho \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} + \sigma \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i} - \omega b_{\mu\nu} \right| = 0, \tag{9}$$

si ha la limitazione:

$$m_{\varrho\sigma} \leq \varrho p + \sigma q \leq M_{\varrho\sigma} \tag{10}$$ [2].

4. I teoremi che precedono possono estendersi in due sensi diversi, sia rimanendo nel caso di una sola equazione, sia passando a sistemi di più equazioni. Ci limiteremo ad accennare i casi più importanti che si presentano nell'una e nell'altra estensione.

Siano tre forme di Hermite in $2n$ variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, $y_1 y_2 \dots y_n$:

$$A = \Sigma_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu\,; \quad B = \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu y_\nu\,; \quad C = \Sigma_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu \tag{11}$$

e si consideri l'equazione in ω:

$$E(\omega) = |a_{\mu\nu} + 2\omega\, b_{\mu\nu} + \omega^2 c_{\mu\nu}| = 0. \tag{12}$$

Questa equazione ha i coefficienti reali e ad una sua radice ω_r possono farsi corrispondere due sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$\Sigma_\mu (a_{\mu\nu} + 2\omega_r b_{\mu\nu} + \omega_r^2 c_{\mu\nu}) x_\mu^{(r)} = 0\,, \quad (\nu = 1, 2, \dots n) \tag{13$_r$}$$

$$\Sigma_\nu (a_{\mu\nu} + 2\omega_r b_{\mu\nu} + \omega_r^2 c_{\mu\nu}) y_\nu^{(r)} = 0\,, \quad (\mu = 1, 2, \dots n) \tag{14$_r$}$$

[1] Dingeldey, Giornale di Crelle, vol. 119.

[2] Bedinxon, *Sur les racines d'une équation fondamentale* (Accademia di Stoccolma, 14 novembre 1900).

con soluzioni non tutte nulle; ed ancora, se ω_r, ω_s sono due radici *diverse* della (12), $x^{(r)}, y^{(s)}$ soluzioni dei corrispondenti sistemi (13_r), (14_s), *si hanno le tre relazioni*:

$$(15)\quad \begin{cases} (a) & 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) + (\omega_r + \omega_s)\, C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,, \\ (b) & A(x^{(r)}, y^{(s)}) - \omega_r\, \omega_s\, C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,, \\ (c) & \left(\dfrac{1}{\omega_r} + \dfrac{1}{\omega_s}\right) A(x^{(r)}, y^{(s)}) + 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,. \end{cases}$$

Si deducono dalle (15) conseguenze notevoli:

a) Una delle forme estreme ad es. la C sia definita; allora: *la parte reale p di una radice complessa della* (12) *è sempre compresa tra la massima e minima radice dell'equazione in* λ (*a radici tutte reali*)

$$|b_{\mu\nu} + \lambda c_{\mu\nu}| = 0\,;$$

il quadrato r^2 *del modulo tra la massima e minima radice dell'equazione in* σ (*pure a radici reali*):

$$|a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu}| = 0\,.$$

b) Sia definita la B: si hanno dalle (15) *a*) e *c*) conseguenze analoghe per le quantità $\frac{1}{p}$; $\frac{p}{r^2}$.

c) Due consecutive tra le (1), ad es. la B e la C sian *parzialmente* definite rispetto a gruppi complementari di variabili; cioè se la B è definita rispetto alle $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots x_{h_l}$, la C rispetto alle $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_m}$, tra le $x_{h_1}, \ldots x_{h_l}$; $x_{k_1}, \ldots x_{k_m}$ si trovino tutte le $x_1, x_2, \ldots x_n$; in questa ipotesi si ha: *Le radici complesse della* (2), *non immaginarie pure*, *hanno la parte reale del medesimo segno.*

Si indichi inoltre con ε l'unità positiva o negativa, secondochè il segno di B è il positivo o negativo: posto allora (con notazioni analoghe al n° 2):

$$(16)\qquad E_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega) = \varepsilon^k \,.\, \mathrm{E}_{i_1 \ldots i_k}(\omega)\,,$$

si consideri la successione:

$$(17)\qquad \mathrm{E}(\omega)\,, E_{i_1}(\omega)\,, E_{i_1 i_2}(\omega)\,, \ldots;\ E_{i_1 \ldots i_n}(\omega) = 1\,.$$

Secondochè B e C hanno ugual segno (o segno contrario), la successione (17) ha proprietà analoghe a quelle di una successione di Sturm per le radici reali e positive (o reali e negative) della equazione (12).

d) Siano invece le due forme estreme A e C parzialmente definite e di segno contrario; e siano definite rispetto a due gruppi complementari di variabili, oppure con una *stessa* sostituzione lineare sulle x (e la coniu-

gata sulle y) sian riducibili a contenere le stesse k variabili $x'_1, x'_2, .. x'_k$ $(y'_1, y'_2, ... y'_k)$; in questo caso: *L'equazione* (12) *ha tutte le radici reali.*

Se insieme anche la forma intermedia B è (parzialmente) definita (come a c)) è possibile inoltre costruire dai minori principali del determinante (12) due successioni di Sturm di $n+1$ funzioni, l'una per le radici positive, l'altra per le radici negative della equazione stessa: sicchè in particolare quando tutte tre le forme sian definite e ad es. le A, B parzialmente, la C totalmente, e le A e C abbian segno contrario, si ha: *L'equazione* (12) *ha le* $2n$ *radici reali ed* n *positive,* n *negative.*

e) Considerazioni leggermente diverse dalle antecedenti conducono ancora al risultato seguente. La forma C si supponga totalmente definita; e le A, B, C sian tali che si abbia

$$AC - B^2 \leq 0 \tag{18}$$

per tutti i possibili valori delle x (e i coniugati delle y); in questo caso ancora: *L'equazione* (12) *ha tutte le radici reali.*

Se invece, per tutti i valori delle x, vale la disuguaglianza:

$$AC - B^2 > 0, \tag{19}$$

la equazione (12) non ha radici reali; le parti reali ed immaginarie delle sue radici complesse possono limitarsi.

5. Nella (12) le due forme estreme A e C siano ancora di prima specie, la B di seconda: ci riduciamo al caso precedente cambiando ω in $i\omega$. Ne segue in particolare: *Se le forme* A *e* C *sono (parzialmente) definite di ugual segno (nelle condizioni* (d)) *la* (12) *ha tutte le radici immaginarie pure.* Essa avrà inoltre i coefficienti reali, quando le A, B, C siano anche esse a coefficienti reali, e quindi le A e C simmetriche, la B emisimmetrica: e posto $\omega^2 = -u$ si dedurrà dalla (12) un'equazione $G(u) = 0$, *con radici tutte reali e positive.* Inoltre dai minori principali del determinante (12) è possibile costruire una successione di $n+1$ funzioni razionali intere in u, che abbia per la $G(u) = 0$ proprietà analoghe a quelle di una successione di Fourier.

6. Volendo trattare di un sistema di due equazioni con due incognite, consideriamo due reti proiettive di forme bilineari, in $2n$ e $2m$ variabili rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi A + \eta B + \zeta C = \Sigma_{\mu\nu}(\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu})\, x_\mu y_\nu, & (\mu, \nu = 1, 2 ... n), \\ \xi D + \eta E + \zeta F = \Sigma_{rs}(\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs})\, u_r v_s; & (r, s = 1, 2 ... m), \end{array} \right. \tag{20}$$

due forme corrispondenti delle due reti saranno ambedue specializzate, quando sia insieme:

$$|\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu}| = 0, \quad |\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs}| = 0. \tag{21}$$

Se $\omega_\alpha = (\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)$ è una soluzione (radice) delle (21), i quattro sistemi di equazioni lineari omogenee

$$(22)\begin{cases} (a) & \sum_1^n{}_\mu (\xi_\alpha a_{\mu\nu} + \eta_\alpha b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha c_{\mu\nu})\, x_\mu^{(\alpha)} = 0\,, \quad (\nu = 1, 2 \ldots n) \\ (b) & \sum_1^n{}_\nu (\xi_\alpha a_{\mu\nu} + \eta_\alpha b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha c_{\mu\nu})\, y_\nu^{(\alpha)} = 0\,, \quad (\mu = 1, 2 \ldots n) \\ (c) & \sum_1^m{}_r (\zeta_\alpha d_{rs} + \eta_\alpha e_{rs} + \zeta_\alpha f_{rs})\, u_r^{(\alpha)} = 0\,, \quad (s = 1, 2 \ldots m) \\ (d) & \sum_1^m{}_s (\xi_\alpha d_{rs} + \eta_\alpha e_{rs} + \zeta_\alpha f_{rs})\, v_s^{(\alpha)} = 0\,, \quad (r = 1, 2 \ldots m) \end{cases}$$

hanno soluzioni *non tutte nulle*, e per due radici $\omega_\alpha, \omega_\beta$ *distinte* si ha la relazione fondamentale:

$$(23) \qquad B(x^{(\alpha)}\, y^{(\beta)})\, F(u^{(\alpha)}\, v^{(\beta)}) - C(x^{(\alpha)}\, y^{(\beta)})\, E(u^{(\alpha}\, v^{(\beta)}) = 0\,.$$

Le forme (20) siano ora di Hermite di prima specie (o tutte di seconda). Le (21) hanno i coefficienti reali e se $\omega_\alpha, \omega_\beta$ sono due radici complesse coniugate, si può supporre nella (23) che $y_i^{(\beta)}, v_r^{(\beta)}$ siano complesse coniugate di $x_i^{(\alpha)}, u_r^{(\alpha)}$ rispettivamente. Si supponga ora, per fare il caso più semplice, che le quattro forme B, C, E, F siano definite, e tre abbiano uno stesso segno, una il segno contrario. La (23) non può allora aver luogo pei valori superiori delle $x^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}, y^{(\beta)}, v^{(\beta)}$. Ne seguono i due teoremi:

a) *Nelle ipotesi fatte, il sistema delle due equazioni dei gradi n ed m nelle incognite ω e θ:*

$$(24) \qquad |a_{\mu\nu} + \omega b_{\mu\nu} + \theta c_{\mu\nu}| = 0\,; \quad |d_{rs} + \omega e_{rs} + \theta f_{rs}| = 0\,,$$

ha tutte le radici reali.

b) *Se (ω, θ) è una soluzione del sistema:*

$$(25) \qquad |a_{\mu\nu}\omega + b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu}\theta| = 0\,; \quad |d_{rs}\omega + e_{rs} + f_{rs}\theta| = 0\,,$$

la ω è reale, ed, ove non sia nulla, anche θ è reale.

7. Infine le B, C, E, F siano forme di Hermite di prima specie, le A e D di seconda: ci riduciamo al caso antecedente, cambiando ξ in $i\xi$ (od η e ζ in $i\eta, i\zeta$): nelle stesse ipotesi del n. 6 le (24) hanno allora ad es. radici immaginarie pure. Più particolarmente quando le sei forme abbiano i coefficienti reali e quindi le B, C, E, F sian simmetriche, le A e B emisimmetriche, le (21) hanno i coefficienti reali.

a) Poniamovi allora $\xi = 1\,, \eta = \omega\,, \zeta = \omega\theta\,; \omega^2 = -u$; le (21) si cambiano in due equazioni:

$$(26) \qquad G(u, \theta) = 0\,, \quad H(u, \theta) = 0$$

con radici (u, θ) reali e u reale e positivo.

b) Poniamovi invece $\xi=\omega$, $\eta=1$, $\zeta=\theta$, $\omega^2=-u$; otterremo due equazioni:

$$M(u,\theta)=0\,,\quad N(u,\theta)=0\,, \tag{27}$$

tali che in una loro soluzione (u,θ), u è reale e non negativo, e se u è diverso da zero, anche θ è reale.

Fisica terrestre. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota V del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In tutte le Note da me pubblicate con questo titolo nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, come pure nella prima Nota sulla determinazione dei moti sismici ivi citata, esiste un errore grave per sè [1], ma fortunatamente non molto importante per le applicazioni pratiche che mi sono proposto: anzi la rettifica che pubblicherò fra breve lascerà sostanzialmente intatto il metodo e l'ordine seguiti nei lavori precedenti. — Intanto credo opportuno limitarmi a riprodurre corrette le equazioni differenziali nelle quali si rese sensibile l'errore commesso, per procedere poi alla integrazione, cioè per determinare in funzione del tempo le sei incognite sismiche.

Alla prima delle (17) bisogna sostituire

$$\eta''\, m_z + \gamma'' - \alpha\, g\, m_z - \xi''\varrho\, m_z + U = 0\,. \tag{17'}$$

E alla (19_1)

$$\eta'' r\, M + \alpha'' p\, M_x + \gamma'' r\, M_z - \alpha\, g\, r\, M + rM(\pi\zeta'' - \varrho\xi'') + \Omega = 0\,. \tag{19'_1}$$

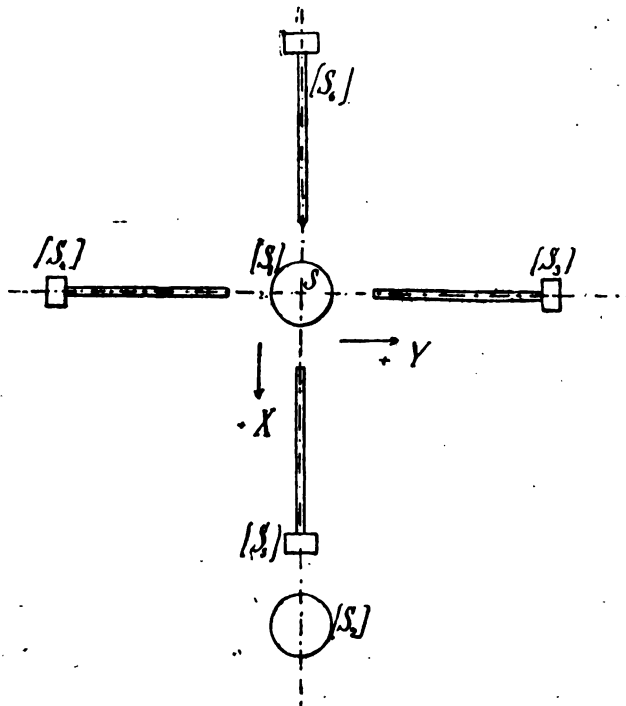
19. — Finora, cercando le equazioni che reggono il moto dei varî strumenti sismici, questi si supposero indipendenti gli uni dagli altri; cosicchè le variabili ξ, η, ζ, α, β, γ che compariscono, o tutte o in parte, nei diversi sistemi di equazioni differenziali trovate, hanno un significato e un valore diverso a

[1] L'errore consiste in ciò: per calcolare gli spostamenti virtuali d'un punto P_{ri}, sono partito dall'espressione

$$\delta\xi_{ri} = \delta\zeta_{ro} + \delta\chi_r\,(\zeta_{ri}-\zeta_{ro}) - \delta\varrho_r\,(\eta_{ri}-\eta_{ro}) \quad \text{etc. (V. I, pag. 383)}$$

che vale per qualunque movimento rigido; ma ho implicitamente ammesso che i coefficienti dei binomi $(\zeta_{ri}-\zeta_{ro}),\ldots$ fossero appunto le *variazioni arbitrarie delle rotazioni* $\chi_r,\ldots$, mentre invece sono *simboli* che rappresentano funzioni lineari di quelle variazioni; in tal modo c'era il pericolo di omettere nelle equazioni finali dei termini non trascurabili. Quanto al termine $-\alpha g m_z$ che era stato omesso nella (17) ed ora comparisce nella (17'), si può ritrovare facilmente osservando che la reazione elastica dovuta alla rettificazione iniziale della sbarra non fa equilibrio al *peso* dello strumento, ma soltanto alla componente del peso secondo l'asse delle Z (verticale apparente). [V. III, pag. 477].

seconda dei sistemi, cioè a seconda degli strumenti ai quali le equazioni stesse si riferiscono.

Per tener conto di questa variabilità chiamerò $S_r (x_r \; y_r \; z_r)$ il sistema di assi solidale con la massa oscillante dello strumento $[S_r]$, $S_r (X_r \; Y_r \; Z_r)$ il sistema solidale col terreno, al quale il sistema precedente si sovrappone quando lo strumento è in quiete relativa; e infine $\Omega_r (\xi_r \; \eta_r \; \zeta_r)$ il sistema immobile, col quale il sistema precedente coincide in caso di quiete sismica.

È naturale anche di sostituire ai simboli generici fin qui usati $\xi, \ldots, \gamma$ i simboli speciali $\xi_r, \ldots, \gamma_r$, come quelli che rappresentano precisamente le componenti del moto del sistema $S_r (X_r \; Y_r \; Z_r)$ rispetto al sistema $\Omega_r (\xi_r \; \eta_r \; \zeta_r)$; e appunto una tale sostituzione suppongo effettuata nelle equazioni differenziali trovate.

Enuncio ora un ultimo postulato, la cui maggiore o minore verosimiglianza dipende dalle condizioni pratiche dell'impianto sismico:

« Tutti i punti di attacco dei varî strumenti che si devono considerare come simultaneamente soggetti a un medesimo moto sismico, formano un sistema rigido con l'elemento di crosta solida terrestre del quale si cerca il movimento » (1).

(1) Con ciò si vengono a trascurare le deformazioni elastiche, termiche ecc. del pilastro o dell'edificio al quale i varî strumenti sono sospesi.

Scelto allora un nuovo sistema d'assi S(XYZ), solidale con questo elemento (sistema fondamentale mobile), saranno *costanti* e si potranno ritenere come note le coordinate $(X_r\ Y_r\ Z_r)$ dell'origine S_r rispetto a questo sistema; e se $\Omega(\xi\ \eta\ \zeta)$ è un sistema d'assi indipendente dal moto sismico (sistema fondamentale fisso), solidale coi varî sistemi $\Omega_r\ (\zeta_r\ \eta_r\ \zeta_r)$ e coincidente col sistema fondamentale mobile quando il terreno è in quiete, è evidente che (X_r, Y_r, Z_r) sono anche le coordinate dei punti Ω_r rispetto a $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$.

Ciò premesso, è logico di scegliere come uniche incognite sismiche le sei quantità $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$, che definiscono il moto del sistema fondamentale mobile rispetto al fisso, e quindi introdurre queste nuove variabili in luogo delle $\xi_r, \ldots, \gamma_r$ che compariscono nelle equazioni differenziali.

A questo scopo si ricordi che nella trattazione generale tutti gli assi delle ζ_r si supposero diretti secondo la gravità; facendo la stessa convenzione anche per l'asse delle ζ, potremo ritenere che tutti gli assi ζ_r siano *paralleli* all'asse ζ; e basterà fissare l'angolo ϑ_r che la direzione positiva dell'asse ξ_r o X_r fa rispettivamente con la direzione positiva dell'asse ξ o X. — Condotti infatti per il punto Ω_r due assi ausiliarî paralleli a quelli delle ξ e delle η, chiamate $\xi_r^{(1)}, \eta_r^{(1)}, \alpha_r^{(1)}, \beta_r^{(1)}$ le traslazioni e le rotazioni elementari del sistema $S_r\ (X_r Y_r Z_r)$ secondo e intorno gli assi ausiliarî, e posto per brevità

$$s_r = \operatorname{sen} \vartheta_r \quad , \quad c_r = \cos \vartheta_r \, ,$$

abbiamo le relazioni:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_r = \xi_r^{(1)} c_r - \eta_r^{(1)} s_r \ , \ \eta_r = \xi_r^{(1)} s_r + \eta_r^{(1)} c_r \ , \ \zeta_r = \zeta_r^{(1)} \\ \alpha_r = \alpha_r^{(1)} c_r - \beta_r^{(1)} s_r \ , \ \beta_r = \alpha_r^{(1)} s_r + \beta_r^{(1)} c_r \ , \ \gamma_r = \gamma_r^{(1)} , \end{array} \right.$$

le quali valgono supponendo che gli angoli ϑ_r siano positivi quando vanno dalla direzione $+\xi$ alla direzione $+\eta$.

D'altra parte per note proprietà cinematiche dei sistemi rigidi abbiamo

$$\begin{gathered} \xi_r^{(1)} = \xi + \beta Z_r - \gamma Y_r \ , \ \text{etc.}; \\ \alpha_r^{(1)} = \alpha \ , \ \beta_r^{(1)} = \beta \ , \ \gamma_r^{(1)} = \gamma \, ; \end{gathered}$$

e quindi le eguaglianze precedenti diventano

$$(27') \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_r = \xi c_r - \eta s_r + \alpha Z_r s_r + \beta Z_r c_r - \gamma (X_r s_r + Y_r c_r) , \\ \eta_r = \xi s_r + \eta c_r - \alpha Z_r c_r + \beta Z_r s_r + \gamma (X_r c_r - Y_r s_r) , \\ \zeta_r = \zeta + \alpha Y_r - \beta X_r . \end{array} \right.$$

$$(27'') \qquad \alpha_r = \alpha c_r - \beta S_r \ , \ \beta_r = \alpha S_r + \beta c_r \ , \ \gamma_r = \gamma \, .$$

Ora basterebbe sostituire nelle equazioni differenziali trovate alle incognite $\xi_r, \ldots, \gamma_r$ le loro espressioni (27'), (27''); ma in pratica è superflua

la generalità di queste espressioni, e conviene semplificarle prendendo gli assi delle X_r, Y_r paralleli a quelli delle X, Y.

Così appunto facendo, e dividendo rispettivamente per m_x, m_y, m_z, M le equazioni che contengono tali fattori, compariscono quali coefficienti delle accelerazioni angolari binomi della forma $\left(X + \frac{1}{m_y}\right)$, $\left(X + \frac{1}{m_z}\right)$,..... ecc., i quali tutti hanno le dimensioni d'una lunghezza. Ora io suppongo che per i pendoli verticali e per i sismografi a molla orizzontale (V. III, n. 14, pag. 477) i momenti d'inerzia rispetto ai due assi coordinati non passanti per il baricentro siano eguali ([1]). Allora per i pendoli verticali, per i sismografi a molla orizzontale paralleli all'asse delle X e per quelli paralleli all'asse delle Y. si possono fare rispettivamente le posizioni:

$$Z + \frac{1}{m_x} = Z + \frac{1}{m_y} = l_z$$

$$X + \frac{1}{m_y} = X + \frac{1}{m_z} = l_x$$

$$Y + \frac{1}{m_z} = Y + \frac{1}{m_x} = l_y ;$$

anche per i pendoli orizzontali normali al piano $X = 0$, o al piano $Y = 0$, si possono fare rispettivamente le seguenti coppie di posizioni:

$$\begin{cases} Z - \frac{p}{r}\frac{M_x}{M} = l_z , \\ X + \quad \frac{M_x}{M} = l_x ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z - \frac{q}{r}\frac{M_y}{M} = l_z , \\ Y + \quad \frac{M_y}{M} = l_y \text{ ([2])}; \end{cases}$$

e quindi le equazioni differenziali (16) (17) (19_1) prendono infine la forma seguente, nella quale le funzioni N sono del tipo

$$\begin{cases} N(\varepsilon) \equiv \varepsilon'' - 2H\varepsilon' + (H^2 + K^2)\,\varepsilon \\ (\varepsilon = \lambda\,, \mu\,, \nu\,, \omega)\,, \end{cases}$$

([1]) Sarebbe troppo restrittiva una simile ipotesi per i pendoli orizzontali, perchè resterebbero esclusi p. e. quelli del v. Rebeur Paschwitz.

([2]) Si può osservare che le lunghezze l_x, l_y, l_z rappresentano con una certa approssimazione le coordinate di baricentri degli strumenti, ai quali le lunghezze stesse si riferiscono, rispetto al sistema fondamentale mobile.

le variabili $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ hanno sempre lo stesso valore e si assumono come *incognite sismiche*, mentre invece le variabili $\lambda, \mu, \nu, \omega$, come pure le costanti che compariscono esplicitamente o sono contenute nelle funzioni N (esclusa $g =$ accelerazione della gravità) hanno valori diversi a seconda delle equazioni in cui sono contenute e il significato loro attribuito nella trattazione generale:

Pendolo verticale diretto o rovesciato (V. III, n. 14, pag. 477) coll'origine nel punto (X, Y, Z):

$$\xi'' + \beta'' l_z + \beta g - \gamma'' Y - [\zeta'' \chi] + \frac{1}{m_y} N(\mu) = 0$$

$$-\eta'' + \alpha'' l_z + \alpha g - \gamma'' X - [\zeta'' \pi] + \frac{1}{m_x} N(\lambda) = 0$$

$$\gamma'' + m_z [\xi'' \pi + \eta'' \chi] + N(\nu) = 0 \text{ (1)}.$$

Sismografo a molla orizzontale (V. III, n. 14, pag. 477) parallela all' asse delle X:

$$\eta'' + \gamma'' l_x - \alpha'' Z - \alpha g - [\xi'' \varrho] + \frac{1}{m_z} N(\nu) = 0$$

$$-\zeta'' + \beta'' l_x - \alpha'' Y - [\xi'' \chi] + \frac{1}{m_y} N(\mu) = 0 .$$

Sismografo a molla orizzontale parallela all'asse delle Y:

$$-\xi'' + \gamma'' l_y - \beta'' Z - \beta g - [\eta'' \varrho] + \frac{1}{m_z} N(\nu) = 0$$

$$\zeta'' + \alpha'' l_y - \beta'' X - [\eta'' \pi] + \frac{1}{m_x} N(\lambda) = 0 .$$

Pendolo orizzontale diretto secondo l'asse delle X:

$$\eta'' - \alpha'' l_z + \gamma'' l_x - \alpha g + [\pi \zeta'' - \varrho \xi''] + \frac{1}{r}\left(\frac{p^2}{m_x} + \frac{r^2}{m_z}\right) N(\omega) = 0 .$$

Pendolo orizzontale diretto secondo l'asse delle Y:

$$-\xi'' - \beta'' l_z + \gamma'' l_y - \beta g + [\chi \zeta'' - \varrho \xi''] + \frac{1}{r}\left(\frac{q^2}{m_y} + \frac{r^2}{m_z}\right) N(\omega) = 0 .$$

In particolare, supponendo infinitesime anche le accelerazioni traslatorie, cioè trascurando tutti i termini racchiusi fra parentesi quadra, per gli strumenti (S_r) sospesi nei punti $(X_r\, Y_r\, Z_r)$ e disposti come mostra in proiezione orizzontale l'annessa figura, rappresentando con λ_r, μ_r, ν_r le funzioni note del tempo, le equazioni si semplificano nel modo seguente:

(1) Questa equazione non ha praticamente alcun valore, perchè la rotazione ν degli ordinarî pendoli verticali resta sconosciuta.

Pendolo verticale: [S_1] ($X_1 = Y_1 = 0$)

$$(28) \qquad \begin{cases} \xi'' + \beta'' l_{z1} + \beta g + \mu_1 = 0 \\ -\eta'' + \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Id.: [S_2] ($X_2 = X$, $Y_2 = 0$)

$$(29) \qquad \begin{cases} \xi'' + \beta'' l_{z2} + \beta g + \mu_2 = 0 \\ -\eta'' + \alpha'' l_{z2} + \alpha g + \lambda_2 = \gamma'' X \end{cases}$$

Sismografo a molla orizzontale diretto secondo l'asse delle Y:

$$[S_3] \; (X_3 = Z_3 = 0 \,,\; l_{y3} = l')$$

$$(30) \qquad -\xi'' + \gamma'' l' - \beta g + \nu_3 = 0$$

$$(30_1) \qquad \zeta'' + \alpha'' l' + \lambda_3 = 0$$

Id. Id. eguale e simmetrico al precedente: [S_4] ($Y_4 = - Y_3$, $l_{y4} = - l'$)

$$(31) \qquad -\xi'' - \gamma'' l' - \beta g + \nu_4 = 0$$

$$(31_1) \qquad \zeta'' - \alpha'' l' + \lambda_4 = 0$$

Id. eguale al precedente e diretto secondo l'asse delle X:

$$[S_5] \; (Y_5 = Z_5 = 0 \,,\; X_5 = X_3 \,,\; l_{x5} = l_{y3} = l')$$

$$(32) \qquad \eta'' + \gamma'' l' - \alpha g + \nu_5 = 0$$

$$(32_1) \qquad -\zeta'' + \beta'' l' + \mu_5 = 0$$

Pendolo orizzontale: [S_6] ($Y_6 = 0$)

$$(33) \qquad \eta'' - \alpha'' l_z - \alpha g + \gamma'' l_x + \omega_6 = 0$$

Se gli strumenti [S_3] [S_4] [S_5] dessero solo la componente verticale, mancherebbero le equazioni (30), (31), (32).

20. — Ridotte così le equazioni differenziali, il problema dell'integrazione si riduce, come già osservai in un altro lavoro, a fissare una combinazione di strumenti tale che le corrispondenti equazioni siano *almeno in numero di sei tutte indipendenti e contenenti tutte le incognite*. Fra le molte combinazioni possibili cito le seguenti, che danno luogo a calcoli relativamente semplici:

a) [S_1], [S_2], [S_3] a comp. verticale, [S_4] id.: dalle equazioni (28) (29) 30_1) (31_1) opportunamente accoppiate si deduce:

$$\beta'' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l_{z1} - l_{z2}} \,,\; \xi'' = \frac{\mu_1 \, l_{z2} - \mu_2 \, l_{z1}}{l_{z1} - l_{z2}} - \beta g \,,$$

$$\zeta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2} \,,\; \alpha'' = \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{2l'} \,,\; \eta'' = \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1 \,,$$

$$\gamma'' = \frac{2l'(\lambda_2 - \lambda_1) + (l_{z2} - l_{z1})(\lambda_4 - \lambda_3)}{2l' X} \,.$$

Come si vede, la determinazione di β e di ξ non si può fare se non è $l_{r1} \gtrless l_{r2}$, cioè se i baricentri dei due pendoli verticali non sono ad altezze diverse.

b) [S_1], [S_3], [S_4]: dalle corrispondenti equazioni (28) (30) (31) (30_1) (31_1) si ricava

$$\beta'' = -\frac{2\mu_1 + \nu_3 + \nu_4}{2l_{z1}} \ , \ \gamma'' = \frac{\nu_4 - \nu_3}{2l'} \ ,$$
$$\alpha'' = \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{2l'} \ , \ \zeta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2} \ ,$$
$$\xi'' = -(\beta'' l_{z1} + \beta g + \mu_1) \ , \ \eta'' = \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1 \, .$$

b') [S_1], [S_3], [S_5]: dalle equazioni (28), (30), (30_1), (32), (32_1) si ha:

$$\alpha'' = \frac{\mu_1 - \lambda_1 + \nu_3 - \nu_5}{2l_{z1}} - \frac{\lambda_3 + \mu_5}{2l'} \ , \ \beta'' = \frac{\lambda_1 + \nu_5 - \mu_1 - \nu_3}{2l_{z1}} - \frac{\lambda_3 + \mu_5}{2l'}$$
$$\zeta'' = \frac{l_{z1}(\mu_5 - \lambda_3) + l'(\lambda_1 + \nu_5 - \mu_1 - \nu_3)}{2l_{z1}} \ , \ \gamma'' = \frac{l_{z1}(\lambda_3 + \mu_5) - l'(\lambda_1 + \mu_1 + \nu_3 + \nu_5)}{2l'^2}$$
$$\xi'' = -(\beta'' l_{z1} + \beta g + \mu_1) \ , \ \eta'' = \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1 \, .$$

c) [S_3], [S_4], [S_5]: dalle equazioni (30), (30_1), (31), (31_1), (32), (32_1) si ricava successivamente:

$$\gamma'' = \frac{\nu_4 - \nu_3}{2l'} \ , \ \zeta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2} \ , \ \alpha'' = \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{2l'} \ , \ \beta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_5}{2l'} \ ,$$
$$\xi'' = \frac{\nu_3 + \nu_4}{2} - \beta g \ , \ \eta'' = \frac{\nu_3 - \nu_4 - 2\nu_5}{2} + \alpha g \, .$$

d) Se in luogo del sismografo a molla orizzontale a due componenti si usa un sismografo a componente verticale [S_5] e un pendolo orizzontale [S_6], alla equazione (32) si sostituisce la (33), la quale dà ancora η'' dopo che le equazioni rimanenti hanno dato le altre incognite.

e) Un pendolo verticale a lungo filo di sospensione (II, n. 8, pag. 436) e un sismografo a molla orizzontale a due componenti, oppure, in luogo di quest'ultimo, un pendolo orizzontale e un sismografo a componente verticale. Il movimento del primo è retto dalle equazioni (10 e (10') della pag. cit., le quali, divise per M_2 e trasformate col supporre che il pendolo sia sospeso al punto (0, 0, Z), diventano:

$$\begin{cases} \xi'' + \beta''(c_1 + l_2 + Z) + \beta g + \varphi_1 = 0 \\ -\eta'' + \alpha''(c_1 + l_2 + Z) + \alpha g + \psi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi'' + \beta''(c_1 + \dfrac{M_2^{(y)}}{M_2 l_2} + Z) + \beta g + \varphi_2 = 0 \\ -\eta'' + \alpha''(c_1 + \dfrac{M_2^{(x)}}{M_2 l_2} + Z) + \alpha g + \psi_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla terza, si ottiene

$$\beta''\left(\frac{M_2^{(y)}}{M_2 l_2} - l_2\right) = \varphi_1 - \varphi_2 \;;$$

e siccome il coefficiente di β'' è sempre diverso da zero, così si può avere il valore di β: in modo analogo si avrebbe α, e quindi ξ ed η.

Si noti però che per avere sufficiente esattezza, conviene rendere quanto più è possibile

$$M_2^{(y)} > M_2\, l_2^2\,, \text{ ecc.},$$

cioè dare alla massa oscillante grandi momenti principali d' inerzia e sospenderla per un punto vicino al suo baricentro.

In seguito le equazioni relative all'altro o agli altri strumenti danno ζ e γ.

f) Un sismografo per le rotazioni (III, n. 13, pag. 476) il cui moto, qualunque sia il punto di sospensione, è retto dalle (16_1) e un gruppo d'altri strumenti le cui equazioni dinamiche contengano anche le traslazioni: p. e: $[S_1]$ ed $[S_5]$ a comp. vert., oppure $[S_5]$ a comp. vertic. e due pendoli orizzontali disposti in piani perpendicolari, oppure un pendolo orizzontale e uno a molla orizzontale a due componenti.

Per compiere la presente trattazione bisognerebbe ora discutere i risultati ottenuti per dedurne le migliori condizioni sperimentali: il che sarà forse oggetto di un altro lavoro.

Fisica. — *Sulla rapidità con cui si manifesta la birifrangenza magnetica.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Taluni fenomeni di cui si occupa l'elettro-ottica sono già stati studiati anche dal riguardo della *prontezza* con cui si manifestano, e successivamente scompariscono. Così le esperienze di Bichat e Blondlot [1] ci dicono che la rotazione magnetica del piano di polarizzazione della luce, segue esattamente e senza ritardo apprezzabile, le variazioni del campo magnetico, in cui è immersa la sostanza attiva. Non so di esperienze tendenti a verificare se la rotazione del piano di polarizzazione, operata per la riflessione di uno specchio di acciajo magnetizzato, sia egualmente pronta come quella di Faraday, e sono invece conosciute le esperienze piuttosto recenti di Abraham e Lemoine [2] le quali fanno vedere come l'altro fenomeno scoperto dal Kerr, quello cioè

[1] Journ. de phys. 1882, pag. 364.
[2] Journ. de phys. 1900, pag. 263.

della birifrangenza elettrica, sia, nel caso dei liquidi, assolutamente pronto. Benchè manchi la conferma di altri sperimentatori, ricordo che lo stesso Kerr aveva constatato come la birifrangenza elettrica, nel caso dei solidi, contrariamente a quanto avviene pei liquidi, sia un fenomeno tutt'altro che rapido.

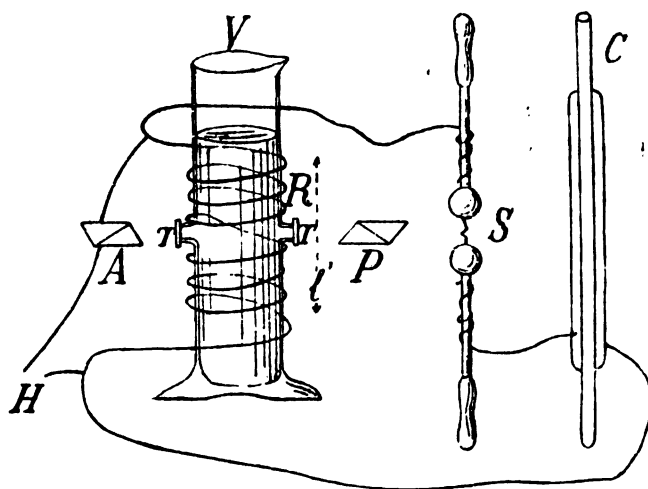
Ora, dopo i risultati da me ottenuti ricercando e studiando la birifrangenza magnetica, e descritti in Note precedenti, mi volli render conto, analogamente a quanto fu fatto da altri pel fenomeno Kerr elettrostatico, della prontezza di questo nuovo fenomeno. Se l'analogia da me constatata tra i due casi in cui forze elettriche e forze magnetiche trasformano la struttura amorfa di un liquido, in struttura *pseudo-cristallina,* fosse assolutamente completa, anche la birifrangenza magnetica (si tratta di liquidi) dovrebbe essere un fenomeno pronto.

Veramente un esame grossolano del modo di manifestarsi della birifrangenza magnetica, potrebbe a priori lasciare il dubbio che questa prontezza manchi del tutto, ed infatti ciò avevo creduto, prima che avessi istituito ricerche, onde studiare di proposito una tal questione; in altri termini, il fenomeno sarebbe stato simile, sotto questo riguardo, alla birifrangenza elettrica dei solidi come viene descritta dal Kerr nella sua Memoria. Questa credenza fu generata dalle seguenti considerazioni. Richiamo anzitutto l'attenzione del lettore sulla disposizione da me adottata e già descritta, per lo studio del fenomeno; la potente elettrocalamita da me usata, a causa dei notevoli fenomeni di autoinduzione che in essa si manifestano, impiega un tempo apprezzabile per raggiungere la massima magnetizzazione, dall'istante in cui viene lanciata la corrente; un tempo dello stesso ordine di grandezza e forse più lungo, occorre per ottenere la completa smagnetizzazione. Esperienze preliminari possono render conto della lunghezza di questi tempi nella maniera seguente. Le espansioni polari sono fornite di fori sottili parallelamente al campo, i quali permettono osservazioni e misure di potere rotatorio magnetico; eseguendo queste osservazioni, si adoperi un liquido molto attivo come p. es. il benzolo. Così operando, ed avendo posto i due nicol all'estinzione, la luce apparisce e scomparisce, chiudendo ed aprendo il circuito dell'elettromagnete, con una certa lentezza, la quale, come è noto, è la fedele immagine del modo con cui il campo magnetico varia. L'impressione che si ha osservando il fenomeno, è che questa lentezza non sia superiore in ogni caso ad una frazione sensibile di minuto secondo. I fenomeni di birifrangenza osservati quando lo stesso elettromagnete agisce su di un liquido dei più attivi da me posseduti, hanno parvenza di lentezza molto maggiore. Ciò è constatabile alla chiusura del circuito dell'elettromagnete, e molto di più all'apertura. In questa seconda fase del fenomeno, accade spesso che la luce riapparsa per l'eccitazione del campo, non iscomparisca che dopo qualche secondo. Riflettendo alla diversa natura della rotazione Faraday e della birifrangenza

magnetica, è facile rendersi conto di questo fatto. Per il primo fenomeno, poichè si tratta di rotazioni che non superano qualche grado, l' intensità della luce apparsa cresce sempre, al crescere del campo. Ma nel caso della birifrangenza magnetica, essendo i liquidi adoperati molto attivi ed assorbenti, in guisa da lasciar passare solo luce quasi monocromatica (rossastra), all'eccitazione del campo si vède variare l'intensità luminosa periodicamente passando parecchie volte per dei massimi e dei minimi ben accentuati. Per conseguenza un campo magnetico di piccola intensità può bastare a provocare il passaggio della stessa quantità di luce che un campo intenso, e quindi una piccola variazione del campo è più facilmente osservabile studiando la birifrangenza magnetica, che non la rotazione Faraday. Se dunque il nuovo fenomeno ha l'apparenza di notevole lentezza all'interruzione del campo, ciò è spiegabile ammettendo che il magnetismo residuo del ferro metta un tempo lungo a scomparire, e che d' altra parte esso non sia capace di generare sensibile rotazione nel piano di polarizzazione di un raggio luminoso parallelo al campo, traversante un liquido con potere rotatorio magnetico.

Ammessa la giustezza delle precedenti considerazioni, si rende ancora più interessante la ricerca di esperienze dirette atte a constatare la rapidità o la lentezza reale della birifrangenza magnetica, ed è ad esse che voglio accennare in questa Nota. Il metodo da me seguìto è simile a quello adoperato da Abraham e Lemoine per lo studio del fenomeno Kerr elettrostatico. Si tratta di generare un campo magnetico capace di rendere birifrangente una soluzione attiva, mediante la scarica di un condensatore, e studiare se vi è la possibilità di osservare il fenomeno adoperando come sorgente luminosa la stessa scintilla di scarica ottenuta dal condensatore. Sono infatti riuscito in questo intento adottando una disposizione che schematicamente è indicata dalla figura. Il condensatore C, le cui dimensioni saranno indicate in seguito, è continuamente caricato da una macchina ad influenza, in guisa che fra le palline dello spinterometro S scocca a intervalli (qualche secondo) una energica e brillante scintilla di 15 mm. di lunghezza. La scarica del condensatore è obbligata a traversare una corta spirale R di filo di rame grosso 1 mm. che circonda una provetta cilindrica di vetro V di 10 mm. di diametro a pareti sottili, e in cui si trova del ferro Bravais attivo per birifrangenza magnetica. Poichè sarebbe impossibile obbligare la scarica a percorrere la spirale R, se questa venisse lasciata scoperta, occorre masticiare accuratamente le singole spire con ceralacca, fissandole senz'altro sulle pareti esterne della provetta, ed è così che ho potuto sovrapporre alle spire segnate in figura, delle altre in guisa che il loro numero totale, nella lunghezza $l = 20$ mm., fosse di 18. Chiudendo in corto circuito la spirale R, col contatto H, la scarica non agisce più magneticamente sul liquido. Alla provetta V sono saldati due corti tubetti di vetro T chiusi da due lastrine di vetro monorifrangente. La luce della scintilla S polarizzata dal nicol P, traversa il liquido

della provetta secondo TT, normalmente alle linee di forza del campo magnetico generato per la scarica dalla spirale R; l'analizzatore A permette di osservare la eventuale birifrangenza generata dal campo.

Certamente nel mettere insieme questa esperienza non è da sperarsi di ottenere effetti molto notevoli, sia per il valore non troppo grande del campo

magnetico, che per la piccola intensità luminosa della scintilla S. Per cui è bene mettersi subito nelle migliori condizioni cominciando coll'adoperare del ferro Bravais del più attivo. Esso, come è noto, è quello del terzo tipo; il suo punto di inversione è piuttosto basso (1550 u.) e il valore approssimativo della costante K è 0,0000048. Essendo corto lo spessore sottoposto all'esperimento, il liquido viene adoperato con concentrazione piuttosto grande (dens. 1,008). In una esperienza preliminare comincio col sostituire alla luce della scintilla S, la luce solare e posti i nicol a 45° sul campo (le linee di forza sono verticali) ed incrociati, si mette in azione la macchina elettrica. È a questo punto che occorre studiare la più conveniente capacità del condensatore C. Sperimentando in principio con piccoli valori di questa capacità, e successivamente con valori crescenti, riconosco che quando C è costituito da due grandi bottiglie di Leyda, il cui sviluppo complessivo delle armature interne od esterne è di m. q. 0,6, essendo lo spessore medio del vetro di circa 2 mm., ogni volta che si sente scoccare una scintilla nello spinterometro, uno sprazzo di luce solare traversa l'analizzatore. Il fenomeno è massimo per la indicata posizione dei nicol a 45° sull'asse della spirale, è nullo se il piano di polarizzazione è normale o parallelo a quell'asse, ed in ogni caso cessa se si stabilisce il contatto tra i capi H. Per cui nel breve tempo che dura la scarica, il ferro dializzato è divenuto birifrangente, e la

durata del fenomeno è sensibilmente istantanea. Onde andare avanti in questo studio, sostituisco alla luce solare la luce della scintilla S, ma poichè essa è molto più debole della prima, debbo aumentare la grandezza del condensatore C, raddoppiandola all'incirca (sviluppo delle armature m. q. 1,3), ottenendo così un conveniente aumento sia dell'intensità luminosa di S, che del campo magnetico in V. In queste condizioni, uno sprazzo luminoso proveniente da S, traversa, finchè il circuito H non è chiuso, l'analizzatore.

Adoperando sia la luce solare che quella della scintilla, si può compensare la birifrangenza. Interponendo tra i due nicol, oltre alla vaschetta V, un pezzo di vetro (negativo per compressione), si può, comprimendolo parallelamente alle linee di forza, ossia verticalmente, far sì che, nel caso della luce solare, questa colpisca l'occhio dell'osservatore finchè non scoccano scintille in S (H è aperto), e resti invece bruscamente indebolita quando passa la scarica. Con tale disposizione non si arriva mai a vedere l'assoluta estinzione della luce, a causa della persistenza delle immagini sulla retina; ma in ogni modo ciò è sicuro indizio che la birifrangenza generata è *positiva*. Si può sperimentare in migliori condizioni adoperando la luce della scintilla S; in tal caso, se il vetro è convenientemente compresso, si riesce a non vedere più la scintilla attraverso l'analizzatore; essa ricomparisce al nostro occhio non appena si stabilisce il contatto H. È difficile procedere in tali condizioni ad una buona misura dei valori di questa birifrangenza, ma in ogni modo posso dire che essa non supera i 4 o 5 centesimi di lunghezza d'onda nel rosso, e tenendo conto del suo segno, si intende che il fenomeno rimane, per l'azione del campo generato dalla scarica, al disotto del punto di inversione. La intensità del campo, calcolata dai dati dell'esperienza, non consentirebbe del resto, anche se essa fosse permanente e non istantanea, valori della birifrangenza superiori al riportato.

Dalle precedenti esperienze si deduce esser certo che già nel tempo in cui dura la scintilla S, il liquido è birifrangente; e si può anche concludere che *l'inizio della birifrangenza è contemporaneo all'inizio della luminosità della scintilla*. Se così non fosse, non sarebbe possibile compensare, come è stato detto, la birifrangenza istantanea, giacchè nel primo istante in cui la scintilla emette luce, non essendo ancora il liquido birifrangente, il compensatore a vetro compresso avrebbe un'azione depolarizzante sulla luce che cade sull'analizzatore.

Per completare queste ricerche, sarebbe stato desiderabile accertarsi se anche la scomparsa della birifrangenza segua immediatamente quella del campo magnetico, benchè sia prevedibile che a una tal questione si debba probabilmente, come per la rapidità dell'inizio, rispondere affermativamente. Mediante un sistema di specchi e di lenti non segnati in figura, ho allungato il percorso che la luce proveniente da S è costretta a seguire prima di arrivare in T. Nelle esperienze descritte esso era di un metro; avendolo portato

a 35 metri, malgrado l'indebolimento inevitabile del fascio luminoso, sono riuscito a constatare ancora, benchè più debolmente, la birifrangenza del liquido. Ma questa esperienza, la quale avrebbe dovuto avere lo scopo di creare un ritardo tra la formazione del campo e la propagazione della luce nel liquido, non ha molto valore, giacchè la durata complessiva della scarica è evidentemente grande rispetto al piccolo tempo che pone la luce a percorrere la distanza di 35 metri. Non potendo d'altra parte indebolire troppo le dimensioni del condensatore C e quindi la intensità luminosa della scintilla S, a causa del grande potere assorbente del ferro Bravais adoperato, sarebbero state necessarie ulteriori esperienze, come p. es. lo studio con uno specchio girante della luce di S, sia direttamente che attraverso il sistema dei nicol e del liquido sottoposto all'azione del campo magnetico della scarica. Esigendo questo studio una montatura sperimentale complicata, e non avendo per quest'anno altro tempo a mia disposizione, ho dovuto, almeno per ora, rinunziarvi.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio nazionale Generale Annibale Ferrero, mancato ai vivi il 7 agosto 1902; apparteneva il defunto Socio all'Accademia sino dal 12 novembre 1883.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 7 settembre 1902.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota IV del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Fino dalla nostra prima comunicazione (1) intorno a questo argomento abbiamo accennato alla convenienza di completare le esperienze fatte con la luce solare intera collo studio dell'azione di singole radiazioni di diversa refrangibilità. Di queste osservazioni noi ci siamo sempre occupati ed accanto alle esperienze fatte colla luce intera, non abbiamo trascurato di eseguirne alcune con luce solare opportunamente filtrata, allo scopo di togliere o l'una o l'altra parte dello spettro.

In ricerche del genere di quelle che abbiamo fin qui descritte, è naturalmente inutile studiare l'azione di luce monoromatica; si tratta invece sopratutto di vedere quali parti dello spettro sono le più efficaci, e di avere però un mezzo comodo e pratico per togliere a volontà o le radiazioni più refrangibili o quelle meno refrangibili. Per raggiungere questo scopo si sono spesso impiegati dei vetri colorati, che noi però riteniamo poco convenienti. Noi ci siamo serviti invece di soluzioni di materie coloranti, che ci furono suggerite dal prof. Righi a cui dobbiamo per questo molta gratitudine. Per eliminare la parte meno refrangibile dello spettro abbiamo impiegato una soluzione alcoolica di cloruro di cobalto della concentrazione di circa il 10 per cento; per assorbire completamente le radiazioni azzurre e violette basta una solu-

(1) Vedi questi Rendiconti, vol. X, 1° sem., pagg. 92 e 228; vol XI, 2° sem., pag. 277.

zione alcoolica di fluoresceina satura a freddo; in questo modo però non si tolgono che parzialmente i raggi verdi, per limitare ancor maggiormente la parte non assorbita, conviene aggiungere alla soluzione di fluoresceina, una soluzione alcoolica alquanto concentrata di violetto di genziana: così si può, a volontà, ridurre lo spettro, fino a non lasciar passare che i raggi rossi.

Le esperienze vennero poi disposte nel seguente modo: la soluzione filtrante era contenuta in un cilindro a piede della capacità dì circa un litro e del diametro interno di 46 mm.; nell'asse di questo si trovava collocato sopra un piccolo trepiede di ottone o di nickel, il tubo chiuso alla lampada contenente le sostanze da studiarsi; esso era sostenuto da un dischetto d'ottone forato nel mezzo, che per sfregamento teneva fermo il tubo nella posizione voluta. Il cilindro veniva quindi riempito con la soluzione e chiuso con un vetro smerigliato fissato con carta pergamena. Il diametro del tubo interno, a pareti sottili, era di 16 mm.; lo strato assorbente del liquido filtrante aveva perciò uno spessore di 15 mm. Prima di impiegarle, le soluzioni colorate vennero esaminate allo spettroscopio facendo passare, con uno specchio, la luce solare attraverso ad uno strato di liquido dello stesso spessore di 15 mm. La soluzione alcoolica di fluoresceina, satura a freddo, estingue, in queste condizioni, tutta la parte più refrangibile fino a circa la riga solare *b*, ossia più esattamente fino a $\lambda = 510$; aggiungendo a questa soluzione, la soluzione alcoolica di violetto di genziana, l'assorbimento venne portato fino a $\lambda = 620$, con lieve un bagliore intorno ad E. Questo liquido venne impiegato per studiare l'azione dei raggi rossi. Per i raggi violetti venne adoperata la suaccennata soluzione alcoolica di cloruro di cobalto al 10 per cento, che nelle medesime condizioni lascia passare tutta la parte più refrangibile da $\lambda = 480$ in poi; la parte meno refrangibile dello spettro non è però del tutto estinta: rimane una banda verde intorno a $\lambda = 560$ e poi, nell'estremo rosso, un'altra banda proprio intorno alla riga solare A, cioè a $\lambda = 770$. Questa limitatissima permeabilità per i raggi rossi estremi non presentava, come si vedrà, nessun inconveniente per le nostre ricerche.

Naturalmente non abbiamo ripetuto tutte le esperienze fin qui descritte per vedere quale sia il loro andamento sotto l'azione delle diverse radiazioni, questo sarebbe stato inutile; ci siamo limitati invece allo studio di alcune reazioni, scegliendo i casi più tipici, limitando l'azione della luce alla parte rossa o a quella violetta dello spettro. Il risultato è stato questo: tutte le reazioni di cui ci siamo occupati fin ora, vengono favorite dalle radiazioni più refrangibili; i raggi rossi non esercitano alcuna azione sensibile, oppure agiscono assai più debolmente. Questo risultato era prevedibile, ma l'esperienza doveva essere fatta per dimostrarlo; esso ha poi un'importanza, che è per noi considerevole, perchè prova come tutte le reazioni, anche quelle lente, da noi studiate siano realmente dovute ad una azione fotochimica e non già ad un'effetto della prolungata azione del calore solare.

Premesso questo, passiamo alla descrizione succinta delle singole esperienze.

Chinone ed etere.

I tubi, che rimasero esposti contemporaneamente dal 13, II al 24, II, rispettivamente alla luce filtrata rossa ed a quella violetta, contenevano ciascuno 1 gr. di chinone e 20 c. c. d'etere assoluto. Il risultato fu il seguente:

Luce rossa. La soluzione rimase perfettamente inalterata mantenendo il suo colore giallo e così pure i cristalli di chinone che non avevano potuto sciogliersi.

Luce azzurro-violetta. Già dopo 6 ore d'esposizione si vanno separando gli aghi lunghi, neri, di splendore metallico azzurrognolo di chinidrone, che alla fine dell'esperienza riempiono tutto il tubo.

Questo è uno dei casi in cui l'effetto diverso delle radiazioni rosse e di quelle violette riesce quanto mai evidente.

Chinone ed alcool.

I tubi esposti alla luce rossa e violetta contenevano 1 gr. di chinone e 20 c. c. d'alcool assoluto. L'esposizione durò dal 18, III al 15, IV. Siccome le soluzioni alcooliche di chinone imbruniscono lentamente anche all'oscuro (1), senza però che si formino quantità apprezzabili di aldeide e di idrochinone, così era da prevedersi che il tubo esposto alle radiazioni rosse non si sarebbe mantenuto inalterato come nel caso precedente.

Difatti il contenuto dei tubi era in entrambi colorato in bruno, ma in quello esposto alle radiazioni violette il colore era più carico già dopo sei giorni d'esposizione. Esaminando i prodotti, si ebbe il seguente risultato:

Luce rossa. Svaporando il liquido a bagno maria non si ebbe col distillato la reazione dell'aldeide col nitrato d'argento ammoniacale. Il residuo conteneva il chinone inalterato in grande quantità, ed assieme ad una materia nerastra, solamente tracce di idrochinone.

Luce azzurro-violetta. L'alcool distillato conteneva molta aldeide acetica; nel residuo si ritrovò assai poco chinone inalterato, molto idrochinone e chinidrone assieme ad una materia nera ed amorfa.

Anche la trasformazione del chinone in idrochinone per azione dell'alcool viene dunque agevolata quasi esclusivamente dalle radiazioni più refrangibili, sebbene quelle rosse non sieno del tutto inattive.

Chinone e glicerina.

Abbiamo scelto questo esempio per studiare il contegno di un alcool polivalente. Anche qui, come con l'alcool ordinario, si ha un lieve annerimento del liquido pure all'oscuro ed anche qui le radiazioni rosse esercitano

(1) Vedi la nostra chimica nella Gazzetta chimica, vol. 32. I, pag. 227.

una debole azione. I due tubi contenevano 10 gr. di chinone finamente polverizzato e 6 gr. di glicerina sciolta in 20 gr. d'acqua; il chinone da principio era in gran parte indisciolto. L'esposizione durò dal 21, III al 6, IV.

Luce rossa. Il liquido apparisce alquanto imbrunito, ma in fondo al tubo quasi tutto il chinone si ritrova inalterato.

Luce azzurro-violetta. La soluzione è intensamente colorata in bruno, il chinone in parte scomparso e trasformato in una massa nerastra.

L'azione della luce violetta sarebbe stata anco più efficace, se il chinone si fosse trovato in maggior contatto col liquido; invece per la posizione verticale del tubo, il chinone se ne stava al fondo e la reazione rimase limitata alla parte superiore.

Benzofenone ed alcool.

Oechsner de Coninck e Devrien [1] che quasi contemporaneamente a noi studiarono l'azione della luce su questa coppia di sostanze, ma che non riconobbero la natura del prodotto che si produce, hanno fatto pure un'esperienza per dimostrare che l'effetto chimico era dovuto alle radiazioni più refrangibili. Noi abbiamo voluto accertare nuovamente il fatto, perchè il benzofenone ha rispetto all'alcool un contegno tipico, che è poi comune ad un'intera classe di sostanze.

Abbiamo esposto alla luce filtrata due tubi contenenti ciascuno 4 gr. di benzofenone sciolti in 20 cc. d'alcool assoluto dal 21, III al 6, IV. Il diverso effetto delle radiazioni rosse e violette è evidentissimo.

Luce rossa. La soluzione si mantiene priva di colore e contiene il benzofenone inalterato.

Luce azzurro-violetta. Il liquido apparisce colorato debolmente in giallo e contiene in notevole quantità i cristalli assai bene sviluppati di benzopinacone.

Benzile ed alcool.

È noto per le osservazioni di Klinger [2] e le nostre, che il benzile in soluzione eterea ed alcoolica si trasforma facilmente prima nel cosidetto benzilbenzoino, per subire in seguito una più profonda e complessa metamorfosi, sulla quale ritorneremo fra breve. Noi ci siamo limitati a studiare l'influenza delle diverse radiazioni sull'andamento della prima fase del processo.

Abbiamo esposto alla luce filtrata due tubi contenenti ciascuno 25 cc. di soluzione alccolica di benzile satura a freddo, dal 26, II al 12, III.

Luce rossa. La soluzione si è mantenuta limpida acquistando una lieve colorazione verdastra.

(1) Compt. rend., 130, 1768 e questi Rendiconti, X, 1, pag. 98 (1901).
(2) Berichte, XIX, pag. 1864 e questi Rendiconti, X, 1, pag. 101 (1901).

Luce azzurro-violetta. La soluzione ha preso un intenso colore giallo-rossastro ed al fondo del tubo si sono depositati, in quantità non molto rilevante, i mammelloncini bianchi di benzilbenzoino.

Vanillina in alcool.

L'aldeide vanillica si trasforma alla luce solare lentamente in deidrovanillina; anche questa curiosa reazione è una vera azione fotochimica, che è determinata solamente dalle radiazioni più refrangibili.

Abbiamo esposto alla luce filtrata una soluzione di 3 gr. di vanillina in 10 cc. d'alcool dal 7, IV al 21, IV.

Luce rossa. La soluzione rimane del tutto scolorata e limpida.

Luce azzurro-violetta. Il liquido prende un colore giallo pallido e le pareti del tubo, segnatamente dal lato esposto alla luce, sono ricoperte di piccoli aghetti di deidrovanillina.

o- Nitrobenzaldeide in benzolo.

L'elegante trasformazione dell'aldeide o-nitrobenzoica in acido o-nitrosobenzoico viene anch'essa determinata segnatamente dalle radiazioni più refrangibili. L'esperienza riesce quanto mai evidente ed istruttiva anche per la sua breve durata. Noi abbiamo esposto alla luce colorata una soluzione di 0,5 gr. di o-nitrobenzaldeide in 20 cc. di benzolo, in una giornata di febbraio per 5 ore.

Luce rossa. Nessun effetto.

Luce azzurro-violetta. Il contenuto del tubo è pieno di minuti cristalli d'acido o-nitrosobenzoico.

In questo caso abbiamo voluto vedere anche l'effetto dei raggi gialli e verdi, impiegando come filtro la soluzione alcoolica satura di fluoresceina, che, come s'è detto più sopra, lascia passare tutta la parte meno refrangibile dello spettro fino circa alla riga solare *b* ($\lambda = 510$). Dopo 8 giorni d'esposizione si nota un lievissimo effetto, perchè sulle pareti del tubo si possono scoprire dei piccolissimi cristallini d'acido o-nitrosobenzoico. Il tubo esposto per lo stesso periodo di tempo alla luce rossa ($\lambda = 620$) rimase inalterato.

o-Nitrobenzaldeide ed alcool.

È noto che questa coppia di sostanze si trasforma alla luce in modo che oltre all'acido o-nitrosobenzoico si produce pure l'etere corrispondente.

I tubi esposti dal 21, III, al 6, IV, contenevano ciascuno 3 gr. dell'o-nitroaldeide in 30 cc. d'alcool. L'effetto fu anche qui il consueto.

Luce rossa. La soluzione si mantenne inalterata.

Luce azzurro-violetta. Il liquido diviene giallo-bruno ed è soprassaturo, perchè agitando il tubo incominciano a deporsi in buona copia i cristalli dell'etere o-nitrosobenzoico.

Acido o-nitrosobenzoico in paraldeide.

Questa esperienza aveva un interesse speciale; l'acido o-nitrosobenzoico in presenza di paraldèide, dà alla luce solare, in piccola quantità, un composto della formola $C_9H_7O_3N$, di costituzione non ancora accertata (1), che si forma molto più abbondantemente per riscaldamento. Era però interessante ricercare se questa trasformazione fosse anche essa determinata dalle radiazioni violette anzi che dalle rosse. Così è di fatto, ciò che del resto non deve recare meraviglia, perchè ognuno sa che la combinazione del cloro coll'idrogeno viene determinata tanto da un inalzamento di temperatura che dalle radiazioni violette, mentre quelle meno refrangibili sono inattive.

Noi abbiamo esposto alle radiazioni rosse e violette due tubi contenenti ciascuno 2,4 gr. di acido o-nitrosobenzoico, finamente polverizzato, sospeso in 24 gr. di paraldeide per circa un mese, cioè dall' 8, IV al 5, V.

Luce rossa. Nessun effetto, il liquido soprastante ai cristalli si mantenne scolorato.

Luce azzurro-violetta. La soluzione acquista un colore giallo-bruno. Separata dall'acido nitrosobenzoico, dette, per svaporamento della paraldeide, un residuo bruno ed oleoso, che, umettato con alcool metilico, dopo qualche tempo cristallizzò nelle forme caratteristiche del composto $C_9H_7O_3N$. La quantità di sostanza formatasi era però così esigua da non permettere una ulteriore purificazione.

o-Nitrobenzaldeide in acido solforico.

Qualche anno fa R. I. Friswell (2) osservò che una soluzione solforica di nitrobenzolo annerisce alla luce, senza indicare la natura chimica della trasformazione compiutasi. Noi abbiamo ripetutamente potuto confermare questa osservazione, ma neppure noi siamo riusciti a riconoscere quale sia la sostanza nera che si produce.

L'aldeide o-nitrobenzoica si comporta come il nitrobenzolo, anzi con essa la colorazione nera apparisce più intensa. Versando il prodotto nell'acqua si ottiene una materia carboniosa, che non abbiamo studiato più oltre.

(1) Berichte, vol. 35, pag. 1080.
(2) Centralblatt, 1897, II, 547.

Anche questo annerimento viene determinato soltanto dalle radiazioni più refrangibili. Esponendo alla luce filtrata una soluzione di 0,5 gr. di o-nitrobenzaldeide in 10 cc. d'acido solforico concentrato (l'esposizione durò dal 7 al 21 aprile); soltanto il tubo esposto alla luce azzurro-violetta venne modificato, avendo il liquido assunto un intenso colore nero verdastro. La soluzione esposta alla luce rossa rimase completamente inalterata.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'iridio e dei suoi composti.* Nota di A. Miolati e di C. Gialdini, presentata dal Socio Cannizzaro.

Lo studio dei nitriti complessi formati dai metalli del gruppo del platino è importante sotto diversi aspetti. Dopo le interessanti ricerche del Joly e del Leidié (1) e quelle più recenti del Leidié solo (2) intorno alla separazione dei metalli contenuti nei minerali platiniferi, per mezzo appunto dei nitriti complessi, tali combinazioni hanno acquistato una peculiare importanza tanto dal punto di vista analitico quanto dall'industriale. È perciò di grande utilità lo studiare accuratamente e con maggior estensione, di quello che non fecero gli antichi sperimentatori, questi nitriti complessi e le relazioni che li uniscono alle altre combinazioni dei corrispondenti metalli ed in modo particolare alle più importanti fra esse, vale a dire ai sali alogeno-complessi, Interessa perciò ricercare se le relazioni che permettono di passare dai nitriti ai sali alogeno-complessi, siano reazioni progressive e se diano luogo alla formazione di un'intiera serie di composti intermedî contenenti l'alogeno ed il residuo nitroso.

Ed ecco che i nitriti complessi si mostrano interessanti anche da un altro lato, dal teorico, quali membri di diverse serie di composti analoghi. E qui basta ricordare i pregevoli lavori di M. Vèzes intorno alle combinazioni azotate del platino (3) nei quali sono descritti numerosi composti, che collegano per graduale modificazione il platonitrito potassico $Pt(NO_2)_4K_2$ cogli alogenoplatiniti $PtCl_4K_2$, $PtBr_4K_2$, PtJ_4K_2 e cogli alogenoplatinati.

Non è necessario poi d'insistere sull'importanza che queste serie di composti possono acquistare specialmente per la chimica cristallografica, quando si ponga mente alle belle ricerche del Groth intorno ai corpi morfotropici.

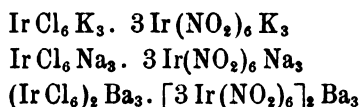
Lo studio accurato dei nitriti complessi può recare eziandio notevole aiuto allo studio della questione delle forme di combinazione e dei tipi salini dei metalli platiniferi. Infatti, mentre che pel palladio e pel platino si

(1) Comptes rend. *112*, 1259.
(2) Comptes rend. *131*, 888.
(3) Ann. de chim. et phys. (6) *29*, 145 (1893).

conoscono molti nitriti, tanto della serie bivalente, quanto di quella tetravalente $[Me(NO_2)_n Alg_{4-n}]K_2$ e $[Me(NO_2)_n Alg_{6-n}]K_2$, pel rutenio invece si conosce soltanto il sesquirutenito potassico $Ru(NO_2)_5 K_2$, che è di tipo differente da quello del rodio $Rh(NO_2)_6 K_3$ e dell'iridio $Ir(NO_2)_6 K_3$.

Sebbene questi tre ultimi metalli, possano assumere stati d'ossidazione differenti, possano essere cioè bi-, tri, o tetravalenti, pure i pochi nitriti complessi che si conoscono sono tutti derivati dalla forma trivalente, sebbene vi sia pel rutenio, differenza nel tipo di sale doppio.

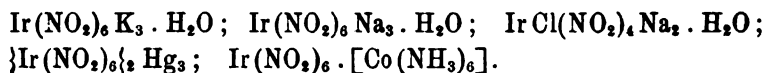
Le scarse notizie intorno ai nitriti complessi dell'iridio, che si avevano fino a poco tempo fa, le dovevamo al Lang ed al Gibbs, i cui lavori però contengono molti punti oscuri e molti dati indeterminati. Essi hanno dapprima descritto composti assai complessi che ritennero quali combinazioni di nitriti doppî con una certa proporzione dei corrispondenti sesquicloruri doppî d'iridio. Le combinazioni descritte sono le seguenti:

$$Ir Cl_6 K_3 . 3 Ir(NO_2)_6 K_3$$
$$Ir Cl_6 Na_3 . 3 Ir(NO_2)_6 Na_3$$
$$(Ir Cl_6)_2 Ba_3 . [3 Ir(NO_2)_6]_2 Ba_3$$

ed è detto che si ottengono con un metodo generale, facendo cioè reagire una soluzione di un nitrito sulla soluzione calda del cloroiridato corrispondente.

Sono polveri biancastre, cristalline, quasi insolubili nell'acqua fredda e pochissimo nell'acqua bollente, specialmente poi in presenza di nitriti alcalini.

Ma da quanto noi abbiamo potuto verificare nelle nostre esperienze, le formole loro attribuite non sono da ritenersi esatte.

In una corrispondenza datata da Cambridge il 10 febbraio 1871 (¹), il Wolcott Gibbs ha fatto conoscere le formole e le principali proprietà di una serie di nitriti doppî d'iridio. La sua comunicazione però è di poche linee e i dati scarsissimi non furono più da lui completati da allora in poi. Le combinazioni citate sono le seguenti:

$$Ir(NO_2)_6 K_3 . H_2O ; \quad Ir(NO_2)_6 Na_3 . H_2O ; \quad Ir Cl(NO_2)_4 Na_2 . H_2O ;$$
$$\{Ir(NO_2)_6\}_2 Hg_3 ; \quad Ir(NO_2)_6 . [Co(NH_3)_6].$$

Il Gibbs dice di averle ottenute facendo reagire su di una soluzione di sesquicloruro d'iridio idrato o di un clorosesquiiridito, il nitrito corrispondente alla combinazione cercata, ma non dice esattamente le modalità della reazione, nè quali siano i fenomeni secondarî che si osservano.

(¹) Berichte deutsch. chem. Gesell. *4*, 280.

Dal fin qui detto è chiaro che le nostre cognizioni sui nitriti complessi dell'iridio erano poche, poco determinate e poco attendibili.

All'inizio delle nostre ricerche tentammo di preparare i nitriti complessi già ottenuti dal Gibbs e dal Lang per conoscerli *de visu*, controllarne e darne esattamente la composizione e descriverne le proprietà. Ma per quanto sembrasse facile questo compito, pure non ci fu possibile di venirne a capo in modo soddisfacente, tanto che ci è sembrato più opportuno di abbandonare completamente la via battuta dagli altri e di seguirne una propria.

Prima di passare però alla relazione delle nostre esperienze (1), dobbiamo ricordare che in uno degli ultimi numeri dei Comptes rendus (2) è apparsa una nota del Leidié, sui nitriti doppî d'iridio; nota, che ci induce per l'appunto a pubblicare quella parte delle nostre ricerche, che può ritenersi ultimata.

Il Leidié ha, come abbiamo fatto anche noi, ripetute le esperienze del Gibbs, sull'azione dei nitriti alcalini sui cloruri doppî dell'iridio, ed è giunto anch'esso ai nostri medesimi risultati. Facendo agire il nitrito potassico tanto sul cloroiridiato, quanto sul clorosesquiiridito, non si ottiene il composto $Ir(NO_2)_6K_3$, ma bensì una polvere minutissima cristallina che non ha però sempre il medesimo colore, ma che talvolta è gialliccia, tal altra carnicina o di un leggerissimo grigio azzurrognolo o perfettamente bianca. È solubile nell'acido cloridrico diluito, dando una soluzione incolora, che acquista però per prolungata ebullizione un colore rosso-bruno e contiene allora cloroiridiato. È anche solubile in una grandissima quantità di acqua bollente dalla quale si deposita bianca. Questa sostanza, dalle proprietà che mostra, sembrerebbe essere identica a quella ottenuta dal Lang e dianzi citata. Lo studio che il Leidié ne ha fatto, lo conduce a ritenere che essa sia una specie di lacca, poichè, secondo questo autore, riprendendola parecchie volte di seguito coll'acqua bollente, perderebbe ogni volta una certà quantità di cloruro potassico. Il Leidié non ha ottenuto mai campioni contenenti meno del cinque per cento di cloruro potassico.

Le analisi da noi fatte su diversi campioni di questa sostanza e provenienti da diverse preparazioni, ci hanno condotto invece a numeri, che non confermano la formola data dal Lang: $Ir_4(NO_2)_{18}Cl_6K_{12}$, ma che sono tra loro abbastanza concordanti e che si avvicinano molto alla formola $IrCl_3(NO_2)_3K_3$.

Data la discordanza tra le nostre osservazioni e quelle del Leidié, crediamo opportuno di non dare ora i risultati numerici delle nostre esperienze,

(1) Le ricerche più sotto riferite, nonchè altre non ancora completate, formavano argomento della tesi di laurea, presentata da uno di noi nel dicembre 1901 alla Facoltà di scienze dell'Università di Roma.

(2) 30 juin 1902, *134*, pag. 1582.

ma di vedere se le nostre ulteriori ricerche confermeranno o meno la formula suddetta.

Nella Nota del Leidié è detto anche, che le acque madri, della sostanza sopra accennata, contengono cloronitriti complessi, dei quali ne venne ottenuto uno avente la formula $Ir_2Cl_2(NO_2)_4 . 6KCl$ corrispondente a $2IrCl_4(NO_2)_2K_3$. Ora noi avevamo già preparato questo composto, direttamente e per altra via, e ne avevamo già fatto uno studio dettagliato, che qui sotto riferiamo.

Prima però di farlo ci siano permesse due parole sul materiale usato. La maggior parte dell'iridio adoperato fu acquistato dalla nota ditta *C. W. Heraeus* di Hanau, che guarentiva per il prodotto almeno un titolo del 99,8 per cento. Infatti l'iridio fornito trattato con acqua regia non veniva quasi intaccato, anche se riscaldato a bagno d'acqua.

Un'altra porzione d'iridio, fu da noi ottenuto da residui, che contenevano principalmente platino, seguendo il metodo classico del Saint-Claire Deville e di Debray.

Azione dell'anidride nitrosa sul cloroiridiato ammonico. Sali dell'acido dinitritotetracloro sesquiiridoso.

$IrCl_4(NO_2)_2X_3$.

Se in una sospensione di cloroiridiato ammonico, si fa passare a caldo una corrente di anidride nitrosa, il cloroiridiato si scioglie in breve tempo completamente formando una soluzione rosso-scura.

Continuando l'azione dell'anidride nitrosa e mantenendo la soluzione quasi alla temperatura d'ebullizione, si osserva un continuo sviluppo di bollicine gassose, mentre che la soluzione si fa sempre più chiara. L'azione è finita quando il liquido ha assunto un color giallo d'oro. Si concentra a bagno maria a dolce calore e si aggiunge al liquido concentrato una soluzione di cloruro potassico, presso a poco nel rapporto di tre molecole di cloruro per una di cloroiridiato ammonico impiegato.

Dalla soluzione concentrata si separano cristalli giallo-oro, che, tolti dalle acque madri, si fanno ricristallizzare da pochissima acqua onde separarli da piccolissime quantità di una polvere cristallina rossa che è ad essi commista ed è molto più difficilmente solubile nell'acqua.

Sulla natura di questa polvere rossa non possiamo ancora dire nulla di preciso; probabilmente è un prodotto intermedio perchè si ottiene in maggior quantità quando l'azione dell'anidride nitrosa non fu sufficientemente prolungata.

I cristalli gialli sono solubilissimi nell'acqua. La soluzione posta a bollire con nitrito potassico dà il composto bianco polverulento quasi insolubile di cui sopra abbiamo parlato, $[IrCl_3(NO_2)_3K_3]$ (?) mentre che con acido cloridrico dà cloroiridiato.

L'analisi fu fatta nel modo seguente: per la determinazione dell'iridio e del potassio la sostanza pesata era posta in una capsula di porcellana e ripetutamente evaporata a bagno maria con acido cloridrico fino ad ottenere il cloroiridiato. Il residuo era quindi portato in un crogiuolo di platino e calcinato in corrente d'idrogeno fino a peso costante. Si aveva così il peso dell'iridio e del potassio allo stato di cloruro. Si può raggiungere lo stesso scopo riscaldando la sostanza da analizzare con cloruro ammonico, aggiunto in piccole quantità ed a parecchie riprese. Avuto il residuo, si esportava il cloruro alcalino per lisciviazione ripetuta e l'iridio che rimaneva era di nuovo calcinato in corrente d'idrogeno e pesato. La calcinazione dell'iridio in corrente d'idrogeno è assolutamente necessaria, poichè calcinandolo all'aria aumenta del 4 al 5 per cento in peso. Come controllo, dopo di aver fatta la lisciviazione del residuo d'iridio e di cloruro potassico, fu talvolta determinato il cloro unito al potassio.

Per la determinazione del cloro nel sale primitivo si disgregò con carbonato sodico-potassico, determinando poi il cloro nel residuo della calcinazione come d'ordinario.

Per la determinazione del gruppo NO_2 la sostanza, mescolata con polvere di ramè e polvere d'alluminio, fu posta in una navicella di porcellana e questa messa in un tubo ordinario da combustione che conteneva per un breve tratto ossido di rame e numerose spirali di rame ridotto.

Scacciata dal tubo l'aria per mezzo dell'anidride carbonica, svolta dal carbonato di manganese, si precedette alla decomposizione della sostanza come nelle ordinarie determinazioni d'azoto nelle sostanze organiche.

I risultati analitici ottenuti pel sale di potassio sono i seguenti:

0,3809 gr. di sostanza diedero 0,1343 gr. d'iridio.

0,2149 gr. di sostanza calcinati debolmente fino a peso costante, avendo cura d'aggiungere di tanto in tanto un po' di cloruro ammonico, diedero 0,0764 gr. d'iridio e 0,0879 gr. di cloruro potassico, il cui peso fu controllato per mezzo della determinazione del cloro contenuto.

0,4192 gr. di sostanza decomposti con carbonato sodico-potassico diedero poi, con gli opportuni trattamenti, 0,4397 gr. di cloruro d'argento.

0,5180 gr. di sostanza trattati come sopra diedero 0,5492 gr. di cloruro d'argento.

0,3622 gr. di sostanza diedero 17,1 cc. di azoto misurati a 758 mm. ed a 26° e corrispondenti a 0,06234 gr. di NO_2.

Esprimendo questi risultati in centesimi si ha:

	trovato					calcolato per
	I	II	III	IV	V	$Ir\,Cl_4\,(NO_2)_2\,K_3$
Ir	35,26	35,55	—	—	—	35,46
K	—	21,47	—	—	—	21,58
Cl	—	—	25,92	26,21	—	26,05
NO_2	—	—	—	—	17,2	16,92

Sale di Cesio $IrCl_4(NO_2)_2Cs_3$.

Si ottiene questo sale per doppia decomposizione tra il sale di potassio e il cloruro di cesio. Mescolando le soluzioni concentrate e fredde dei due detti corpi, si forma una polvere cristallina giallo-chiara, pochissimo solubile nell'acqua fredda colla quale fu lavata.

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

0,1568 gr. di sostanza calcinati con precauzione in presenza di cloruro ammonico, quindi calcinati in corrente d'idrogeno e asportato in seguito per lisciviazione il cloruro di cesio, calcinato nuovamente in corrente d'idrogeno, diedero 0,1327 gr. di residuo costituito da cloruro di cesio e iridio, quest'ultimo era 0,0367 gr. d'iridio.

Ossia su 100 parti:

	trovato	calcolato
Ir + 3CsCl	84,57	84,56
Ir	23,41	23,37

Sale d'argento $IrCl_4(NO_2)_2Ag_3$.

Il sale potassico sciolto in pochissima acqua, fu trattato con una soluzione di nitrato d'argento.

Il precipitato che si ottiene è quasi bianco con una leggera tinta giallognola, è del tutto, o quasi, insolubile nell'acqua e pare che anche coll'acido nitrico diluito non si alteri.

L'analisi di questo sale fu fatta calcinando una quantità pesata di esso in una corrente d'idrogeno puro, in modo da far gorgogliare i gas che si svolgevano in una soluzione d'idrato potassico esente di cloro. Nel liquido contenuto nei tubi ad U uniti alla canna di vetro in cui si fece l'operazione fu determinato il cloro; il residuo rimasto nella navicella dopo essere stato pesato fu fatto bollire con acido nitrico diluito per sciogliere tutto l'argento metallico. L'iridio rimasto fu pesato previa calcinazione in corrente d'idrogeno.

0,4170 gr. di sostanza diedero 0,3174 gr. di cloruro di argento corrispondenti a 0,07848 gr. di cloro e 0,2878 gr. di residuo che conteneva 0,1069 gr. d'iridio e 0,1803 gr. d'argento.

Ossia in cento parti:

	trovato	calcolato
Cl	18,82	18,89
Ir	25,63	25,72
Ag	43,24	43,13

Sale di Tallio $Ir\,Cl_4\,(NO_2)_2\,Tl_3$.

Anche questo sale si ottiene per doppia decomposizione tra il sale di potassio e l'acetato o nitrato talloso.

Il sale talloso formatosi precipita essendo insolubile nell'acqua e si presenta sotto forma di una polvere giallo-chiara.

Per separare l'iridio dal tallio, abbiamo adoperato il metodo usato ripetutamente da uno di noi per la separazione del platino dal tallio. Si scaldò cioè la sostanza, posta in una navicella di porcellana e questa in una canna di vetro infusibile, prima in una corrente di solo acido cloridrico secco e poi in una corrente d'idrogeno e acido cloridrico, finalmente in una corrente di solo idrogeno. Il cloruro talloso è in queste condizioni facilmente volatile e si raccoglie nei tubi ad U uniti alla canna nella quale trovasi la navicella. Dai tubi ad U, nonchè dall'estremità della canna, si toglie il cloruro talloso in parte meccanicamente, in parte con acqua regia; portato che sia tutto il tallio in un vaso da precipitare, si tratta dapprima con bisolfito sodico, si neutralizza poi con ammoniaca e si precipita con ioduro potassico. Il precipitato si filtra su di un crogiuolo di Gooch, si lava prima con acqua contenente ioduro potassico, poi con acqua alcoolica-ammoniacale, e seccato a 100°, si pesa. Nella navicella rimane l'iridio metallico che è bianco argentino, se l'operazione è stata ben condotta.

I risultati analitici ottenuti furono i seguenti:

0,3741 gr. di sostanza trattati come sopra dettero 0,0709 gr. d'iridio e 0,3548 gr. di ioduro talloso.

0,2291 gr. di sostanza scaldati in crogiuolo di porcellana, prima ripetutamente con cloruro ammonico onde scacciare il tallio (fintanto che la fiamma Bunsen non venne più colorata in verde), poi in corrente d'idrogeno, dettero 0,0420 gr. di residuo.

0,9641 gr. di sostanza calcinati con carbonato sodico-potassico, dettero 0,5384 gr, di cloruro d'argento corrispondenti a 0,13313 gr. di cloro.

Riferendo questi risultati a 100 parti di sostanza si ha:

	trovato			calcolato
	I	II	III	
Ir	18,95	18,34	—	18,57
Tl	58,47	—	—	58,93
Cl	—	—	13,81	13,64

Sale di mercurio $\{Ir\ Cl_4\ (NO_2)_2\}_2\ Hg_3$.

Trattando il sale di potassio con una soluzione di nitrato mercurico il meno acida che sia possibile, si ottiene un lievissimo precipitato. Questo aumenta però se si neutralizza quasi del tutto, ma con grande precauzione, l'acidità della soluzione con qualche goccia di carbonato potassico sciolto in acqua. Il precipitato che si ottiene è di un bel giallo chiaro ed è completamente o quasi, insolubile nell'acqua colla quale viene lavato.

Fu fatta una determinazione d'iridio calcinando la sostanza prima all'aria, poi, come al solito, in corrente d'idrogeno.

I risultati analitici sono i seguenti:

0,1624 gr. di sostanza dettero 0,0434 gr. d'iridio. Ora riferendoci a cento parti di sostanza si ha:

trovato	calcolato
Ir 26,72	26,5

Sale di piombo $\}Ir\ Cl_4\ (NO_2)_2\{_2\ Pb_3 + 2\ Pb\ (OH)_2$.

Il sale potassico Ir Cl_4 $(NO_2)_2$ K_3 trattato con acetato di piombo leggermente acido per acido acetico non dà a freddo alcun precipitato, soltanto il liquido dopo un certo tempo si intorbida. Se si riscalda però la mescolanza delle due soluzioni a bagno maria per qualche tempo si ottiene un precipitato pesante giallo-arancio. Questo precipitato venne lavato ripetutamente con acqua leggermente acidulata con acido acetico, poi con acqua alcoolica.

Dal modo seguito per la preparazione si può arguire che questo composto sia un sale basico, ciò che sarebbe confermato dalla seguente determinazione:

0,2504 gr. di sostanza furono evaporati ripetutamente con acido solforico in capsula di platino a moderato calore e si ebbe 0,2432 gr. di residuo. Questo fu trattato molte volte a caldo con acetato ammonico in soluzione concentrata allo scopo di asportare il solfato di piombo formatosi. Dopo completa estrazione, il residuo venne calcinato in corrente d'idrogeno e si ottenne 0,0492 gr. d'iridio.

Referendo i risultati a 100 parti di sostanza si ha:

trovato			calcolato per $\{IrCl_4(NO_2)_2\}_2\ Pb_3 + 2Pb(OH)_2$
Ir + Pb SO_4	97,12	p. Ct.	97,19
Ir	19,64		19,75

Sebbene i risultati analitici s'accordino molto bene colla formula qui sopra scritta, pure noi diamo questa con qualche riserva non essendo a nostro credere sufficiente una sola determinazione per istabilire la formola di un composto.

Le ricerche sopra riferite hanno dimostrato in modo sicuro l'esistenza di un acido complesso avente per formula $IrCl_4(NO_2)_2H_3$. Tale acido è stato ottenuto secondo una reazione affatto nuova; ora è possibile che questa reazione, estesa ai sali complessi di altri metalli del gruppo platino, possa portarci a qualche altro risultato interessante.

Batteriologia. — *Sui bacteri dei dotti galattofori delle vacche* [1]. Nota del dott. Costantino Gorini, presentata dal Socio L. Cremona.

È cosa oramai accertata, per opera specialmente delle ricerche di Ward [2], che nei dotti galattofori delle vacche si contengono dei bacteri, per cui il latte, il quale quando è secreto da ghiandole mammarie sane è sterile, si contamina, ancor prima di uscire dalle mammelle, nell'attraversare i canaletti che lo guidano dalle ghiandole agli sbocchi dei capezzoli. Quei bacteri derivano evidentemente da germi che stanno nei pressi di questi sbocchi e che gradatamente si propagano lungo quei canaletti, trovando nella temperatura del corpo dell'animale una condizione opportuna per moltiplicarsi rapidamente fra una mungitura e l'altra. Questi bacteri naturalmente vengono poi trascinati col latte fuoruscente e segnatamente coi primi zampilli (de Freudenreich) [3].

Ciò posto, sorge la questione di conoscere il grado e la natura di una tale contaminazione evidentemente *inevitabile*, per l'influenza che essa può esercitare sulla conservazione del latte e sulla sua attitudine alla fabbricazione del burro e del formaggio.

Degli esperimentatori che si occuparono fin qui dell'argomento, alcuni [Ward [4], Dinwiddie [5], Bolley [6], Burr [7]] vennero alla conclusione che la flora microbica dei dotti galattofori debbasi considerare pressochè indifferente per le alterazioni del latte; altri [Moore [8], Esten [9]] vi constatarono

[1] Queste ricerche furono eseguite in parte nel Laboratorio di bacteriologia dell'Istituto Federale Agrario di Berna (Svizzera), in parte nel Laboratorio di bacteriologia della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano.

[2] Archibald R. Ward, *The persistence of bacteria in the milk ducts of the cow's udder* (Journal of applied microscopy, v. I, n. 12). — *The invasion of the udder by bacteria* (Bulletin 178 of the Cornell University Agricultural Experiment Station. January 1900).

[3] Ed. de Freudenreich, *Die Bakteriologie in der Milchwirthschaft*, Jena, 2ª ediz., *passim*.

[4] Archibald R. Ward, *The persistence of bacteria in the milk ducts of the cow's udder* (Journal of applied microscopy, v. I, n. 12). — *The invasion of the udder by bacteria* (Bulletin 178 of the Cornell University Agricultural Experiment Station. January 1900).

[5] R. R. Dinwiddie, *Arkansas Agricultural Experiment Station.* Bullettin n. 45, p. 56.

[6] H. L. Bolley und Hall, *Ueber die Konstant von Bacterienarten in normaler Rohmilch* (Centralblatt f. Bakteriologie etc. II Abt., p. 1895, Band I, p. 788 e 795).

[7] Rollin H. Burr, *The source of the acid organisms of milk and cream* (Centralblatt f. Bakteriologie II Abt. p. 1902, Band VIII, p. 236).

[8] V. A. Moore, *Preliminary Investigations concerning the number and nature of bacteria in freshly drawn milk* (12° and 13° Annual Report of the Bureau of animal industry, U. S. Dep't of Agr. p. 261).

[9] W. M. Esten, *Bacillus acidi lactici and other acid organisms found in American dairies* (9° Annual Report of the Storrs Agricultural Experiment Station, p. 49).

invece dei veri fermenti lattici capaci di acidificare rapidamente il latte e quindi di grande importanza per la lavorazione del latte.

Durante la mia dimora presso il laboratorio di batteriologia della stazione federale agraria di Berna nell'autunno del 1901, l'egregio direttore di quell'Istituto dott. de Freudenreich (a cui porgo i più sentiti ringraziamenti) mi propose di esaminare la flora microbica dei dotti galattofori delle mungane della vaccheria annessa alla stazione stessa. Io accettai volentieri l'incarico e stimai anzi opportuno di estendere le ricerche anche ad altre due stalle situate in vicinanza dell'Istituto, per vedere se le diverse condizioni di ambiente, di pulizia ecc. avessero influenza sulla suddetta flora.

Le vacche esaminate furono in tutto 22, di cui 14 appartenenti all'Istituto, 6 ad una stalla esterna e 2 ad un'altra stalla esterna.

Di 14 vacche (10 dell'Istituto e 2 di ciascuna vaccheria esterna) analizzai separatamente il latte di ciascun capezzolo per rilevare le eventuali differenze nel contenuto microbico dei diversi capezzoli di ciascuna mammella; delle altre 8 vacche analizzai il latte misto di due capezzoli appartenenti alle due diverse metà della mammella.

Per avere un'idea il più possibilmente completa sui bacteri capaci di vegetare entro i dotti galattofori, stimai necessario raccogliere nel modo più asettico possibile le *primissime* stille di latte di ciascuna mungitura.

A tal uopo dovetti rinunciare a qualunque ripulitura delle mammelle e dei capezzoli, perchè osservai che, se la si faceva ammodo, durante le operazioni di lavatura e di asciugatura fuorusciva sempre qualche po' di latte, per la qual cosa veniva a fallire lo scopo di sottoporre ad esame il primo latte contenuto nei dotti galattofori. Laonde, dopo alcuni tentativi, adottai il metodo seguente che possiamo chiamare di *spremitura a secco*.

Prima dell'ordinaria mungitura, e cioè prima che si masturbassero e si inumidissero, come di solito, i capezzoli, facevo esercitare dal mungivacche, a mani pulite e asciutte, una leggiera compressione sulla base del capezzolo, in modo da evitare qualunque sfregamento e qualunque contatto colle adiacenze dello sbocco del capezzolo, e da spremere fuori rapidamente e in un sol getto qualche centimetro cubico di latte, che veniva subito raccolto in una provetta sterilizzata munita del suo tappo di ovatta. I campioni venivano, entro 5-10 minuti al più, sottoposti a cultura in laboratorio.

Con ogni campione allestii quattro culture a piatto, e cioè: due piatte in gelatina semplice, di cui una con una goccia di latte e una con due goccie d'una diluzione di latte (una goccia di latte in 5 cc. di acqua potabile sterilizzata); e due piatte in gelatina al siero di latte allestite come le precedenti.

Le culture erano tenute in osservazione a circa 20° C. per 8 giorni almeno; bene spesso per 15 e talora fino a 21 giorni, quanto era necessario per accertare vuoi che lo sviluppo di nuove colonie era completamente cessato, vuoi che certe colonie erano assolutamente non fondenti ecc.

Riserbandomi di riferire altrove circa le singole esperienze, ecco per ora in riassunto i principali risultati.

A. Risultati.

1. Nessuna delle 14 mammelle di cui furono esaminati isolatamente tutti e quattro i capezzoli fu riscontrata completamente amicrobica; solamente due capezzoli appartenenti a due diverse mammelle risultarono sterili alle culture.

Una sola delle 8 mammelle, di cui furono esaminati complessivamente due soli capezzoli, risultò amicrobica.

2. Il contenuto microbico di ciascun capezzolo variò da un *minimum* di 20 colonie ad un *maximum* di 300 mila colonie bacteriche per centimetro cubico di latte.

È da notare però che questo *maximum* fu riscontrato fra le vacche appartenenti alle stalle esterne che erano governate con deficiente pulizia (v. più sotto al n. 8); invece il contenuto dei dotti galattofori delle 14 vacche dell'Istituto non superò la cifra di 85 mila colonie bacteriche per centimetro cubico di latte.

3. In generale osservai una sensibile affinità, se non un'assoluta identità, nel contenuto microbico dei quattro capezzoli di una medesima mammella; in alcuni casi però taluno dei capezzoli dimostrò di contenere una flora particolare, cioè decisamente diversa per quantità (due casi) od anche per qualità (cinque casi) da quella degli altri capezzoli della medesima mammella.

4. Eccettuate sei vacche sulle quali ritornerò in seguito (v. n. 8), in tutte le altre sedici vacche esaminate la flora microbica dei dotti galattofori risultò costituita prevalentemente, e spesso anche esclusivamente, da una sorta di cocchi morfologicamente simili fra loro, così per la forma individuale, come per la forma delle colonie nelle piatte di gelatina. Sono cocchi di media grossezza (intorno a 1μ di diametro), talora alquanto ovali, aggruppati talora a grappolo, ma il più spesso a quattro o a due, assumendo soventi volte la figura di un chicco da caffè.

Nelle piatte di gelatina essi danno delle colonie rotonde, a contorni regolari, piuttosto piccole, di colore giallognolo più o meno intenso, sia profonde che superficiali (anaerobiosi facoltativa). Fisiologicamente invece questi cocchi presentano delle differenze, per cui se ne possono distinguere diversi tipi.

5. Lo studio particolareggiato istituito sopra 127 colonie isolate dai dotti galattofori di dieci vacche e seminate in cultura pura nei varî mezzi nutritivi, mi ha permesso di stabilire cinque *tipi principali* di tali cocchi, distinguendoli fra loro specialmente in base al comportamento in gelatina lattosata (al 4 %) e in latte.

Li designo col nome di « tipi » per non entrare qui nella questione se si tratti di altrettante specie o di semplici varietà. Ciò che posso dire fin da ora si è che i caratteri di ciascun tipo si mantennero costanti in tutte le prove che nel corso di un anno sono andato facendo e ripetendo, dapprima nel laboratorio di Berna e in seguito nel laboratorio di batteriologia della R. Scuola superiore di agricoltura di Milano.

Quei tipi sono:

TIPO UNO. *Cocco pseudofondente; coagulante.* — Lo designo « pseudofondente », perchè esso infossa lentamente la gelatina lattosata, senza fonderla; cosicchè nelle culture a piatto le sue colonie, dopo qualche giorno di sviluppo, appaiono circondate da una zona scodelliforme di gelatina di cui esse occupano il fondo depresso. Toccando con l'ago di platino è facile persuadersi che la gelatina contenuta nella scodella non è liquefatta, e nemmeno rammollita, di guisa che la piatta, ancora dopo quindici giorni, conserva la propria consistenza e integrità e, osservata a luce radente, appare come faccettata.

Coagula il latte in 2-4 giorni a 37° C., con reazione acida, con espulsione di poco siero limpido, quasi incoloro, senza peptonificazione successiva.

In brodo lattosato a 37° sviluppasi discretamente in 24 ore, acidificandolo.

TIPO DUE. *Cocco a rapida e sproporzionata fusione limpida; coagulante.* — Nelle piatte in gelatina lattosata questo tipo forma delle colonie pressochè puntiformi (assai più piccole di quelle degli altri tipi), le quali si circondano rapidamente (talora ancor prima che la colonia si sia resa visibile) di un ampio alone di gelatina fusa *limpida*, cioè non invasa dalla parte sostanziale della colonia. Ne deriva una sproporzione fra le dimensioni della colonia e quelle della zona di fusione, che in progresso di tempo va accentuandosi, poichè mentre questa si allarga di molto, la colonia ingrossa di poco e anzichè espandersi nella scodella di liquefazione, cade in massa sul fondo di essa.

Coagula il latte in 24-48 ore a 37°, con reazione acida, con espulsione di abbondante siero limpido, giallognolo, e con successiva lenta peptonificazione, la quale però non è mai completa e lascia sempre una porzione di coagulo indigesto.

In brodo lattosato a 37° si sviluppa rigogliosamente in 24 ore, acidificandolo leggermente.

TIPO TRE. *Cocco a fusione torbida; coagulante.* — Le colonie sulle piatte in gelatina lattosata fondono piuttosto lentamente, intorbidando il liquido di fusione al pari dei più comuni bacteri liquefacienti. È però da ricordare che talora qualche colonia tarda a fondere e ad espandersi nel liquido di fusione, così da assomigliare per qualche tempo, ad es. fino all'ottavo giorno, ad altri tipi, e segnatamente a quelli non fondenti o al tipo pseudofondente.

Coagula il latte in 4-5 giorni a 37° C., con reazione anfotera prevalentemente acida, e con successiva rapida peptonificazione, che trasforma completamente il coagulo in un liquido giallastro.

In brodo lattosato a 37° si sviluppa in 24-48 ore, ma non troppo rigogliosamente.

TIPO QUATTRO. *Cocco non fondente; coagulante.* — Le colonie sulle piatte in gelatina lattosata sono dapprima tutte eguali, ma dopo alcuni giorni assumono due aspetti diversi a seconda che sono profonde o superficiali; le profonde conservano il colore gialletto originario, le superficiali invece vanno lentamente sollevandosi sulla superficie della gelatina lattosata, così da sembrare piccole capocchiette di spillo e assumono una tinta bianchiccia. Non fondono la gelatina neppure dopo ventun giorni.

Coagula il latte a 37° con reazione acida, ma molto tardivamente, cioè verso il 15° giorno, e talora soltanto al 30° giorno; quasi nessuna espulsione di siero; nessuna peptonificazione.

In brodo lattosato a 37° si sviluppa abbondantemente in 24 ore, acidificandolo.

TIPO CINQUE. *Cocco non fondente*; *non coagulante.* Nelle culture a piatto è simile in tutto al tipo quattro.

In latte non coagula a 37° neppure dopo 53 giorni, e non ne altera la reazione anfotera primitiva, cosicchè il latte non coagula neppure coll' ebollizione.

In brodo lattosato a 37° si sviluppa in 24-48 ore, ma non troppo rigogliosamente e senza acidificarlo.

6. Circa la distribuzione di questi diversi tipi di cocchi nei singoli capezzoli, non ritengo possibile acquistare un criterio esatto in base alla semplice osservazione delle culture a piatto allestite coi campioni di latte. Imperocchè io ho potuto verificare che, sopratutto quando in queste piatte si sviluppava un numero rilevante di colonie, i caratteri dei singoli tipi erano bene spesso falsati, verosimilmente in causa dei disturbi reciproci derivanti alle manifestazioni vitali delle colonie dall'accumulo dei rispettivi prodotti di ricambio. Così è che più di una volta una colonia, che sulle piatte originarie sembrava non fondente, trasportata in cultura pura si palesò per pseudofondente o del tutto fondente; più frequenti poi occorsero gli scambi fra i primi tre tipi di colonie. Tant' è che per la differenziazione dei sopra descritti cinque tipi di cocchi, credetti necessario allestire delle piatte con culture pure di ciascun tipo e in modo che ciascuna piatta contenesse un piccolo numero di colonie. Aggiungasi poi che per la distinzione dei due tipi non fondenti (tipi quattro e cinque) è indispensabile il trapianto in latte.

Da quanto precede si capisce di leggieri che, ove io avessi voluto conoscere con precisione quali tipi si contenessero nei dotti galattofori di ciascun capezzolo, avrei dovuto isolare e studiare separatamente ciascuna delle colonie

sviluppatesi nelle piatte. Questo io feci solamente in qualche caso in cui il numero delle colonie sviluppatesi era esiguo, come accadde frequentemente nelle piatte allestite con latte diluito. Ma nella maggior parte dei casi mi limitai a trasportare in cultura pura quelle colonie che *apparivano* differenti sulle piatte originarie.

Pertanto, rinunciando ad emettere un giudizio sulla maggiore o minor diffusione di un tipo piuttosto che dell'altro, in base alle mie osservazioni mi credo autorizzato a dichiarare soltanto: 1°, che i tipi non fondenti apparvero più diffusi (non direi più numerosi) dei tipi fondenti la gelatina lattosata, per il fatto che furono trovati anche in alcuni capezzoli poveri di bacteri, dove non incontrai invece rappresentanti dei tipi fondenti; 2°, che sebbene nella maggior parte dei casi io abbia constatato rappresentanti di diversi tipi insieme mescolati, tuttavia ho l'impressione che nei singoli capezzoli e talora in tutti i capezzoli di una data mammella, uno dei tipi fosse in grande prevalenza sugli altri.

7. Accanto ai succitati tipi predominanti di cocchi, ho incontrato qua e là, solamente in taluno dei capezzoli e sempre in numero piuttosto esiguo, altre tre qualità di cocchi caratterizzati dalla proprietà di rendere alcalino il latte senza coagularlo nè alterarne le qualità esteriori, tutt'al più facendolo debolmente e lentamente ingiallire. Questi cocchi, di cui uno fonde e due non fondono la gelatina lattosata, formano sulle piatte delle colonie che si distinguono facilmente sia fra loro, sia da quelle dei tipi precedenti, laonde essi meritano di essere considerati senz'altro come specie a sè.

8. Solamente in 6 vacche ho trovato che la flora microbica dei dotti galattofori (eccettuato in qualche capezzolo) era rappresentata prevalentemente, e in una vacca anzi esclusivamente, da altre qualità di germi, e precisamente da uno streptococco non liquefacente che nelle piatte di gelatina forma coloniette minutissime, profonde (anaerobiosi), e che coagula il latte in 24-48 a 37° C. con reazione acida, quasi senza espulsione di siero e senza peptonificazione; insomma ha tutti i caratteri dei comuni *fermenti lattici*.

Questo bacterio si conteneva in quantità rilevantissima nei campioni di latte, raggiungendo la cifra di 300 mila colonie per centimetro cubico di latte, mentre il numero delle colonie dei soliti tipi di cocchi era piuttosto esiguo, e in un caso anzi era nullo. E d'uopo peraltro riconoscere che la copia di colonie di streptococchi era tale da riuscire di ostacolo allo sviluppo di colonie di altri germi sulle medesime piatte, quand'anche questi vi fossero stati presenti.

Ad ogni modo è degno di nota il fatto che le 6 vacche nelle quali fu trovato questo streptococco appartenevano tutte alle due stalle esterne, mentre esso mancava completamente nelle vacche appartenenti all'Istituto, che erano governate con maggior pulizia di quelle. Nelle altre due vacche delle stalle esterne si constatarono solamente colonie dei soliti tipi di cocchi.

B. Deduzioni.

I. Considerando:

a) che in tutte le vacche esaminate (eccetto una sola) si trovarono i succitati tipi di cocchi, i quali poi in 16 vacche su 22 rappresentavano la flora microbica predominante e spesso anche esclusiva dei dotti galattofori;

b) che le sei vacche nelle quali quei tipi di cocchi si mostrarono parzialmente o totalmente soppiantati dallo streptococco lattico, appartenevano a stalle tenute con deficiente pulizia;

parmi che dalle mie ricerche si possa dedurre che *la flora normale dei dotti galattofori delle vacche sia costituita essenzialmente dai sovradescritti tipi di cocchi*, fra i quali, sebbene non si trovino rappresentanti dei comuni fermenti lattici, ne esistono tuttavia alcuni (v. il tipo uno e ancor più il tipo due) capaci di alterare il latte colla medesima rapidità dei fermenti lattici propriamente detti.

Vero è che questi tipi rapidamente coagulanti non sono stati riscontrati in tutte le vacche esaminate; ma è vero altresì che in alcuni capezzoli essi si contenevano in quantità molto rilevanti; per cui fa d'uopo ritenere che la flora bacterica normale dei dotti galattofori delle vacche non sia senza importanza per la lavorazione del latte; se e in quali casi essa possa riuscire di danno o di vantaggio per l'industria casearia, non è argomento di cui mi voglia occupare qui; vi ho già accennato in un precedente lavoro a proposito dei bacteri acido-presamigeni contenuti nei dotti galattofori [1], e intendo ritornarvi in altra occasione.

II. — I risultati delle mie esperienze danno anche modo di spiegare le opposte conclusioni a cui vennero i precedenti ricercatori.

Infatti: *a*) se pensiamo alla grande somiglianza ed ai facili scambi che ho fatto notare fra le colonie dei diversi tipi di cocchi sulle piatte di gelatina, non fa meraviglia che ad alcuni osservatori siano sfuggiti per l'appunto i tipi rapidamente alteranti il latte, per cui essi hanno potuto concludere « che la flora microbica dei dotti galattofori non è tale da alterare profondamente il latte ».

b) d'altra parte se si considera che in alcune vacche ho constatato in grande abbondanza uno streptococco avente tutti i caratteri dei comuni fermenti lattici, non fa maraviglia che altri osservatori abbiano potuto trovare nei dotti galattofori il *Bacillus acidi lactici*, prototipo dei fermenti lattici; che anzi quella constatazione lascia altresì adito alla possibilità che in casi eccezionali (poca pulizia, malattie pregresse ecc.), attecchiscano in quei dotti anche altri bacteri capaci di produrre profonde alterazioni nel latte, pur essendo inoffensivi per le vaccine.

[1] Gorini C., *Sui bacteri acido-presamigeni del latte* (Rendiconti del Reale Istituto lombardo di scienze e lettere, dicembre 1901).

PERSONALE ACCADEMICO

All'Accademia giunse la dolorosa notizia della morte del Socio straniero Rodolfo Virchow, mancato ai vivi il 5 settembre 1902; il defunto Socio faceva parte dell'Accademia sino dal 20 settembre 1887.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 4 agosto al 7 settembre 1902.

Abderhalden E. — Ueber den Einfluss des Höhenklimas auf die Zusammensetzung des Blutes. München, 1902. 8°.

Bassani C. — Conclusioni delle prime ricerche sulla provenienza del terremoto di Firenze avvenuto il 18 maggio 1895. Torino, 1902. 8°.

Id. — Il primo futuro Congresso sismologico italiano ed i primi problemi sismici. Pavia, 1902. 8°.

Ferro y Zea E. — Sobre el Ferrocarril de Antioquia. Medellin, 1902. 16°.

Grujić S. — Das Wesen der Anziehung und Abstossung. Berlin, 1902. 8°.

Loria G. — Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. I, II. Leipzig, 1902. 8°.

Macchiati L. — Sulla fotosintesi fuori dell'organismo e sul suo primo prodotto. Napoli, 1902. 8°.

Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia. Vol. XI. Il Montello. Roma, 1902. 8°.

Nery Vollù L. — Le Trigonométrie universelle. Rio de Janeiro, 1902. 8°.

Ricciardi L. — La coltivazione del tabacco indigeno. Napoli, 1902. 8°.

Sars G. O. — An account of the Crustacea of Norway. Vol. IV Copepoda. Calanoida, p. VII, VIII. Bergen, 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 21 settembre 1902.

Matematica. — *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di second'ordine.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Questa Nota è la continuazione di un'altra pubblicata poco tempo fa in questi medesimi Rendiconti [1]; in essa mi propongo di studiare il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione ai differenziali di second'ordine, e di porre questo risultato sotto una forma le cui parti sieno invariantive, analogamente a quanto si fa nella teoria delle ordinarie espressioni pfaffiane.

Della formola ottenuta faccio poi alcune applicazioni per la ricerca di una speciale categoria di trasformazioni infinitesime che lasciano inalterata l'espressione data.

In questa Nota mi riferirò continuamente ai simboli e notazioni adoperati nella precedente.

1. Nel § 6 della mia Memoria intitolata: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di 2° ordine* (Ann. di Mat. (3), t. VII, 1901) ho definito che cosa intendo per: *operare una trasformazione infinitesima*

$$\Xi f = \sum_k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{1}$$

[1] *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali di 2° ordine e su di una estensione dei simboli di Christoffel*, Rend. Acc. dei Lincei, (5), t. XI, 2° semestre, pag. 105,

su di una espressione del tipo

$$\text{(2)} \qquad U = \sum_{k=1}^{n} X_k\, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

che chiamerò *forma ai differenziali di 2° ordine.*

Si ha

$$\text{(3)} \qquad \Xi U = \sum_k \sum_r \frac{\partial X_k}{\partial x_r} \xi_r\, d^2 x_k + \sum_k X_k\, d^2 \xi_k +$$
$$+ \sum_i \sum_j \sum_r \xi_r \frac{dX_{ij}}{\partial x_r} dx_i\, dx_j + 2 \sum_i \sum_j X_{ij}\, d\xi_i\, dx_j\,.$$

Formiamo ora il differenziale secondo dell' invariante

$$\text{(4)} \qquad \Delta = \sum_k X_k\, \xi_k$$

e otteniamo

$$d^2 \Delta = \sum_r \xi_r \left[\sum_k \frac{\partial X_r}{\partial x_k} d^2 x_k + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 X_r}{\partial x_i\, \partial x_j} dx_i\, dx_j \right] +$$
$$+ 2 \sum_i \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} d\xi_i\, dx_j + \sum_k X_k\, d^2 \xi_k$$

donde, adoperando i soliti simboli

$$\text{(5)} \quad \Xi U = d^2 \Delta + \sum_k \sum_r \xi_r\, (kr)\, d^2 x_k + \sum_r \sum_i \sum_j \xi_r \left(\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_r} - \frac{\partial^2 X_r}{\partial x_i\, \partial x_j} \right) dx_i\, dx_j -$$
$$- 2 \sum_i \sum_j ((ij))\, d\xi_i\, dx_j\,.$$

Introduciamo ora la forma covariante C considerata nella precedente Nota:

$$\text{(6)} \qquad C = \sum_i \sum_j ((ij))\, \xi_i\, dx_j\,,$$

da cui otteniamo

$$dC = \sum_i \sum_j ((ij))\, d\xi_i\, dx_j + \sum_i \sum_j \xi_i\, ((ij))\, d^2 x_j +$$
$$+ \sum_i \sum_j \sum_r \frac{\partial ((ij))}{\partial x_r} \xi_i\, dx_r\, dx_j\,,$$

e possiamo quindi scrivere, con opportuno cambiamento di indici [ricordando che $(kr) = ((kr)) - ((rk))$]

$$\Xi U = d^2 \Delta - 2\, dC + \sum_k \sum_r \xi_r\, [((kr)) + ((rk))]\, d^2 x_k +$$
$$+ \sum_r \sum_i \sum_j \xi_r \left[\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_r} - \frac{\partial^2 X_r}{\partial x_i\, \partial x_j} + 2\, \frac{\partial ((rj))}{\partial x_i} \right] dx_i\, dx_j\,.$$

Ora introducendo il simbolo a tre indici già introdotto negli altri miei lavori, e che, come ho detto nella precedente Nota, è da considerarsi una estensione del simbolo di Christoffel, si trova facilmente che

$$(7) \qquad \}i\,j\,r\{ = \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_r} - \frac{\partial^2 X_r}{\partial x_i\,\partial x_j} + \frac{\partial((r\,j))}{\partial x_i} + \frac{\partial((r\,i))}{\partial x_j}$$

mentre poi alla parentesi quadra contenuta nell'ultimo termine della precedente espressione di Ξ U, a causa del sommatorio rispetto ad i ed j, può darsi anche la forma rappresentata dal secondo membro di (7), ed essendo

$$((k\,r)) + ((r\,k)) = \}kr\{\,,$$

si ha infine:

$$(8) \quad \Xi U = d^2\varDelta - 2\,dC + \sum_k \sum_r \}k\,r\{\,\xi_r\,d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \}i\,j\,r\{\,\xi_r\,dx_i\,dx_j\,.$$

Si presenta così, come si vede, il covariante di 2° ordine L da noi già considerato nella precedente Nota.

Se la forma U diventa *la forma differenziale quadratica*

$$(9) \qquad U' = \sum_i \sum_j X_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

l'invariante $\varDelta$ si riduce a zero, il covariante C diventa

$$(10) \qquad C' = -\sum_i \sum_j X_{ij}\,\xi_i\,dx_j$$

e la (8) diventa:

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\,\Xi U' = dC' - \sum_{k,r} X_{kr}\,\xi_r\,d^2x_k - \sum_{i,j,r} \begin{bmatrix} i\,j \\ r \end{bmatrix} \xi_r\,dx_i\,dx_j$$

in cui $\begin{bmatrix} i\,j \\ r \end{bmatrix}$ sono gli ordinarî simboli di Christoffel.

2. Diremo che *la forma* U *ammette la trasformazione infinitesima* Ξ, ovvero che *questa lascia invariata* U, quando Ξ U è, a meno di un fattore, uguale alla medesima U:

$$(12) \qquad \Xi U = \varrho\,U.$$

Ponendo

$$(13) \qquad C_j = \sum_i ((i\,j))\,\xi_i$$

e quindi

$$C = \sum_j C_j\,dx_j\,,$$

dalla (12) si ricavano le seguenti equazioni:

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_r \}k\,r\{\,\xi_r = \varrho\,X_k - \frac{\partial A}{\partial x_k} + 2\,C_k \\ &\sum_r \}i\,j\,r\{\,\xi_r = \varrho\,X_{ij} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_j} + \frac{\partial C_j}{\partial x_i} + \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \end{aligned}\right.$$

le quali insieme alle

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_r X_r\,\xi_r = A \\ &\sum_r ((r\,k))\,\xi_r = C_k \qquad\qquad (k = 1\,,2\,,\dots n) \end{aligned}\right.$$

sono le relazioni cui devono soddisfare le $\xi_1 \dots \xi_n$ perchè la trasformazione Ξ lasci invariata U.

Alle seconde delle (15) possiamo sostituire altre che sono più convenienti per il nostro scopo.

Se dalla prima delle (14) sottragghiamo la seconda delle (15) moltiplicata per 2, e teniamo conto delle relazioni

$$\}k\,r\{ = ((k\,r)) + ((r\,k))\,,$$
$$(k\,r) = ((k\,r)) - ((r\,k))\,,$$

alla seconda delle (15) possiamo sostituire un'altra equazione e il sistema (15) diventa

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_r X_r\,\xi_r = A \\ &\sum_r (k\,r)\,\xi_r = \varrho\,X_k - \frac{\partial A}{\partial x_k}\,. \end{aligned}\right.$$

È degno di nota che la matrice dei coefficienti delle incognite ξ e ϱ nelle equazioni lineari (16) (14) è esattamente la matrice da noi considerata già, ad altro scopo, nel lavoro: *Un teorema della teoria invariantiva* ecc. (Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, 1901) e che è

$$D \equiv \left\|\begin{array}{lll} 0 & X_1 \dots\dots\dots\dots & X_n \\ X_k & (k\,1) \dots\dots\dots\dots & (k\,n) \\ X_k & \}k\,1\{ \dots\dots\dots\dots & \}k\,n\{ \\ X_{ij} & \}i\,j\,1\{ \dots\dots\dots\dots & \}i\,j\,n\{ \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \Big\{\; k = 1, 2, \dots n \\ \Big\{\; k = 1, 2, \dots n \\ \Big\{\; i, j = 1, 2, \dots n\,. \end{array}$$

Ricerchiamo *le condizioni cui devono soddisfare* A *e le* C_k *perchè esista una* Ξ *che lasci invariata* U.

Formiamo le equazioni lineari

$$(17)\quad \begin{cases} \sum_k X_k \zeta_k + \sum_k X_k \zeta_k^{(1)} + \sum_i \sum_j X_{ij} \zeta_{ij} = 0 \\ X_r \zeta_0 + \sum_k (kr) \zeta_k + \sum_k \}kr\{ \zeta_k^{(1)} + \sum_i \sum_j \}ijr\{ \zeta_{ij} = 0 \\ (r = 1, 2, \dots n) , \qquad (\zeta_{ij} = \zeta_{ji}) \end{cases}$$

e sia $\zeta_0 \zeta_k \zeta_k^{(1)} \zeta_{ij}$ una soluzione di questo sistema; moltiplicando tutte le (16) e (14) ordinatamente per le ζ e sommando, si eliminano le incognite ξ e ϱ, e resta:

$$(18)\quad \zeta_0 \mathcal{A} - \sum_k (\zeta_k + \zeta_k^{(1)}) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k} - \sum_i \sum_j \zeta_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + 2 \left[\sum_k \zeta_k^{(1)} C_k + \sum_i \sum_j \zeta_{ij} \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \right] = 0$$

e, variando le ζ, si ha così *un sistema di equazioni a derivate parziali cui devono soddisfare* $\mathcal{A}$ *e le* C_k; d'altra parte *se* $\mathcal{A}$ *e le* C_k *(che non sieno tutte zero) soddisfanno a tutte le* (18), *le equazioni lineari* (16) (14) *ammetteranno una soluzione, ed esisterà una trasformazione infinitesima che lasci invariata* U.

Fermiamoci per poco a considerare i casi nei quali la trasformazione infinitesima Ξ sia connessa invariantivamente a U.

Sia zero la forma covariante C. Fra i sistemi di soluzioni del sistema (17) esistono sempre quelle per le quali è:

$$\zeta_0 = 0 , \qquad \zeta_k^{(1)} = 0 , \qquad (k = 1, \dots n) ,$$

e questi sistemi soddisfanno perciò l'equazione

$$(19)\quad \sum_k X_k \zeta_k + \sum_i \sum_j X_{ij} \zeta_{ij} = 0$$

i cui sistemi di soluzioni ζ sono i coefficienti delle equazioni a derivate parziali che costituiscono il *sistema aggiunto* alla forma U (v. il § 4 della mia Memoria negli Annali di Matematica citata in principio); possiamo conchiudere che *nel caso indicato,* $\mathcal{A}$ *soddisfa a tutte le equazioni del sistema aggiunto alla forma* U.

Due casi allora sono possibili: o $\mathcal{A}$ è costante, ovvero no, nel quale ultimo caso le equazioni del sistema aggiunto devono ammettere una soluzione comune diversa dalla soluzione evidente $f =$ costante.

Per le conclusioni cui siamo pervenuti nella predetta Memoria, questo ultimo caso non può avvenire se non quando il sistema aggiunto è *completo*, cioè quando la equazione $U = 0$ è *completamente integrabile*; d'altra parte se ciò si verifica, avendosi (v. formole (15) del § 1 della stessa Memoria)

$$\frac{((r\,k))}{((r\,h))} = \frac{((s\,k))}{((s\,h))},$$

il determinante delle seconde fra le equazioni (15) è zero, e quindi esistono le ξ per le quali tutte le C_k, e perciò anche C, sono zero. Concludiamo: *Perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata* U, *e di cui il covariante simultaneo* C *sia identicamente zero, mentre* NON *sia costante l'invariante* Δ *è necessario e basta che* $U = 0$ *sia completamente integrabile, e che* Δ *soddisfi a tutte le equazioni a derivate parziali*

$$\zeta_0\,\Delta = \sum_k (\zeta_k + \zeta_k^{(1)}) \frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \sum_i \sum_j \zeta_{ij} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i\,\partial x_j} \tag{20}$$

essendo le ζ *tutte le soluzioni delle* (17).

Se poi $\Delta = \text{cost.}$ ma *non zero*, dalla (18) si vede che deve necessariamente essere $\zeta_0 = 0$, e perchè questa sia una conseguenza delle (17) deve essere diversa da zero (cioè di caratteristica *massima*) la matrice D_1 ottenuta da D colla soppressione della prima linea; perciò se D_1 è zero, deve essere $\Delta = 0$.

In tale ultimo caso le (18) sono tutte soddisfatte, e le (16) (14) diventano equazione lineari *omogenee*, per la cui coesistenza è necessario e basta l'annullarsi identico della matrice D, cioè che D abbia *al più* caratteristica n. D'altra parte, se ciò si verifica, sottraendo in D dagli elementi della 2^a, 3^a, ... $(n+1)^{ma}$ linea, rispettivamente quelli della $(n+2)^{ma}$, $(n+3)^{ma}$, ... $(2n+1)^{ma}$, e tenendo conto delle solite relazioni fra i simboli (kr) e $\}kr\{$, gli elementi della 2^a, 3^a, ... $(n+1)^{ma}$ linea diventano

$$0,\ ((1\,,k))\ ,\ ((2\,,k)),\dots\ ((n\,k))\ ; \qquad (k = 1\,,\dots n)$$

e poichè deve essere zero la matrice formata colla prima linea di D, con queste n linee e con un'altra qualunque di D, scegliendo per questa una di cui il primo elemento sia diverso da zero, si deduce che deve essere zero la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & \dots\dots\dots & X_n \\ ((1\,,k)) & \dots\dots & ((n\,k)) \end{matrix} \right\| \ \{\ k = 1\,,\dots n\,,$$

(cioè questa deve avere per caratteristica *al più* il numero $n - 1$), e perciò le equazioni omogenee cui si riducono le (15) per $\Delta = C = 0$, sono compatibili.

Ne concludiamo: *Perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata* U, *e di cui sieno contemporaneamente zero il covariante simultaneo* C *e l'invariante* Δ, *è necessario e basta che la matrice* D *abbia* AL PIÙ *caratteristica* n.

Nel caso in cui U diventi la forma differenziale quadratica U′ (formola (9)), si ha:

Perchè esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata la forma differenziale quadratica U′, *e di cui sia zero il covariante simultaneo* C′ (*formola* (10)), *è necessario e basta che sia zero la matrice*

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} 0 & X_{k1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & X_{kn} \\ X_{ij} & \begin{bmatrix} ij \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} ij \\ n \end{bmatrix} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \{ k = 1, 2 \ldots n \\ \{ ij = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

in cui $\begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix}$ *sono gli ordinarî simboli di Christoffel.*

Chimica agraria. — *Fermentazione alcoolica del mosto di Fico d'India con lieviti abituati al fluoruro di sodio.* Nota di C. Ulpiani e L. Sarcoli, presentata dal Socio Paternò.

In una pubblicazione precedente (1) noi abbiamo dimostrato quale vantaggio potrebbe recare all'agricoltura delle regioni meridionali d'Italia, lo sfruttamento industriale di un prodotto di così poco costo culturale e di così gran reddito come il fico d'India.

Abbiamo fatto notare come i tentativi fatti in Sicilia ed in Sardegna per utilizzare nell'industria dell'alcool il fico d'India avessero sortito poco felice esito, perchè la non ancora sviluppata tecnica delle fermentazioni non permetteva di trarre dai frutti quel rendimento in alcool che si sarebbe dovuto ottenere per renderne rimuneratrice la lavorazione.

Come primo risultato degli studî che esponevamo eravamo giunti alle seguenti conclusioni:

1°. Il mosto di fico d'India, abbandonato a sè stesso, subisce la fermentazione alcoolica per azione di un lievito speciale, il *Sach. Opuntiae*, che è stato da noi isolato e studiato dal lato morfologico e biologico.

2°. La fermentazione prodotta da questo lievito è del tutto inadatta alla produzione industriale dell'alcool.

3°. La sterilizzazione del mosto e l'innesto successivo di fermenti selezionati, scelti razionalmente, produce un rendimento quasi teorico. Purtroppo

(1) Gazz. chim., t. 31, p. II.

la sterilizzazione rigorosa nella grande industria è legata a grandi spese e a difficoltà che potrebbero menomare l'utile della lavorazione.

4°. L'innesto di fermenti selezionati, senza previa sterilizzazione rigorosa, non conduce allo scopo in quanto il *Sach. Opuntiae* molto più resistente riesce in breve a sopraffare i fermenti selezionati.

Concludevamo quindi colla speranza di trovare condizioni tali di fermentazione che impedissero lo sviluppo del *Sach. Opuntiae*, pur lasciando libera l'azione dei fermenti puri adattati allo scopo.

Dopo un lungo lavoro d'orientamento noi abbiamo risoluto il problema aggiungendo al mosto di fico d'India fluoruro di sodio in proporzione del 0,25 %, e impiegando per la fermentazione lieviti selezionati ed accostumati a questa concentrazione di fluoruro. A questa concentrazione il *Sach. Opuntiae* non si sviluppa più, mentre la fermentazione indotta dai lieviti accostumati procede colla maggiore regolarità e dà il massimo rendimento d'alcool.

Già Effront (C. R. CXIX, 169) aveva trovato che coltivando lieviti di birra in mosti contenenti dosi sempre crescenti di acido fluoridrico o fluoruri, si poteva giungere a farli vivere in presenza di tali dosi di fluoro che avrebbero impedito lo sviluppo fermentativo del lievito non accostumato, ed aveva dimostrato che tale adattamento a mezzi fluorurati, se produceva una perdita nella facoltà riproduttiva della cellula, produceva anche un forte accrescimento della facoltà fermentativa delle cellule blastomicetiche. Inoltre, con serie di esperienze comparative usando lieviti accostumati e non accostumati alla presenza di composti di fluoro, dimostrava che coi lieviti abituati si otteneva maggior quantità di alcool e minor quantità di anidride carbonica di quello che non si aveva dai lieviti non accostumati; e precisamente, che il rendimento in alcool dato dai fermenti accostumati ai fluoruri era vicinissimo al calcolato della formola teorica della fermentazione, mentre con fermenti non accostumati si otteneva un rendimento molto prossimo a quello fissato sperimentalmente da Pasteur.

Dietro questi studî teorici di Effront, noi abbiamo avuto l'idea di applicare il fluoruro di sodio per eliminare da un mosto, senza bisogno di sterilizzazione, l'azione di un lievito inadatto a far prevalere l'azione di un lievito selezionato.

L'applicazione nel caso della fermentazione alcoolica del mosto di fico d'India è perfettamente riuscita. I vantaggi da noi ottenuti col nostro metodo possono riassumersi così:

1°. Il *Sach. Opuntiae* è completamente eliminato dal movimento fermentativo.

2°. La fermentazione indotta nel mosto di fico d'India al 0,25 % di fluoruro di sodio dal *Sach. Pastorianus 2°* accostumato a questa concentrazione, dà un rendimento d'alcool che si avvicina al rendimento teorico.

3°. Le fermentazioni batteriche secondarie (quali la lattica, manni-

tica, ecc.) che, secondo Ballaud, nei paesi caldi consumano molto zucchero a detrimento dell'alcool, vengono del tutto eliminate.

Acclimatazione dei lieviti ai mezzi fluorurati.

Per questo studio abbiamo creduto scegliere il fluoruro di sodio perchè di facile manipolazione e di minor costo in industria. Si prepararono serie di tubicini di mosto contenente progressivamente dosi crescenti di fluoruro di sodio. La differenza tra serie e serie era di 0,05 % di fluoruro di sodio fra un termine e l'altro fino ad un tenore del 0,5 %. Si innestarono queste serie col *Sach. Opuntiae*, col *Sach. Patorianus 2°* e col *Sach. Cerevisiae* presi da colture pure in agar. Dopo cinque giorni tutte le prove contenenti fluoruro di sodio in proporzione inferiore al 0,25 % erano più o meno rigogliosamente in fermentazione. Al di là di questo limite il *Sach. Opuntiae* anche in molte prove tenute più a lungo in termostato a 25° non fermentava più. Il *Sach. Pastorianus* dopo sei giorni fermentava anche al 0,30 % ma molto stentatamente, il *Sach. Cerevisiae* dava un accenno di velo anche al 0,4 %, però senza entrare anche dopo lungo tempo in fermentazione. Alcuni bicchieri contenenti mosti fluorurati al 0,25, 0,30, 0,40 % lasciati a sè e scoperti per molti giorni sul tavolo non fermentarono mai, ma lasciarono sviluppare qualche muffa, mentre una prova di paragone contenente mosto semplice, quantunque coperta, entrò dopo 24 ore circa in fermentazione spontanea.

Bene accertato questo fatto, si prepararono molte serie di tubicini contenenti mosti addizionati di dosi di fluoruro sodico crescenti da 0,025 % al 0,5 %, con una differenza di 0,025 % tra una serie e l'altra. Innestata la prima serie non si passava alla seconda se non dopo che eravamo ben sicuri che la fermentazione fosse regolare e completa; così giungemmo successivamente ad accostumare i lieviti al 0,5 % di fluoruro di sodio.

A questa dose il *Sach. Pastorianus 2°* tarda un poco il suo sviluppo e così pure il *Cerevisiae* che non produce più che debolissimo velo; il *Sach. Opuntiae* sembra conservare tutti i suoi caratteri di lentezza e di abbondante velo e massa di cellule. La fermentazione in mosti contenenti il 0,45 % di fluoruro sodico si avvia dopo 24 ore e procede benissimo. A dosi inferiori al 0,4 % si ha fermentazione dopo poche ore e regolarissima. Se si innestano con fermenti abituati a dosi molto alte di fluoruro sodico, mosti contenenti dosi più basse, la fermentazione sembra più rigogliosa e sollecita.

In tutte queste osservazioni fatte in tubicini ho potuto notare costantemente che il *Pastorianus* completa più sollecitamente del *Cerevisiae* la fermentazione, mentre questo sembra che l'inizi più presto.

Differenza del rendimento in alcool

1° con mosti semplici e fermenti semplici;
2° con mosti semplici e fermenti fluorurati;
3° con mosti fluorurati e fermenti fluorurati.

Per verificare l'azione del fluoruro sodico sui fermenti e sulle fermentazioni, fu istituita la seguente esperienza.

Si prepararono due serie di palloncini contenenti ciascuno cm³ 150 di mosto. In una delle serie il mosto conteneva il 0,25 °/₀ di fluoruro sodico, nell'altra il mosto era semplice. Si sterilizzò per un'ora a 110° e si determinò lo zucchero tanto del mosto fluorurato come del non fluorurato. Il contenuto era di grammi 8,29 per ogni palloncino.

Gli innesti si eseguivano versando colle debite cure nel palloncino da innestare, il contenuto di tubicini in cui si trovavano da tre giorni in fermentazione 3 cm³ esatti di mosto al 0,35 °/₀ di floruro sodico. Si sperimentò quindi innestando nello stesso modo e nelle stesse condizioni di tempo e temperatura mosto fluorurato con fermenti fluorurati, mosto semplice con fermenti fluorurati e mosto semplice con fermenti semplici.

Le fermentazioni si fecero durare sei giorni a temperatura costante (25°-26°), l'alcool fu determinato distillando dopo alcalinizzazione 100 cm³ da ciascuna prova. I risultati ottenuti sono espressi nella seguente tabella:

		Zucchero iniziale	Zucchero residuo	Alcool ottenuto	Rendimento in alcool °/₀ di zucchero distrutto
Mosto e fermento semplici	*Sach. Pastor. 2°*	8,29	—	4	48,25
	Sach. Cerevisiae	8,29	0,53	3	38,64
Mosto sempliee ferm. florurato	*Sach. Pastor. 2°*	8,29	—	4	48,25
	Sach. Cerevisiae	8,29	1,97	3	47,46
Mosto florurato e ferm. fluorur.	*Sach. Pastor. 2°*	8,29	—	4,2	50,65
	Sach. Cerevisiae	8,29	—	4	48,25

Questa esperienza dimostra bene i vantaggi che si ottengono nell'impiego del fluoruro sodico e la sua influenza sul rendimento in alcool. Per

meglio controllare questi risultati confrontando la quantità di alcool ottenuta coll'anidride carbonica svolta, si ripetè l'esperienza nel seguente modo.

Due palloncini contenenti 200 cm³ di mosto al 0,25 % di fluoruro sodico, furono, dopo sterilizzazione a 110°, innestati con cm³ 2 di mosto che aveva da circa 15 giorni terminata la sua fermentazione e quindi non conteneva più CO^2. Lo zucchero contenuto da ciascun palloncino era gr. 10,5552 e fu determinato in un palloncino identico dopo la sterilizzazione.

I fermenti usati per l'innesto erano il *Sach. Cerevesiae* ed il *Sach. Pastorianus 2°* accostumati al 0,35 % di fluoruro sodico. Appena eseguito l'innesto, i due palloncini furono adattati ad un apparecchio identico a quello descritto nella Memoria già pubblicata. L'alcool prodotto fu dosato col picnometro, lo zucchero residuo col solito metodo. Per dosare il CO^2 svolto giornalmente e quindi meglio seguire l'andamento della fermentazione, si fece ciascun giorno alla medesime ore passare aria a bolla a bolla per 3 ore di seguito nei due palloncini in modo da cacciare tutto il CO^2 sviluppato. L'ultimo giorno l'aria passò per 6 ore continue.

I risultati sono notati nelle seguenti tabelle:

Giorni dall' innesto	*Pastoriauus* Peso delle bolle	Differenze giornaliere CO^2 svilupp.	Peso CO^2 svolto dall' innesto	*Cerevisiae* Peso delle bolle	Differenze giornaliere CO^2 svolto	Peso CO^2 svolto dall' innesto
3°	70-8.3409			70-12.0125		
4°	8.0970	0.2439		11.3653	0.6462	
5°	6.3335	1.7635	2.0074	10.7345	0.6318	1.2780
6°	4.8305	1.5030	3.5104	10.1366	0.5979	1.8759
cambio KOH	8.9847			9.5630		
7°	8.2470	0.7377	4.2481	cambio KOH 15.2132	0.5697	2.4456
8°	8.0456	0.2014	4.4495	14.3847	0.8285	3.2741
9°	7.9532	0.0924	4.5419	13.7653	0.6194	3.8935
10°	7.9065	0.0467	4.5886	13.1167	0.6486	4.5421
11°	7.9030	0.0035	4.5921	12.7655	0.3512	4.8933
12°	7.9000	0.0030	4.5951	12.6320	0.1335	5.0269
13°	7.8977	0.0023	4.5974	12.5006	0.1314	5.1582
14°	7.8964	0.0013	4.5987	12.3902	0.1104	5.2686
15°	7.8962	0.0002	4.5989	12.2896	0.1006	5.3692

La seguente tabella riassume più semplicemente i risultati ottenuti:

	Zucchero contenuto	Zucchero residuo	CO^2 colcolato	CO^2 trovato	C^2H^5OH calcolato	C^2H^5OH trovato
Sach. Pastorianus 2°	10.5552	—	5.1603	4.5989	5.3948	5.1032
Sach. Cerevisiae	10.5552	tracce	5.1603	5.3692	5.3948	4.8401

Queste esperienze formano le conclusioni accennate nell' introduzione. Attualmente abbiamo in corso esperienze in grande per verificare se questi risultati ottenuti in vitro possano essere applicati nella pratica industriale.

Paleontologia. — *Il Lophiodon Sardus (n. sp.) delle ligniti di Terras de Collu* (Sardegna). Nota del dott. CAMILLO BOSCO, presentata dal Corrispondente DE STEFANI.

Nel 1882 l' ingegnere Emilio Ferraris, direttore delle miniere di Monteponi, inviava al museo geologico dell' Università di Pisa alcuni frammenti di una mandibola di perissodattilo, trovati nello strato di marne interposto fra le ligniti di Terras de Collu, nel bacino di Gonnesa (Iglesias).

Il dottor Forsyth-Major dette nel 1891 un cenno sommario di essi, riferendoli al *Lophiodon isselensis* (¹); ed il prof. Carlo De Stefani citò tale specie, sulla fede del Major, in un elenco di fossili del terreno eocenico di Gonnesa (²).

Recentemente dalla cortesia del prof. Mario Canavari io ebbi in comunicazione quei frammenti; e di essi pubblico ora la descrizione.

Essi sono:

1.° Una branca destra, molto deteriorata, della quale però è ben conservato l' angolo ed il margine posteriore del ramo verticale, e del cui ramo orizzontale rimane un solo frammento che ha in posto i tre molari (fig. *C*);

2.° Un frammento del ramo orizzontale della branca sinistra, che ha in posto i tre molari (fig. *A* e *B*);

4.° Un premolare isolato sinistro, probabilmente il secondo;

3.° Un frammento della sinfisi;

5.° Un altro frammento d' osso, colla radice di un incisivo.

I denti molari, che sono tre, hanno la corona rettangolare, col lato maggiore disposto nel senso longitudinale della mandibola; decrescono di grossezza dall' indietro all' avanti; e sono alquanto consumati dalla masticazione,

(¹) C. E. Forsyth-Major, *Resti di Lophiodon nelle ligniti di Terras de Collu* (in Processi verbali della Società toscana di scienze naturali sedente in Pisa, vol. VII, pag. 209. Adunanza del 18 gennaio 1891).

(²) C. De Stefani, *Cenni preliminari sui terreni cenozoici della Sardegna* (in Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. VII, pag. 464. Roma 1891).

ciò che prova che si tratta di un individuo piuttosto vecchio. Naturalmente il più consumato è l'anteriore, ed il meglio conservato è il posteriore.

In ogni dente molare si osservano quattro tubercoli ben pronunciati, due situati sul lato esterno e gli altri due sul lato interno; il tubercolo antero-interno è sempre più sviluppato degli altri tre.

Fig. A. — *Lophiodon Sardus* n. sp. — Branca sinistra di mandibola veduta dalla faccia interna.

Il tubercolo antero-esterno nel 3.° molare (tanto nella mandibola destra che nella sinistra) ha una leggera e superficiale spaccatura dall'alto in

Fig. B. — *Lophiodon Sardus* n. sp. — Veduta superiore dei denti molari della branca sinistra di mandibola.

basso, residuo probabilmente della primitiva divisione di esso in due tubercoletti.

Dal tubercolo antero-esterno dei tre molari prende origine una grossa collina, curva colla concavità in avanti, ed obbliqua, che raggiunge il tubercolo antero-interno. Un'altra consimile collina, ma disposta più obbliquamente all'asse longitudinale del dente, riunisce i due tubercoli posteriori.

Dalla base del tubercolo antero-esterno parte un'altra collina, molto piccola e depressa, la quale con una curvatura disposta in senso contrario a quello delle colline principali, e cioè con la convessità in avanti, raggiunge quasi la faccia interna del dente, formando un cingolo sulla faccia anteriore di esso. Consimile collina, ma alquanto più larga e più alta, parte dal tuber-

Fig. C. — *Lophiodon Sardus* n. sp. — Branca destra di mandibola veduta dalla faccia esterna.

colo postero-esterno, e molto obbliquamente raggiunge la collina principale anteriore, e quindi correndo parallelamente ad essa si riunisce al tubercolo antero-interno.

Troviamo così nei molari di questa specie fossile due colline principali obblique e curve che riuniscono fra di loro a due a due i tubercoli anteriori ed i tubercoli posteriori, e due altre colline secondarie che prendono origine dai tubercoli esterni, una delle quali forma il cingolo anteriore del dente e l'altra attraversa lo spazio interposto fra le due colline.

Si può perciò riconoscere in questi molari la forma a *V* dei tubercoli esterni; i bracci posteriori delle *V* sono dati dalle colline principali ed i bracci anteriori dalle secondarie; i bracci posteriori hanno la concavità rivolta in avanti, mentre l'opposto riscontrasi nei bracci anteriori.

Il 3° molare ha inoltre un tallone, breve e stretto, situato verso il lato esterno, e separato dalla collina posteriore mediante un incavo profondo ed obbliquo. Dal 3° molare destro questo tallone è scomparso per rottura, ed in quello sinistro ne esiste solo un frammento.

Il premolare sinistro isolato è probabilmente il secondo. È molto deteriorato e non credo perciò sia il caso di darne la figura.

Ha forma simile a quella dei molari; ed anche qui i due tubercoli esterni si sviluppano a *V* con le braccia posteriori che costituiscono le colline trasversali del dente e con le braccia anteriori che si sviluppano l'una in un tubercolo situato sulla faccia anteriore del dente, e l'altra in una collina obbliqua che percorre l'avvallamento interposto fra le due colline trasversali.

La branca destra di mandibola ha l'angolo della parte montante arrotondato con ampia curvatura che si estende uniformemente fino al collo del condilo, ed ha il ramo verticale rientrante. Il condilo, che pare fosse molto allargato trasversalmente, è bassissimo, e non supera che di pochi centimetri il livello del piano di masticazione dei denti molari. Del processo coronoide non è rimasta traccia alcuna. Il ramo orizzontale è molto compresso lateralmente ed alquanto alto; il suo margine inferiore, nel tratto corrispondente ai molari, è quasi parallelo al margine alveolare.

Un frammento della sinfisi contiene una radice di dente incisivo, lunga, e quasi cilindrica.

La forma dei denti molari e del premolare, e della radice dell' incisivo, e quella dell'angolo della mandibola e del frammento di sinfisi, non lasciano dubbio che questi resti siano da attribuirsi ad un *Lophiodon*; ma è da escludere in modo assoluto che si tratti del *L. isselensis* Cuv., sia per le minori dimensioni, sia per la minore larghezza dei molari, e sia infine per la sottigliezza e l'altezza del ramo orizzontale e per la eccezionale bassezza del verticale.

Per tale forma speciale della mandibola questo esemplare differisce anche dagli altri *Lophiodon* finora descritti; e non esito perciò a riferirlo, almeno provvisoriamente, ad una nuova specie che denomino ***Lophiodon sardus***.

Ma indipendentemente dalla questione se si tratti di una specie nuova, oppure se si debba attribuire a qualche altra specie già nominata (ciò che non potrà decidersi che dopo una completa revisione del genere *Lophiodon* le cui numerose specie, ad eccezione di pochissime, sono conosciute molto imperfettamente) resta il fatto indiscusso che finora i *Lophiodon* non furono rinvenuti che nelle formazioni eoceniche; e si conferma così che a tale periodo debba attribuirsi il bacino lignitifero di Gonnesa.

Il *L. sardus* sarebbe adunque il più antico mammifero terrestre d'Italia.

Ecco alcune misure:

Altezza del ramo orizzontale della mandibola al $\overline{M}^2$	mm.	53
Spessore » » » »	»	16
Larghezza complessiva dei tre $\overline{M}$	»	68

$\overline{M}^3$	lunghezza	»	30
	larghezza	»	15
	lunghezza della collina anteriore	»	13
	» » posteriore	»	10
	» del tallone	»	7
$\overline{M}^2$	lunghezza	»	20
	larghezza	»	14
	lunghezza della collina anteriore	»	11
	» » posteriore	»	9
$\overline{M}^1$	lunghezza	»	18
	larghezza	»	12

Chimica. — *Altre ricerche intorno all'azione dei joduri alcoolici sugli indoli* [1]. Nota di G. PLANCHER, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In una Nota sopra questo argomento, presentata a questa Accademia nella seduta del 18 febbraio 1900 [2], sono esposti i fatti che avevo allora osservati in questo campo. Le mie ricerche non furono però sospese e debbo qui riferire gli ulteriori risultati ottenuti.

In quella Nota sono esposti alcuni spostamenti di radicali operati col riscaldamento e con essi sono spiegate alcune apparenti anomalie riscontrate nella metilazione di alcuni indoli; a pagina 119 della medesima è detto che il β- metil-α- isopropilindolo, trattato con joduro di metile, a 120°, per due giorni, invece che la β·β·N-trimetil-α-isopropilidenindolina [3], dà una sua isomera in seguito allo spostamento dell'isopropile.

Trasposizione del jodidrato di β·β.N-trimetil-α-isopropilidenindolina.

Per dimostrarlo ho voluto sottoporre al riscaldamento il jodidrato di β·β·N-trimetil- α- isopropilidenindolina sintetica fusibile a 185°-186°. Mantenendo questo jodidrato per dieci minuti tra 180° e 190°, prima rammollisce e quindi torna a solidificarsi; e raffreddato costituisce una massa giallo-bruna che cristallizzata ripetutamente dall'alcool assoluto bollente si separò in aghetti raggruppati a stella che fondono a 232° come il jodidrato ottenuto dal metilisopropilindolo.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

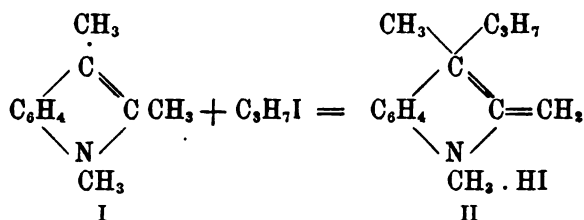
(2) Questi Rendiconti, vol IX, 1° sem., pag. 115.

(3) Gazz. chim. ital., 28, pag. 432.

Siccome entrambi i jodidrati, con picrato sodico danno un picrato fusibile a 121°-122°, l'identità dei due prodotti è completamente dimostrata. Le analisi dimostrano che la base ha la composizione $C_{14}H_{19}N$.

Azione del joduro isopropilico sul trimetilindolo.

Per dimostrare che questa base ha la costituzione (II), la preparai per azione del joduro isopropile sul trimetilindolo di Degen e l'ottenni infatti con questa reazione:

$$\underset{\text{I}}{C_6H_4\begin{array}{c} C(CH_3) \\ N(CH_3) \end{array} C\,CH_3} + C_3H_7I = \underset{\text{II}}{C_6H_4\begin{array}{c} C(CH_3)(C_3H_7) \\ N(CH_3) \cdot HI \end{array} C{=}CH_2}$$

Si scalda il trimetilindolo a 95°-100°, in autoclave, col suo doppio di joduro di isopropile; si ottiene una massa semisolida dalla quale si può separare per filtrazione un prodotto cristallino; la soluzione spremuta si scalda in autoclave altri due giorni e dà una nuova quantità di cristalli che si ricristallizzano dall'alcool insieme ai primi e fondono a 232°. Danno un picrato fusibile a 121°-122°. Furono analizzati e corrisposero perfettamente alla formola $C_{14}H_{19}N$.

Azione del joduro di metile sul β-metil-α-isopropilindolo.

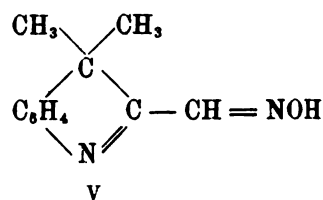
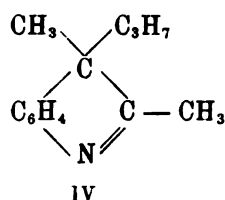
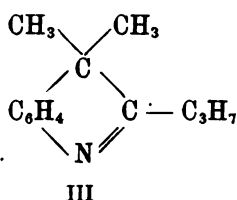
Questa reazione può essere moderata in modo da ottenere, invece del prodotto definitivo già descritto, i prodotti intermedî. Scaldando questo indolo con joduro di metile a 85°-90° per due giorni, si ottiene una massa resinosa di reazione acida che estratta con acqua acidulata cedette un miscuglio di basi che bollono verso 257° a pressione ordinaria.

Se si tratta questa miscela con acido picrico in soluzione alcoolica, si precipita un picrato in squamette giallo-chiare fondenti dopo alcune cristallizzazioni a 176°-177°.

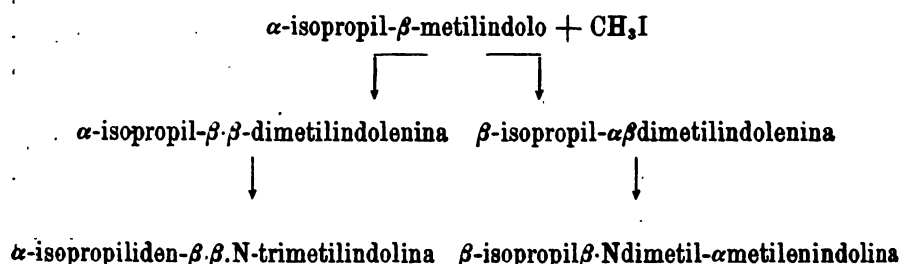
Analizzato diede numeri che per la base corrispondono a $C_{13}H_{17}N$. La poca solubilità del suo picrato in alcool, l'odore, e il fatto di contenere un metile soltanto in più del metilisopropindolo fanno supporre che essa sia una indolenina, cioè: o la β-β-dimetil-α-isopropilindolenina già nota [1] o la

[1] Gazz. chim. ital., XXVIII, 2, 430.

β·α-dimetil-β-isopropilindolenina:

$$\begin{array}{ccc}
CH_3\diagdown\diagup CH_3 & CH_3\diagdown\diagup C_3H_7 & CH_3\diagdown\diagup CH_3 \\
C & C & C \\
C_6H_4 \quad C - C_3H_7 & C_6H_4 \quad C - CH_3 & C_6H_4 \quad C - CH = NOH \\
\diagdown N \diagup\!\!\diagup & \diagdown N \diagup\!\!\diagup & \diagdown N \diagup\!\!\diagup \\
\text{III} & \text{IV} & \text{V}
\end{array}$$

In realtà essa ha la costituzione (IV). Infatti essa contiene un metile nella posizione α, perchè dà con acido nitroso un'aldossima fondente a 186°, che si disidrata assai facilmente dando un nitrile di odore assai grato. Ciò dimostra che già a 85°-90° l'isopropile è passato dal posto α al posto β. Questa base non costituisce però la totalità del prodotto; infatti in esso è anche presente la indolenina (III) che costituisce la maggior parte del prodotto. Essa si può dimostrare facendo congelare la miscela delle basi e separando la parte cristallina che consta appunto della predetta base e fonde dopo diverse purificazioni a 80°.

Più comodamente si dimostra esponendo la miscela delle due basi all'azione del joduro di metile, a ricadere per due ore a bagnomaria. Si ottiene una massa solida e cristallina che, bollita con alcool, depone per raffreddamento dei cristalli che dopo due sole cristallizzazioni fondono esattamente a 232° e sono del jodidrato di β-isopropil-β-N-dimetil-α-metilenindolina, come lo dimostrò la sua analisi. Nell'alcool rimase un altro jodidrato molto solubile che fu precipitato con etere e cristallizzato da etere-alcool. Fonde a 186° ed ha la composizione $C_{14}H_{19}N \cdot HI$; scaldato si converte in quello fusibile a 232°, esso è quindi il jodidrato di β·β·N-trimetil-α-isopropilidenindolina. Si può dare dunque questo schema:

α-isopropiliden-β.β.N-trimetilindolina β-isopropilβ·Ndimetil-αmetilenindolina

Queste esperienze dimostrano che il radicale più pesante ha una grande tendenza ad emigrare dal posto α nel posto β, e taluno potrebbe credere che fosse sempre necessario alla trasformazione degli indoli in indoline, che si verificasse questo passaggio.

Ad eliminare questo dubbio ho preparato il β·N-dimetil-α-etilindolo che non era ancora conosciuto e l'ho sottoposto alla metilazione.

β-N-dimetil-α-etilindolo.

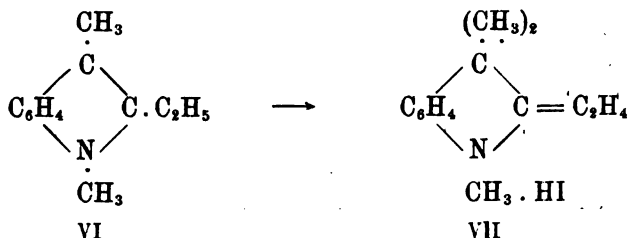
Fu ottenuto dal metilfenilidrazone del dietilchetone. Mescolando 15 gr. metilfenilidrazina con 12 gr. di chetone si ha tosto la combinazione, con separazione di acqua e riscaldamento della massa. Il metilfenilidrazone seccato con solfato di soda anidro bolle a 150° e 50 mm. oppure a 142°-143° e 22 mm. Venne condensato scaldandolo a 180°-200° con 5 volte il suo peso di cloruro di zinco granulato. L'indolo che si forma distilla al vapor d'acqua e bolle a 285°-287° alla pressione atmosferica. Ha odore fecale debolissimo.

L'analisi corrispose alla formola $C_{12}H_{15}N$.

In soluzione benzolica dà un picrato cristallizzato in lamine color marrone cupo solubili assai in benzolo e che fondono a 91°.

Azione del joduro di metile sul dimetiletilindolo.

Gr. 2,5 di dimetiletilindolo furono scaldati per 10 ore in tubo chiuso con 3 gr. di joduro di metile, al bagno maria. Il contenuto del tubo cristallizzato dall'alcool bollente, diede una massa di cristalli aghiformi e prismatici fusibili a 186° identificati per mezzo dell'analisi e delle sue proprietà per jodidrato di β-β-N-trimetil-α-etilidenindolina.

CH_3 · C · C_6H_4 · $C.C_2H_5$ · N · CH_3 (VI) ⟶ $(CH_3)_2$ · C · C_6H_4 · $C=C_2H_4$ · N · $CH_3.HI$ (VII)

Resta così dimostrato che il β-N-dimetil-α-etilindolo si trasforma in β-β-N-trimetil-α-etilidenindolina senza che il radicale etilico si sposti dalla posizione α; e quindi che per passare dagli indoli alle metilenindoline non è necessario che i radicali si spostino. Gli spostamenti avvengono soltanto perchè la temperatura in certe reazioni è troppo elevata.

α-terziariobutilindolo.

Proseguendo le ricerche, ho voluto vedere quale comportamento presenti un radicale più elevato di quelli finora studiati [1]. A tal uopo ho preparato

[1] Lavoro eseguito con L. Forghieri.

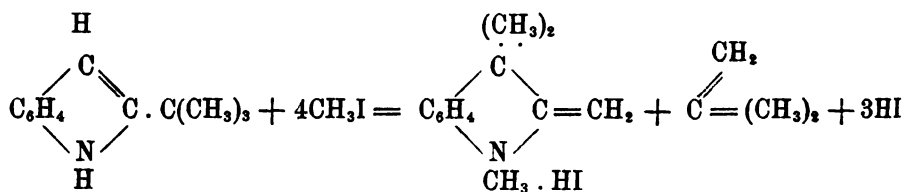
l'α-tersiariobutilindolo ed ho fatto agire su di esso il joduro di metile. Questo butilindolo si ottiene dal fenilidrazone della pinacolina che si prepara assai facilmente dalla pinacolina e dalla fenilidrazina, ed è un liquido quasi incoloro che bolle a 165° e 32 mm.

Venne condensato col metodo di Fischer [1], cioè con cloruro di zinco a 190° per 20 minuti circa; il butilindolo formatosi venne estratto distillandolo al vapor d'acqua. Distilla alla pressione atmosferica a 276°-279° senza decomporsi. Per raffreddamento si rapprende in cristalli incolori che purificati dall'etere di petrolio fondono a 73°. Si presenta in scagliette incolori che si conservano molto bene ed a lungo all'aria, sono quasi senza odore ed hanno la composizione $C_{12}H_{15}N$. Dà un picrato rosso-bruno fondente a 133°.

Nitrosobutilindolo. — Facendo agire sull'indolo il nitrito di amile in presenza di alcoolato sòdico si ottiene il sale sodico del nitrosobutilindolo che separato convenientemente, sciolto in acqua e trattato con anidride carbonica, lascia precipitare il nitroso derivato sotto forma di polvere gialla. Seccato e cristallizzato dall'etere si presenta in bei cristallini gialli fusibili a 233°. La formazione di questo corpo ne accerta che il butilindolo ha libero il posto β e che il radicale butilico terziario non si è mosso dal posto α.

Azione del CH_3I *sul terziariobutilindolo.*

Scaldando per 18 ore a 110° in tubo chiuso una parte di indolo con tre parti di joduro di metile si ottiene una poltiglia rossastra. Aperto il tubo che era in pressione, si svolsero dei gas infiammabili. Il contenuto del tubo bollito con alcool lasciò depositare una massa di cristalli di un jodidrato che purificato fonde a 253° ed hanno la composizione $C_{12}H_{15}N.HI$. Dànno un picrato che fonde a 148°. Tutto dimostra che questo corpo è il jodidrato di trimetilmetilenindolina. È quindi avvenuta questa reazione:

```
       H                              (CH3)2
      C                                 C                  CH2
     / \\                              / \                //
C6H4    C.C(CH3)3 + 4CH3I =  C6H4       C=CH2  +  C=(CH3)2 + 3HI
     \ /                              \ /
      N                                N
      H                              CH3.HI
```

Cioè a dire il joduro di metile ha scacciato il butile terziario.

Era da aspettarsi invece, che in questa reazione come in altri casi consimili citati in questa Nota, il butile terziario passasse nel posto β. Ho ammesso altrove che in questa trasposizione il radicale che emigra si stacchi prima allo stato di joduro e che quindi si addizioni di nuovo all'indolo per

(1) Lieb. Ann. 236, 126.

dare l'indolina. Questo caso è la prova più chiara della mia supposizione; infatti qui si osserva che il joduro di butile terziario si stacca dalla molecola e non può reagire perchè a quella temperatura (già a 90°) si decompone in acido jodidrico ed isobutilene (dimetiletilene assimmetrico).

Queste ricerche verranno diffusamente esposte nella Gazzetta Chimica Italiana.

Chimica. — *Nuove ricerche sulle soluzioni solide* (¹). Nota di GIUSEPPE BRUNI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Mi propongo di riferire succintamente in questa Nota i risultati delle ricerche eseguite in quest'anno, intorno alle soluzioni solide. Queste ricerche vennero da me eseguite in collaborazione coi signori dott. L. Mascarelli e M. Padoa e formeranno oggetto di varie comunicazioni nella Gazzetta chimica, nelle quali verranno descritte con tutto il dettaglio le varie serie di esperienze.

Scopo di questi studî era di ricercare sempre più a fondo quali analogie di costituzione occorrano a determinare la formazione di soluzione solida fra due corpi. Io mi sono inoltre proposto di cercare se possono ritrovarsi fra corpi organici quelle relazioni di isomorfismo e di formazione di cristalli misti che si verificano fra corpi inorganici e viceversa.

Nell'esporre i risultati ottenuti, seguirò l'ordine delle serie di atomi o gruppi isomorfogeni quali esse vennero da me classificate ed ordinate in un lavoro riassuntivo, publicato lo scorso anno (²).

I. *Serie 2ª*: H,OH. — Come è noto, sopratutto dai lavori di Garelli, quasi tutti i composti ciclici sono isomorfi o formano soluzioni solide coi loro derivati ossidrilati in cui l'ossidrile sia legato direttamente al nucleo. Pei composti a catena aperta si aveva finora una sola osservazione di Garelli e Calzolari, secondo la quale l'acido glicolico avrebbe un comportamento crioscopico anormale in acido acetico.

Ci parve perciò non privo di interesse di studiare nuovi casi per trarne conclusioni più sicure.

A tale scopo, usando come solvente l'etere dimetilico dell'acido succinico, vi esperimentammo il comportamento crioscopico che in esso mostrano i principali suoi derivati mono- e biossidrilati e cioè gli eteri dimetilici degli acidi malico, d-tartrico e racemico.

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(²) *Ueber feste Lösungen.* Sammlung chemischer und chemisch-technischer Vorträge. Stuttgart, F. Enke, 1901.

Cencentrazione.	Abbassamento termometrico.	Peso molecolare.
	Malato dimetilico $C_6H_{10}O_5 = 162$	
1,585	0°,52	169
2,465	0,84	163
3,540	1,28	160
	Tartrato dimetilico $C_6H_{10}O_6 = 178$	
0,961	0°,29	183
2,055	0,64	178
3,125	0,97	179
	Racemato dimetilico $C_6H_{10}O_6 = 178$	
0,795	0°,28	157
1,714	0,60	159
2,846	0,96	164

Come si vede il comportamento di questi corpi è perfettamente normale e non vi ha traccia alcuna di formazione di soluzione solida. In modo affatto identico si comporta l'acido mandelico inattivo sciolto nel corrispondente acido fenilacetico (K = 70).

		$C_8H_8O_3 = 152$
1,118	0°,66	152
2,056	1,22	152
3,327	1,86	161

Si può dunque concludere che la tendenza dei corpi organici a formare cristalli misti coi loro derivati ossidrilati, in cui gli ossidrili siano legati ad una catena aperta, non è affatto generale e che anzi assai spesso ciò non si verifica. Essa può però aver luogo quando la grandezza molecolare sia assai rimarchevole, come io potei constatare studiando il comportamento dei due idrobenzoini sciolti nel dibenzile.

Idrobenzoino.

Concentrazione.	Innalzamento termometrico.
0,856	0°,02
1,721	0,03

Isoidrobenzoino $C_{14}H_{14}O_2 = 214$

	Abbassamento termometrico.	Peso molecolare.
1,085	0°,15	518
2,258	0,34	489

Come si vede, la formazione di soluzione solida ha luogo qui in misura assai notevole poichè dei due isomeri uno innalza addirittura il punto di congelamento del solvente, e l'altro dà abbassamenti due volte e mezzo più piccoli dei normali.

Mi si presentò poi la questione se la formazione di cristalli misti potesse aver luogo fra composti in cui un ossidrile fosse sostituito ad un atomo di idrogeno legato all'azoto, cioè per esempio fra derivati di ammonio e di ossiammonio. Come ebbi già a far notare nel mio già citato lavoro riassuntivo (pagg. 39, 40) fra le forme cristalline dei solfati d'ammonio e di idrossilammina esistono alcune relazioni morfotropiche; tali relazioni è facilmente prevedibile che possano accrescersi col crescere della grandezza delle molecole fino a dar luogo ad un vero e proprio isomorfismo. Infatti Meyeringh [1] trovò che l'idrossilammina dà coi solfati di alluminio e di cromo dei veri e proprî allumi. Questo autore non si curò tuttavia di verificare se tali allumi possano cristallizzare assieme coi comuni allumi di ammonio e di potassio.

Io ho eseguito talune esperienze a questo riguardo con risultato pienamente affermativo. Immergendo cristalli di allume cromoammonico e cromo-potassico in una soluzione dell'allume di alluminio e idrossilammina, quest'ultimo vi cresce attorno quantunque abbastanza lentamente. Da soluzioni miste di allume di idrossilammina con allume ordinario, e con allume d'alluminio e d'ammonio, mi riuscì inoltre di preparare cristalli misti omogenei della solita forma ottaedrica.

Meyeringh riferisce anche di aver preparato un solfato doppio di idrossilammina e di magnesio della formola $MgSO_4 . (NH_3 OH)_2 SO_4 . 6H_2O$. Nell'intento di vedere se questo sale fosse isomorfo coi solfati doppî della serie magnesiaca ne tentai la preparazione in diverse condizioni, ma invano. Dalle soluzioni miste ottenni sempre i due componenti separati. Esperimentai pure su soluzioni miste di solfato d'idrossilammina con solfato di nickel e di cobalto, ma anche qui ottenni sempre accanto ai cristalli colorati di questi ultimi sali, quelli incolori del sale d'idrossilammina. Non intendo però di escludere la possibilità della formazione di tali sali doppî, al quale proposito eseguirò esperienze sistematiche ed esaurienti.

Era ora naturale il ricercare se anche i composti organici della idrossilammina possano dare soluzioni solide coi corrispondenti derivati della ammonica. A tale scopo impiegai la p-tolilidrossilammina e la α-naftilidrossilammina [2] sciogliendole rispettivamente in p-toluidina ed in α-naftilammina.

[1] Berichte X, 1946.

[2] Queste due sostanze mi vennero gentilmente fornite rispettivamente dall'illustre professor Bamberger di Zurigo e dal dottor L. Wacker di Monaco, a cui esprimo qui i più vivi ringraziamenti.

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare.
p-tolilidrossilammina in p-toluidina (K = 53)		
	°	$C_7H_9ON = 123$
1,059	0,40	140
2,148	0,83	137
3,139	1,235	135
α-naftilidrossilammina in α-naftilammina (K = 79)		
	°	$C_{10}H_9ON = 159$
0,754	0,41	184
1,524	0,67	180

Come si vede vi ha una anomalia abbastanza spiccata, per quanto non molto rilevante.

II. *Serie 2ª e 3ª*: H, OH, NH_2. — Oltre ai composti ossidrilati, anche i composti ciclici, che contengono un gruppo amminico al posto di un atomo d'idrogeno del nucleo, dànno coi corpi da cui prendono origine soluzioni solide, per quanto in misura più limitata dei primi. Io espressi quindi l'opinione (loco citato pag. 42) che i corrispondenti composti ossidrilati ed ammidati dovessero in genere cristallizzare assieme fra loro. Ciò era stato constatato finora da Muthmann [1] per le miscele degli eteri tetraetilici degli acidi p-diossi- e p-diamminopiromellitici.

Io sperimentai anzitutto su miscele di p-cresolo e p-toluidina usando il primo come solvente (K = 75,5).

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare.
	°	$C_7H_9N = 107$
1,186	0,78	113
2,225	1,41	119
3,339	2,09	121

La anomalia, se esiste, è quindi in ogni modo debolissima. Era però prevedibile che essa dovesse manifestarsi più spiccatamente ed in misura più elevata usando miscele di composti a peso molecolare maggiore, conformemente a quanto venne finora sempre osservato. Come tali, scelsi le miscele di α-naftolo in α-naftilammina e di s-tribromoanilina in s-tribromofenolo. Siccome la costante di depressione molecolare di questo ultimo corpo non era nota, io la determinai approssimativamente disciogliendovi come sostanze normali il difenile e la naftalina, ed ottenni come valore medio K = 204. Il tribromofenolo simmetrico è dunque il composto organico che possiede la

[1] Zeitschr. für Kristallographie *19*. 357.

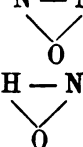
costante numericamente più alta constatata finora. È un ottimo solvente che permette di eseguire letture della massima precisione.

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare.
	α-naftolo in α-naftilammina (K = 79)	
		$C_{10}H_8O = 144$
0,775	0°,23	266
1,028	0,32	254
2,271	0,69	260
3,171	0,92	272
	s-tribromoanilina in s-tribromofenolo (K = 204)	
		$C_6H_5Br_3N = 331$
1,054	0°,23	935
2,152	0,49	896
3,074	0,71	883
4,093	0,95	879

Come si era previsto, l'anomalia è fortissima; si può quindi dire che i composti ossidrilati cristallizzano in genere assieme ai corrispondenti composti ammidati.

III. *Serie 5ª*: $CH \equiv , N \equiv$. — Il gruppo metinico è nei composti ciclici sempre isomorfogeno coll'atomo d'azoto. Esso lo è inoltre spesso anche quando si trova in catena aperta, come venne provato da Muthmann [1] per i sali degli acidi metandisolfonico ed imidodisolfonico e da me per la serie dei tre composti: *stilbene* $C_6H_5 . CH = CH . C_6H_5$; *benzilidenanilina* $C_6H_5 . CH = N . C_6H_5$; *azobenzolo* $C_6H_5 . N = N . C_6H_5$.

Una relazione perfettamente analoga a quella che esiste fra gli ultimi composti è quella che presentano fra loro l'*azossibenzolo* $C_6H_5 ; N — N . C_6H_5$ (con O a ponte fra i due N)

ed il cosidetto etere n-fenilico della benzaldossima $C_6H_5 . CH — N . C_6H_5$ (con O a ponte fra C e N);

Usai l'azossibenzolo come solvente, e siccome la costante non ne era nota, la determinai sciogliendovi come sostanze normali il difenile, il dibenzile e la naftalina; come valore medio ottenni K = 85. Coll'etere n-fenilico della benzaldossima ottenni il risultato seguente:

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare.
		$C_{13}H_{11}ON = 197$
1,082	0°,18	511
2,079	0,34	520
3,113	0,48	550

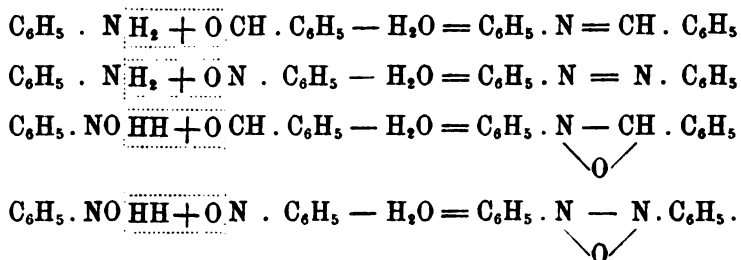
[1] Berichte *31*. 1880.

Come si vede l'anomalia è fortissima e dello stesso grado all' incirca di quella presentata dalla benzilidenanilina sciolta nell'azobenzolo. Considerando ora le formole di queste coppie di composti, si vede che i loro componenti differiscono in ciò che sono prodotti di condensazione gli uni della benzaldeide, gli altri del nitrosobenzolo colla anilina e colla fenilidrossilammina.

$$C_6H_5 . NH_2 + OCH . C_6H_5 - H_2O = C_6H_5 . N = CH . C_6H_5$$

$$C_6H_5 . NH_2 + ON . C_6H_5 - H_2O = C_6H_5 . N = N . C_6H_5$$

$$C_6H_5 . NOHH + OCH . C_6H_5 - H_2O = C_6H_5 . \underset{\diagdown O \diagup}{N - CH} . C_6H_5$$

$$C_6H_5 . NOHH + ON . C_6H_5 - H_2O = C_6H_5 . \underset{\diagdown O \diagup}{N - N} . C_6H_5 .$$

Si presentava ora naturale la questione se anche i loro composti primitivi, cioè i derivati nitrosilici ed aldeidici, posseggano la proprietà di cristallizzare assieme, ciò che starebbe in parallelo colle analogie nel comportamento chimico di quelle due serie di corpi che vennero rilevate da varî autori e segnatamente da A. Angeli. Ora siccome nè il nitrosobenzolo, nè la benzaldeide e nemmeno i loro omologhi immediatamente superiori si prestano ad esperienze crioscopiche, dovetti ricorrere, per verificare questo fatto, a composti più complessi e cioè agli eteri etilici degli acidi ftalaldeidico ed o-nitrosobenzoico $C_6H_6 < \begin{matrix} CHO \\ COO_2CH_5 \end{matrix}$ e $C_6H_4 < \begin{matrix} NO \\ COOC_2H_5 \end{matrix}$.

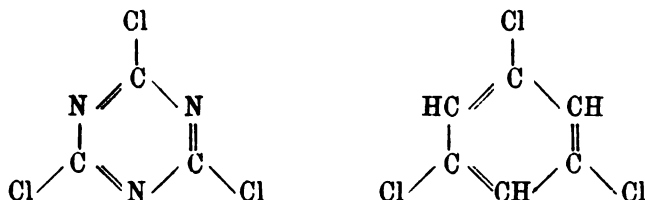
Si usò come solvente il primo dei due; ne fu determinata anzitutto la costante impiegando come corpi normali, il difenile, la naftalina ed il dibenzile; come valore medio si ottenne K = 60,5. Coll' etere dell'acido o-nitrosobenzoico ebbi i risultati seguenti:

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare.
	°	$C_9H_9O_3N = 179$
1,607	0,38	224
2,630	0,67	243
4,013	0,93	261

L'anomalia è quindi spiccatissima e conclude quindi alla formazione di soluzione solida.

Voglio qui riferire anche un' esperienza che fu eseguita allo scopo di vedere se si potesse portare una conferma all' ipotesi della struttura ciclica che viene generalmente ammessa per i derivati cianurici. Se questa è esatta, poteva per esempio pensarsi che il cloruro di tricianogeno desse cristalli misti

col triclorobenzolo simmetrico:

$$\begin{array}{ccc} & Cl & \\ & | & \\ & C & \\ N \diagup\!\!\!\diagup & & \diagdown N \\ | & & \| \\ Cl-C & \diagdown\!\!\!\diagdown N \diagup & C-Cl \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & Cl & \\ & | & \\ & C & \\ HC \diagup\!\!\!\diagup & & \diagdown CH \\ | & & \| \\ Cl-C & \diagdown\!\!\!\diagdown CH \diagup & C-Cl \end{array}$$

Si usò quest' ultimo corpo come solvente, e se ne determinò la costante sciogliendovi il difenile e l' etere dimetilico dell' idrochinone, ottenendo così un valore medio $K = 87$.

Col cloruro di tricianogeno si ebbero valori perfettamente concordanti coi teorici.

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare
	°	$C_3N_3Cl_3 = 184,5$
0,827	0,39	184,4
1,665	0,78	185,7
2,504	1,16	188,0

Non vi è quindi traccia di formazione di soluzione solida. Sarebbe però azzardato il voler trarre conclusioni sulla costituzione dei derivati cianurici da tali risultati negativi.

IV. *Serie 7ª*: $-CH_2-CH_2-$, $-CH=CH-$, $-C\equiv C-$. Le regole intorno alla formazione di cristalli misti fra composti a legami semplici e doppî in catena aperta, furono già date da Garelli e Calzolari (1) e da me e Gorni (2). Per ciò che riguarda i composti a tripli legami era nota finora una sola osservazione fatta da Boeris (3), che il tolano è isomorfo collo stilbene e col dibenzile. Mi sembra però non inutile verificare la formazione di soluzione solida fra composti acetilenici ed i corrispondenti derivati a legame semplice e doppio. A tale scopo vennero eseguite esperienze sciogliendo anzitutto l' etere dimetilico dell'acido acetilendicarbonico nel corrispondente etere dell'acido succinico.

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare.
	°	$C_6H_6O_4 = 142$
0,802	0,25	178
1,823	0,56	181
3,102	0,98	178
4,892	1,46	187

(1) Gazz. chim. ital. 1899, II, 263.
(2) Ibidem, 1900, I, 80; II, 127.
(3) Questi Rendiconti 1900, I, 382.

L'anomalia è assai spiccata, e più notevole ancora è quella che si trova nelle soluzioni di acido fenilpropiolico nell'acido fenilpropionico.

		$C_9H_6O_2 = 146$
1,147	0°,36	285
1,666	0,49	304
2,637	0,845	286

Fu quindi eseguita una serie di esperienze sciogliendo l'etere metilico dell'acido fenilpropiolico nel corrispondente etere dell'acido cinnamico ordinario; la costante di questo corpo fu trovata mediante l'impiego del difenile e dell'etere dimetilico dell'idrochinone come corpi normali ed è $K = 71$. Coll'etere fenilpropiolico si ottennero i numeri seguenti, da cui risulta la formazione di soluzione solida.

		$C_{10}H_8O_2 = 160$
0,975	0°,28	247
2,971	0,84	253
6,399	1,78	255

Si può quindi concludere che i composti acetilenici cristallizzano assieme ai rispettivi composti saturi ed alle forme fumaroidi dei derivati etilenici.

V. — Io ho rivolto infine la mia attenzione a vedere se fosse possibile di riprodurre fra composti organici quelle interessanti relazioni di isomorfismo e di formazione di cristalli misti che si hanno quando uno o due atomi di flouro sostituiscono un atomo di ossigeno, e quando un atomo di flouro o di cloro sostituisce un ossidrile. Esempî di questa natura non sono rari fra composti inorganici. Pel primo caso ricorderemo l'isomorfismo constatato da Mauro e Scacchi [1] fra fluoossimolibdati $MO_2Fl_2 . 2KFl . H_2O$, ipofluoossimolibdati $MOFl_3 . 2KFl . H_2O$, fluotitanati $TiFl_4 . 2KFl . H_2O$ e tutta una serie di altri sali doppî analoghi; accenneremo inoltre che gli iodati alcalini KIO_3 ed i fluoiodati KIO_2Fl_2 recentemente scoperti da Weinland, sono cristallograficamente isomorfi. Pel secondo caso richiameremo l'interessante isomorfismo fra Wagnerite $Mg(MgFl)PO_4$ e Triploidite $Mn(MnOH)AsO_4$; è poi noto che in numerosissimi fosfati e silicati basici naturali (Apatite, topazio ecc.), gli ossidrili sono sostituiti in una proporzione variabile da atomi di fluoro e di cloro o viceversa.

Perciò che riguarda il primo caso non era facile di trovare coppie di sostanze organiche accessibili alle misure crioscopiche e che presentassero le suaccennate relazioni di struttura; un esempio conveniente venne da me realiz-

[1] Atti Accad. Napoli, 1 marzo 1890.

zato colle miscele di cloruro di ftalile a cui, come è ben noto, spetta la formola ciclica $C_6 H_4<\genfrac{}{}{0pt}{}{C\,Cl_2}{CO}>O$ e di anidride ftalica $C_6 H_4<\genfrac{}{}{0pt}{}{CO}{CO}>O$. Fu impiegato come solvente il cloruro di ftalile che, secondo le mie osservazioni, gela a $+12°$ e la cui costante fu trovata $K = 98,5$ sciogliendovi come corpi indifferenti il difenile e la naftalina. L'anidride ftalica si palesò fortemente anormale dando abbassamenti quattro volte più piccoli dei normali.

Concentrazioni.	Abbassamenti termometrici.	Peso molecolare.
		$C_8H_4O_3 = 148$
1,652	0°,29	570
3,217	0,58	555

Per ciò che riguarda la sostituzione degli ossidrili agli atomi di alogeni e viceversa, esiste un lavoro di G. Fels ([1]), il quale constata che fra composti che così si corrispondano non sussistono in genere analogie di forma cristallina. Una eccezione formano l'idrochinone ed i derivati p-bialogeno sostituiti del benzolo, che hanno relazioni morfotropiche abbastanza strette. Io esperimentai quindi anzitutto sulle miscele di due di queste sostanze (idrochinone e p-biclorobenzolo); potei però constatare non trattarsi di vero isomorfismo. Invero l'idrochinone non si scioglie affatto o quasi nel p-biclorobenzolo, ma potei osservare ripetutamente che i cristalli di idrochinone presenti al fondo, non hanno alcuna azione nel determinare la cessazione dello stato di soprafusione in cui si trova il solvente.

Un caso di isomorfismo trovai invece fra composti in cui gli atomi a gruppi isomorfogeni non formano una parte rilevante della molecola come nell'esempio precedente. Infatti il β-naftolo disciolto nella β-cloronaftalina ne innalza il punto di congelamento.

Queste esperienze provano ad ogni modo che queste interessanti relazioni possono ritrovarsi anche fra corpi organici; esse dovranno però essere continuate e completate.

([1]) Zeitschr. f. Krystall. XXXII, 359,

Patologia. — *L'avvelenamento per stricnina e i sieri ematici.* Nota I del dott. D. Lo Monaco, presentata dal Socio Luciani.

Gli studî sull'immunità contro gli agenti patogeni, e quelli ancora più numerosi sulle leggi che la regolano, hanno da molto tempo incoraggiato gli sperimentatori a fare dei tentativi allo scopo d'indagare se con i medesimi metodi si riusciva a rendere immuni gli animali contro le sostanze tossiche sia organiche che inorganiche. Due fatti servivano di guida nell'intraprendere questi tentativi: la notizia farmacologica che non tutti gli organismi reagiscono egualmente colla stessa intensità a una data sostanza tossica, in modo che alcuni animali pare che godano di un'immunità naturale contro alcuni veleni; e la possibilità per certi organismi di assuefarsi all'ingestione di quantità mortali di alcaloidi o di sali metallici (es. arseniofagi, fumatori di oppio, ecc.).

Di quest'ultimo mezzo si servì Ehrlich [1] essendo riuscito, colla somministrazione graduale e prolungata di abrina o di ricina, non solo a rendere innocue per gli animali su cui sperimentava, dosi mortali di queste sostanze, ma a dimostrare che il siero di questi animali trattati per lungo tempo con abrina o ricina, iniettato ad animali normali, metteva questi in condizione di sopportare grandi quantità dei su nominati veleni. In conseguenza questo illustre autore, ammise che nel siero degli animali trattati si era prodotta un'antitossina che fu da lui chiamata antiricina.

Con simili procedimenti Kaufmann e altri resero refrattarî gli animali al veleno della vipera, Fraser a quello di diversi serpenti, e Rummo asserisce di aver fatto superare dosi molto forti di stricnina ad alcune cavie, le quali così trattate presentavano una grande resistenza all'iniezione di culture di tetano che riuscivano letali agli animali di controllo.

Sul primo criterio invece si basano le interessanti ricerche di Giacosa e del suo allievo Robecchi. Giacosa [2] si propose di dimostrare se il sangue degli animali refrattarî a un dato veleno, fosse capace, iniettato ad animali molto sensibili a questo, di aumentarne la resistenza. Egli prese dei polli come animali poco sensibili alla stricnina, e iniettò il loro siero a topi, cavie e conigli che poi avvelenava con questo alcaloide. I risultati furono negativi, poichè mai Giacosa potè riconoscere una qualsiasi influenza del siero di pollo sull'intensità e sull'arresto dell'accesso stricnico. Robecchi [3] ripetè e com-

[1] Deut. med. Woch., vol. 32, 1891.
[2] Giornale della R. Acc. di Medicina di Torino, 1891.
[3] Giornale della R. Acc. di Medicina di Torino, 1895.

pletò queste ricerche. Egli confermò che il siero di sangue di pollo non ha alcuna influenza sugli esiti, sul decorso e sulla durata dell'avvelenamento stricnico, sia che l'iniezione venga fatta appena scoppiati i fenomeni tossici, sia immediatamente o qualche tempo prima della iniezione della stricnina. Anche iniettando per più giorni di seguito, siero di pollo in cavie e topi bianchi, mai questi animali sopportarono la minima dose mortale di stricnina.

In un'altra serie di esperienze Robecchi tentò inutilmente di riconfermare i risultati ottenuti da Rummo, e non riuscì, somministrando dosi piccolissime di stricnina che andava crescendo in minima proporzione di giorno in giorno, a tenere in vita gli animali avvelenati. Anzi invece di avere fenomeni di abitudine al veleno, osservò sempre quelli altri ben descritti da Aducco (1) sotto il titolo di *azione successiva dei veleni*.

Da questo breve riassunto risulta che tranne per l'abrina e per la ricina, nessuno è riuscito a rendere immuni gli animali a un dato avvelenamento per sostanza organica od inorganica. Nel caso speciale della stricnina, quantunque siano noti i buoni effetti che si possono avere in questo avvelenamento dall'uso del curaro, dell'etere, cloroformio, cloralio, paraldeide, bromuri ecc., pure nessuno oserebbe innalzare queste sostanze al grado di antidoti contro tale intossicazione. Solamente Lusini (2) vide quasi sempre sopravvivere i conigli da lui avvelenati con la dose minima mortale di stricnina (0,6 mgr. per kilo), quando ad essi antecedentemente o poco dopo della sostanza alcaloidea, aveva iniettato del siero antitetanico (Tizzoni, Behring e Roux). A simili risultati erano del pari arrivati Centanni e Bruschettini (3) sin dal 1895 col loro polivaccino. Iniettando questo liquido per più giorni di seguito a due conigli, Centanni e Bruschettini notarono che questi animali superarono l'avvelenamento per una dose di stricnina che, a dedurla da quella iniettata, qualunque sia stato il peso dell'animale, doveva di molto superare quella minima mortale.

Il siero antitetanico e il polivaccino di Centanni e Bruschettini, di cui ignoriamo la composizione, ma che certamente non ha niente di comune con quella del primo, mentre riescono a dare effetti eguali nell'avvelenamento per stricnina, pure il loro modo di agire è ritenuto da Lusini e da Centanni del tutto diverso. — È vero che il primo di questi autori otteneva la sopravvivenza dell'animale con una sola iniezione di siero antitetanico, mentre il secondo vaccinò i conigli per moltissimi giorni; ma ciò secondo noi non deve, come dimostreremo, che portare una differenza nel grado ma non nella qualità dell'azione del siero. — Riservandoci quindi di riferire e di discutere le teorie emesse da Centanni e da Lusini alla fine del lavoro, diremo che le

(1) Atti della R. Acc. dei fisiocritici di Siena, 1893.
(2) Rif. Medica, agosto 1897, e Arch. di Farm. e Terapeutica, agosto 1900.
(3) Rif. Medica, 1895, vol. II, pag. 290 e 303.

esperienze di questi autori e quelle di Robecchi ci hanno invogliato a studiare se, iniettando per più giorni ai conigli siero di erbivori di specie diversa, ma al pari di loro sensibili alla stricnina, si riusciva a farli resistere alla dose minima mortale del potente alcaloide. Adoperando poi invece di sieri normali eterogenei, sieri antitossici i più disparati, era interessante ricercare se una sola iniezione di essi permetteva la tolleranza della minima dose mortale di stricnina al pari del siero antitetanico, e se con iniezioni quotidiane ripetute di essi si poteva impunemente superare la dose minima mortale.

Prima d'iniziare le nostre esperienze ci siamo assicurati, sacrificando parecchi conigli, che la dose di 0,6 mgr. di nitrato di stricnina per kilo di coniglio, corrisponde alla dose minima mortale come da molti sperimentatori è stato ammesso.

Dopo abbiamo in una seconda serie di esperienze, constatato che, iniettando a conigli normali, nella quantità di 1 cc. al giorno e per molti giorni di seguito, siero di altro coniglio normale; non si evita a questi animali la morte, quando a loro s'inietta la dose minima mortale di stricnina.

Da queste esperienze, le quali provano ancora l'esattezza della dose minima mortale calcolata a 0,6 mgr. per kilo di coniglio, possiamo conchiudere che il siero omogeneo non è adatto ad esaltare la resistenza dei conigli all'azione della stricnina.

Come sieri da iniezione eterogenei abbiamo usato quelli di cavallo e di bue. — Col siero di sangue di cavallo abbiamo trattato 20 conigli ottenendo risultati che se non sono molto costanti, pure non lasciano dubbio che si può con questo siero, come si desume dall'esame del quadro I, far sopravvivere i conigli avvelenati con la dose minima mortale di stricnina.

QUADRO I.

Conigli trattati con siero di sangue di cavallo.

Numero progressivo	Peso del coniglio	Numero delle iniezioni	Quantità di stricnina iniettata per ogni kgr. di coniglio	Esito dell'avvelenamento	Numero progressivo	Peso del coniglio	Numero delle iniezioni	Quantità di stricnina iniettata per ogni kgr. di coniglio	Esito dell'avvelenamento
1	900	3	mgr. 0,6	morte	11	1000	8	mgr. 0,6	morte
2	850	3	"	"	12	900	8	"	"
3	1000	4	"	"	13	300	8	"	"
4	900	4	"	"	14	900	9	"	sopravvivenza
5	700	4	"	sopravvivenza	15	900	10	"	morte
6	800	5	"	"	16	800	10	"	"
7	750	5	"	"	17	650	10	"	sopravvivenza
8	900	6	"	morte	18	900	12	"	morte
9	830	6	"	"	19	1090	12	"	"
10	905	7	"	"	20	320	12	"	"

La mancata costanza nei risultati ottenuti col siero di cavallo, non si osservò più quando trattammo i conigli col siero di bue, facendo una serie di esperienze molto completa. — Noi vedemmo che dopo 1-2-3 iniezioni di siero, i conigli non superano l'avvelenamento della dose minima mortale di stricnina. — Ciò si avvera invece dopo 4-5 iniezioni, ma i risultati allora non sono costanti, quantunque la maggioranza dei conigli sopravviva all'intossicazione.

In questi animali l'accesso tetanico si manifesta sempre, ma esso sopravviene con ritardo, è più breve e non lascia molto abbattuto il coniglio. Questo sopporta accessi successivi i quali si fanno sempre meno intensi e dopo circa due ore dall'iniezione di stricnina ricomincia a mangiare non mostrando che iperestesia agli eccitamenti cutanei, e lievi disturbi nella deambulazione. Coll'aumentare della durata della cura preparatoria, che è stata estesa fino a 12 giornate, la resistenza dei conigli alla stricnina diventa costante, e diminuiscono i fenomeni tossici. In quelli che hanno ricevuto per lo meno 10 iniezioni di siero, l'accesso tetanico è unico, poco intenso e di breve durata. Continuando ad iniettare siero ai conigli che già avevano superato l'avvelenamento, si potevano dopo qualche giorno riavvelenare senza vederli morire, mentre la morte avveniva se il trattamento del siero era stato da più giorni sospeso.

Da questa serie di esperienze si trae la conseguenza, che il trattamento con siero di bue riduce a semplicemente tossica la dose minima mortale di stricnina uguale a mgr. 0,6 per kilo di coniglio.

Era interessante pure dimostrare se nei conigli trattati con siero di bue si potevano iniettare quantità di stricnina superiori a quelli corrispondenti alla dose minima mortale. L'unica esperienza fatta, segnata al n. 39 del quadro II ci diede risultati negativi, e dopo ciò credemmo conveniente di non insistervi. Riteniamo in conseguenza che l'esaltamento della resistenza dei conigli trattati con siero di bue all'avvelenamento per stricnina, è limitato alla dose minima mortale.

Per completare questa prima parte di ricerche, a nostro modo di vedere, occorreva studiare, se il siero di coniglio precedentemente trattato con dosi ripetute di siero di bue, iniettato ad altro coniglio normale per più giorni, rendesse questo refrattario alla dose minima mortale di stricnina. Su questa quistione non possiamo registrare che i risultati positivi di una sola esperienza. — Il coniglio in esperienza venne avvelenato con la stricnina dopo 12 iniezioni di siero di coniglio trattato, e sopravvisse. Avremmo dovuto continuare queste esperienze che potrebbero risolvere molte quistioni riguardanti l'immunità per l'avvelenamento stricnico, ma prima abbiamo preferito di eseguire altre ricerche allo scopo già riferito di dimostrare se i sieri antitossici in genere agiscono al pari di quelli antitetanici contro l'avvelenamento per stricnina, e se il trattamento prolungato con sieri antitossici, compresi gli

antitetanici, esalta ancora più la resistenza dei conigli contro l'intossicazione stricnica (1). Tra i sieri antitossici abbiamo adoperato quello antitetanico Tizzoni (gentilmente fornitoci dal prof. Tizzoni), l'antidifterico dell' Istituto di Milano e il vaccino antipestoso preparato dal prof. Gosio.

Quadro II.

Conigli trattati con siero di sangue di bue.

Numero progressivo	Peso del coniglio	Numero delle iniezioni	Quantità di stricnina iniettata per ogni kgr. di coniglio	Esito dell'avvelenamento	Numero progressivo	Peso del coniglio	Numero delle iniezioni	Quantità di stricnina iniettata per ogni kgr. di coniglio	Esito dell'avvelenamento
1	870	1	mgr. 0,6	morte	25	730	6	mgr. 0,6	sopravvivenza
2	700	1	»	»	26	700	6	»	
3	900	1	»	»	27	450	6	»	»
4	600	2	»	»	28	400	7	»	»
5	830	2	»	»	29	300	7	»	»
6	950	2	»	»	30	900	7	»	»
7	580	3	»	»	31	800	7	»	»
8	690	3	»	»	32	430	8	»	»
9	1000	3	»	»	33	500	8	»	»
10	870	4	»	»	34	1000	8	»	»
11	870	4	»	sopravvivenza	55	900	8	»	»
12	1300	4	»	»	36	280	9	»	»
13	1000	4	»	morte	37	900	9	»	»
14	520	4	»	sopravvivenza	38	700	9	»	»
15	790	4	»	»	39	910	9	0,65	morte
16	900	5	»	»	40	850	10	0,6	sopravvivenza
17	500	5	»	»	41	330	10	»	»
18	780	5	»	»	42	280	10	»	»
19	900	5	»	»	43	730	11	»	»
20	850	5	»	»	44	295	11	»	»
21	810	5	»	»	45	900	12	»	»
22	810	6	»	»	46	300	12	»	»
23	900	6	»	»	47	250	12	»	»
24	500	6	»	»	48	1000	12(2)	»	»

Col siero antitetanico di cui disponevamo, abbiamo fatto quattro esperienze. Iniettando sottocutaneamente ma in regioni diverse 1 cc. di siero Tizzoni e subito dopo la quantità di stricnina corrispondente alla dose di 0,6 mgr. per kilo, questo animale ha superato più accessi stricnici, ma è rimasto paraplegico sopravvivendo all'avvelenamento per 4 giorni. — Degli altri tre conigli i quali ricevettero per 5 giorni di seguito 1 cc. di siero antitetanico al giorno, ne sopravvisse uno dei due che ebbero stricnina nella quantità di 0,7 mgr. per kilo; il terzo che ne ricevette in ragione di 0,8 mgr. per kilo morì subito dopo il primo accesso convulsivo.

(1) Qui ci corre l'obbligo di ringraziare lo studente Diodato Bernardo, il quale ci aiutò nell'esecuzione delle esperienze finora citate.

(2) Siero di coniglio trattato con siero di bue.

Col vaccino antipestoso Gosio, la dose minima mortale di stricnina rimase tale in due conigli, ai quali s'iniettò contemporaneamente un cc. di questo liquido. Sopravvisse il coniglio trattato per 5 giorni ed avvelenato con la dose in ragione di 0,7 mgr. per kilo, e morì quello avvelenato con 0,8 mgr. per kilo, pur essendo stato trattato col vaccino nel medesimo modo dell'altro.

Migliori risultati ottenemmo con il siero antidifterico, per mezzo del quale i conigli iniettati una volta superarono la dose di 0,6 mgr. ma non quella di 0,7; e quelli iniettati 5-6 volte superarono quelle di 0,7 e di 0,8 mgr. per kilo di animale, ma non quella di 0.9. — Abbiamo riassunto nel seguente quadro le esperienze con i sieri antitossici.

Quadro III.

Conigli trattati con sieri antitossici.

Numero progressivo	Peso del coniglio	Qualità del siero	Numero delle iniezioni	Quantità di stricnina iniettata per ogni kgr. di coniglio	Esito dell'avvelenamento
1	1085	Siero antitetanico Tizzoni	1	mgr. 0,6	paraplegia
2	1430	»	5	» 0,7	sopravvivenza
3	840	»	5	» 0 7	morte
4	970	»	5	» 0,8	»
5	1000	vaccino antipestoso Gosio	1	» 0,6	»
6	900	»	1	» 0,6	»
7	920	»	5	» 0,7	sopravvivenza
8	1200	»	5	» 0,8	morte
9	1100	siero antidifterico Milano	1	» 0,6	sopravvivenza
10	830	»	1	» 0,6	»
11	960	»	1	» 0,6	»
12	1050	»	1	» 0,7	morte
13	900	»	5	» 0,7	sopravvivenza
14	1800	»	6	» 0,8	»
15	970	»	5	» 0,9	morte

Dalle esperienze riferite risulta che, avvalendoci di metodi simili a quelli di cui si servono ordinariamente i batteriologi per conferire l'immunità agli animali di esperimento, siamo riusciti ad aumentare la resistenza dei conigli all'avvelenamento stricnico. Come abbiamo detto, il metodo da noi adoperato consisteva nel fare ai conigli ripetute iniezioni di siero eterogeneo. Questo

metodo era già prima di noi stato tentato da Giacosa e da Robecchi, le cui esperienze non diedero risultati favorevoli. Essi adoperarono siero di pollo la cui refrattarietà alla stricnina costituiva per loro una condizione favorevole allo scopo delle ricerche che facevano.

Secondo il nostro modo di vedere, la refrattarietà dell'animale al veleno, non deve influire sull'azione antitossica del suo siero. Noi non possiamo dividere i sieri in due classi, e dire che quelli di animali refrattarî al veleno, non sono atti ad aumentare la resistenza degli animali all'intossicazione, mentre viceversa lo sono quelli degli animali sensibili al veleno.

Il fatto che il siero omogeneo non ha alcuna azione come il siero di pollo adoperato da Robecchi, mentre il siero di cavallo agisce in parte, e quello di bue con molta costanza, c'induce a pensare che l'azione antistricnica dipenda dalla potenza che ha il siero di produrre nell'animale iniettato, degli anticorpi o delle antitossine speciali ed adatte a potere fissare una quantità più o meno grande di molecole stricniche. Facendo uso della terminologia di Centanni e di Ehrlich sulla dottrina dell'immunità, possiamo ammettere che con l'iniezione di alcuni sieri normali forse perchè poco attivi o dotati di poca attività, non vengono coperti o solamente in minima parte gli stomiti o ricettatori cellulari sensibili al veleno in modo che questo, quando vien messo in circolo trova modo di spiegare tutta la sua potente azione; mentre con altri sieri si riesce ad ottenere l'effetto utile. A sostegno di quanto abbiamo detto sta il fatto che i sieri antitossici, sieri cioè provenienti da animali già trattati, e quindi capaci di dare un numero stragrande di anticorpi sia specifici che *secondarî* (nome che intendiamo assegnare agli anticorpi che agiscono nel nostro caso contro la stricnina, ma forse dotati di azione anche contro altre sostanze), ci hanno permesso di adoperare impunemente dosi maggiori di quella minima mortale, che non si può superare quando il trattamento vien fatto con siero eterogeneo di animale normale.

Nè diversa spiegazione possiamo dare al fatto che il siero antitetanico e quello antidifterico in piccola dose riescono, iniettati contemporaneamente alla dose minima mortale di stricnina, a far soppravvivere l'animale. Anche qui la differenza di azione deve dipendere con molta probabilità dal numero degli anticorpi *secondarî* formatisi; mentre quelli che si producono con grande rapidità dopo una sola iniezione sono pochi e vincono solamente l'intossicazione data dalla dose di stricnina nel rapporto di mgr. 0,6 per kilo, diventano invece più numerosi e forse anche più resistenti quando le iniezioni sono ripetute, in modo che le dosi corrispondenti al rapporto di mgr. 0,7 e anche di 0,8 per kilo non sono più mortali, ma semplicemente tossiche.

Come abbiamo detto, Lusini per il primo riuscì a curare il tetano stricnico per mezzo del siero antitetanico iniettato contemporaneamente o qualche ora prima del veleno, e spiegò questa azione coll'ammettere che

l'antitossina agisce o in senso antagonistico alla stricnina, su quei centri nervosi che sono influenzati da questo alcaloide, o in senso chimico neutralizzandola. Quest'ultima ipotesi dice Lusini, « suffragata dalla osservazione fatta in vitro, con la quale, aggiungendo a una soluzione di stricnina del siero antitetanico, e ricercando più tardi le reazioni, manca la precipitazione con bicromato di potassa, con alcali caustici ecc. », trova riscontro con le recenti osservazioni di Ehrlich, sul modo di comportarsi dell'abrina e ricina e di altre tossine vegetali contro alcuni veleni animali e tossine batteriche. — In un lavoro posteriore il Lusini ritorna sulla questione e dice: « che i sieri antitetanici non possono prevenire, nè combattere l'avvelenamento stricnico come sieri semplici, ma devesi ritenere che l'azione dipenda dall'antitossina contenuta in essi ».

Non si tratta, continua egli, contraddicendo quanto aveva detto, di una neutralizzazione chimica della stricnina per azione dell'antitossina, ma di un'azione esercitata sugli elementi dei centri nervosi spinali, che, eccitati dalla stricnina producono le convulsioni, mentre sotto l'azione dei sieri antitetanici queste o non si producono o cessano del tutto. Egli così subordina l'azione immunizzante dei sieri antitetanici a fatti di ordine essenzialmente cellulari e non di chimica neutralizzazione.

Evidentemente il Lusini è stato incoraggiato ad ammettere questa teoria dal fatto, che egli otteneva l'aumento della resistenza all'avvelenamento stricnico, per mezzo di sieri antitetanici; e per lui tra sieri antitetanici e stricnina doveva esservi uno stretto rapporto. — Poichè la stricnina agisce su elementi nervosi, che da essa eccitati producono convulsioni molto simili a quelle tetaniche, e poichè il siero antitetanico giova in questa infezione, ne doveva scaturire la conseguenza che la sede di azione del tetano fosse negli stessi elementi nervosi che vengono attaccati dalla stricnina. Di conseguenza il siero antitetanico, agendo sul tetano doveva agire pure sulla stricnina, e quindi, aggiungiamo noi, su tutte le sostanze convulsivanti.

Noi non possiamo ammettere questa teoria, poichè i risultati ottenuti da Lusini col siero antitetanico, sono stati da noi confermati facendo uso del siero di cavallo, del siero di bue, del vaccino antipestoso e del siero antidifterico. E nessuno vorrà sostenere che questi liquidi hanno azione sul bacillo di Nicolayer o sulle cellule nervose invase dal tetano.

La spiegazione deve necessariamante essere diversa, e deve scaturire da quanto finora si conosce sull'azione dei sieri eterogenei e dei sieri antitossici.

È noto che per avere un siero antispermatossico occorre iniettare liquido spermatico, come per avere un siero emolitico, occorre iniettare del siero o del sangue eterogeneo e per guarire un difterico occorre iniettare siero antidifterico. — L'azione dei sieri è quindi specifica ed è la sola di cui essi, secondo molti autori, possono disporre. — Altri studî però ora tendono ad ammettere nei sieri azioni secondario; mentre Centanni parecchi anni fa

sosteneva che il suo vaccino agiva egualmente contro molte infezioni e contro molti avvelenamenti, compreso quello per stricnina. Noi accettiamo la teoria di Centanni mitigata nel senso che un siero oltre l'azione predominante specifica, possa ancora spiegarne delle secondarie, e crediamo che o le catene collaterali (anticorpi o *seitenketten* di Ehrlich) provenienti dalle cellule sensibili a un dato veleno, sono, come già abbiamo detto, in massima parte specifiche e in minima parte secondarie; o che la loro specificità non esclude che possono agire contro altri *virus* in essenza di quello per cui furono fabbricati.

Per risolvere questa quistione, abbiamo cominciato ad eseguire altre esperienze, che speriamo di pubblicare al più presto. Altri tentativi si potranno fare con altri sieri e con altri veleni; intanto dalle ricerche riferite possiamo dedurre che i sieri antitossici, con molta probabilità non agiscono contro l'avvelenamento per stricnina a seconda della quantità di unità immunizzanti che contengono. Fra quelli che abbiamo provato il più attivo si è dimostrato il siero antidifterico, e ci auguriamo che esso possa ricevere dalla Clinica l'applicazione pratica.

PERSONALE ACCADEMICO

All'Accademia pervenne la dolorosa notizia della morte del Socio nazionale prof. Adolfo Targioni-Tozzetti, mancato ai vivi il 18 settembre 1902; faceva parte il defunto dell'Accademia sino dal 14 luglio 1888.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 5 ottobre 1902.

Geometria. — *Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali.* Nota del dott. A. Bindoni, presentata dal Socio G. Veronese.

1. È noto come il prof. Veronese nei suoi *Fondamenti di Geometria* abbia, per primo, costruita una geometria non-archimedea e un conseguente campo di numeri infiniti ed infinitesimi attuali. Ora la questione dell'indipendenza del postulato d'Archimede venne ripresa recentemente dall'Hilbert nei suoi G. d. G., e risolta con un procedimento davvero elegante. Hilbert pone le basi di una geometria non-archimedea, servendosi di un campo di numeri infiniti ed infinitesimi definito da un algoritmo assai semplice. Per chi non conoscesse il lavoro di Hilbert riportiamo le frasi che si riferiscono all'argomento, dalla traduzione francese di L. Langel:

« . . . . . construisons le domaine $\Omega(t)$ de toutes les fonctions algébriques de t, qui proviennent de t au moyen des quatre opérations: addition, soustraction, multiplication, division, et de la cinquième opération $\sqrt{1+\omega^2}$, òu ω désigne une fonction quelconque, déjà obtenue au moyen de ces cinq opérations.

. . . .

« Nous regarderons maintenant les fonctions du domaine $\Omega(t)$ comme une certaine espèce de nombres complexes; dans le système numérique ainsi défini, il est clair que les règles usuelles de calcul sont toutes vérifiées. Enfin a, b désignant deux nombres différents quelconques de ce système, nous dirons que le nombre a est plus grand ou plus petit que b — ce qui

s'écrira $a > b$ ou $a < b$ — suivant que la différence $c = a - b$, regardée comme fonction de t prend pour des valeurs, suffisamment grandes de t une valeur ou bien toujours positive ou bien toujours négative. En adoptant cette convention, il est possible de ranger par ordre de grandeur les nombres de notre système numérique complexe, suivant une distribution analogue à celle que l'on emploie pour les nombres réels; on reconnait aisément aussi que les théorèmes qui consistent à dire que les inégalités subsistent, lorsque à chacun de leurs membres on ajoute un même nombre ou lorsqu'on y multiplie chaque nombre par un même nombre > 0, sont également vérifiés dans notre système numérique complexe. Maintenant, si l'on désigne par n un nombre entier positif rationnel quelconque, il est clair que pour les deux nombres n e t du domaine $\Omega(t)$ l'inégalité $n < t$ sera vérifiée, car la différence $n - t$ regardée comme fonction de t sera toujours négative pour des valeurs positives de t suffisamment grandes. Nous exprimerons ce fait comme il suit: Les deux nombres 1 et t du domaine $\Omega(t)$, qui tous deux sont > 0, jouissent de la propriété qu'un multiple quelconque du premier sera toujours plus petit que le second de ces nombres ».

Però il prof. Hilbert, sebbene dichiari essergli noto che la stessa questione fu trattata precedentemente dal prof. Veronese, non s'intrattiene in un confronto tra la sua geometria e quella di Veronese; e poichè un tale confronto mette in chiaro una stretta relazione tra le due teorie, non crediamo inutile l'occuparcene nella presente Nota riservandoci di trattarne con maggiori particolari in un'altra pubblicazione. Sarà opportuno per ciò il prender le mosse dalla costruzione di un campo numerico più ampio del campo $\Omega(t)$, servendoci del procedimento dello stesso Hilbert, però alquanto generalizzato.

2. Volendo entrar subito in argomento, consideriamo il campo degli elementi definiti dalla seguente espressione nella lettera x:

$$\frac{a_1 x^{\omega_n} + a_2 x^{\omega_{n-1}} + \cdots + a_n x^{\omega_1}}{b_1 x^{\omega'_m} + b_2 x^{\omega'_{m-1}} + \cdots + b_m x^{\omega'_1}}$$

nella quale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sono numeri reali; $\omega_n \ldots \omega_1$, $\omega'_m \ldots \omega'_1$ od anche espressioni ottenute precedentemente dalla espressione data.

Indichiamo con $\Gamma(x)$ il campo di elementi (numeri) così definiti.

Poichè è facile persuadersi che, le considerazioni e le definizioni fatte dal sig. Hilbert, possono trasportarsi immediatamente al nostro campo, potremo enunciare le seguenti proprietà fondamentali del campo $\Gamma(x)$:

a) Il campo $\Gamma(x)$ è ordinabile,

b) costituisce un corpo rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione,

c) e valgono per queste le proprietà fondamentali del calcolo algebrico.

d) Inoltre adoperando note denominazioni, nel campo $\Gamma(x)$ esistono elementi che hanno il carattere di infiniti ed infinitesimi attuali rispetto ai numeri reali, che evidentemente sono contenuti nel campo $\Gamma(x)$. Basta infatti confrontare fra loro, secondo il criterio ordinativo del sig. Hilbert, gli elementi x^{-x}, x^{-n}, x^{-1}, a, x, x^n, x^x.

3. Ora da questo campo di numeri si può dedurre quello dei numeri infiniti e infinitesimi del prof. Veronese. Consideriamo infatti la espressione, che si ottiene dalla nostra supponendovi: $a_1, a_2, \dots, a_n$ interi, e di più a_1 positivo; $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 0$, $b_m = 1$; $\omega_1' = 0$; $\omega_n, \omega_{n-1}, \dots \omega_1$ interi e positivi (ω_1 anche zero) e disposti in ordine decrescente, oppure espressioni ottenute precedentemente da quella ora definita, e così via.

È ovvio che la espressione così ottenuta equivale al simbolo Z del prof. Veronese pei numeri interi e positivi finiti e infiniti di ordine finito ed infinito; anzi, posto in essa

$$ax^{\omega} \equiv a\, \infty_1^{\omega},$$

si trasforma identicamente in esso. Risulta immediatamente che, questo campo, quando anche si affettino i suoi elementi dei segni $+$ e $-$ colle solite convenzioni, costituisce un corpo rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione, e che queste operazioni godono delle proprietà fondamentali del calcolo algebrico.

Ancora: il campo, i cui elementi sono definiti dalla nostra espressione quando i suoi termini sono elementi del campo ora considerato equivale al campo dei numeri frazionari positivi e negativi del prof. Veronese; ed è facile persuadersi che esso costituisce un corpo rispetto alle quattro operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, e che per queste operazioni valgono le proprietà fondamentali del calcolo algebrico.

Volendo ottenere dal nostro campo $\Gamma(x)$ un campo equivalente al continuo relativo all'unità fondamentale del prof. Veronese, pel quale cioè valgano le ipotesi I-VI, basterà supporre nella nostra espressione $a_1, a_2, \dots a_n$ numeri reali; $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-} = 0$; $b_m = 1$; $\omega_1' = 0$; $\omega_n, \omega_{n-1}, \dots \omega_1$ espressioni equivalenti al simbolo Z, sopra nominato.

Si otterrà infine un campo numerico che rispecchi il continuo rettilineo dato da tale ipotesi (I-VII) procedendo così: si consideri dapprima il campo numerico definito dalla nostra espressione quando in essa si supponga $a_1, a_2, \dots a_n$ numeri reali; $\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1$ espressioni equivalenti al simbolo Z affetto dai segni $+$ o $-$; $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 0$; $b_m = 1$; $\omega_1' = 0$.

Evidentemente otteniamo così un campo contenuto in quello del prof. Veronese senza però averlo esaurito completamente; occorrerà a tal uopo defi-

nire le ripartizioni in due classi contigue [1] del campo che abbiamo or ora considerato e stabilire che ad ognuna di esse corrisponda uno ed un solo ente. È facile persuadersi che questo campo costituisce un corpo rispetto alle quattro operazioni fondamentali, e che per queste valgono le proprietà del calcolo algebrico.

Infine osservando che l'espressione frazionaria dell'Hilbert, ottenuta mediante le prime quattro operazioni, è in casi particolari un funzionale intero, e che pei funzionali interi è stata svolta una teoria analoga a quella dei numeri primi, concludiamo che i numeri infiniti e infinitesimi corrispondenti del Veronese costituiscono un campo pel quale è già stata fatta una teoria, diremo, dei numeri primi, quella stessa che è stata fatta pei funzionali interi. Ricordiamo anche la relazione tra i funzionali interi e gli ideali di Kummer-Dedekind, la quale ci dà una relazione tra ideali e i particolari numeri del Veronese ai quali abbiamo accennato.

4. Vogliamo ora notare le differenze tra il procedimento del sig. Hilbert ed il nostro, per mostrare con qualche particolare il legame esistente tra il campo numerico di Hilbert e quello di Veronese.

È chiaro anzitutto, che il procedimento del sig. Hilbert dà soltanto un campo di numeri infiniti ed infinitesimi di ordine finito, giacchè egli suppone gli esponenti di x *numeri interi*; mentre il nostro dà un campo di

[1] Per essere un po' più espliciti su questo punto, anche perchè esso fu causa di malintesi, e quindi di critiche errate, diremo di che natura siano le classi contigue, che noi consideriamo.

Dedekind dà una definizione del postulato della continuità sostanzialmente equivalente al seguente:

« Se $(P_1 P_2)$ è una sezione fatta nella retta esiste sempre nella retta stessa un punto P, che non appartiene nè alla classe P_1, nè alla classe P_2; e quindi separa i punti delle due classi, essendo a destra di ogni punto della prima e a sinistra di ogni punto della seconda classe ».

È noto d'altra parte come, ammesso questo postulato, il postulato d'Archimede possa essere dimostrato. Ne segue che ammesso un tal postulato la retta è essenzialmente archimedea, e quindi sono impossibili le ipotesi sui segmenti infiniti ed infinitesimi attuali.

Partiamoci ora invece da quest'altra definizione (Veronese F. G.).

Definiz. « Un segmento cogli estremi variabili in versi apposti (XX′) che diventa più piccolo di ogni segmento dato, diremo che diventa *indefinitamente piccolo* e poniamo il seguente postulato (Veronese F. G.).

« Ogni segmento cogli estremi variabili in versi opposti che diventa indefinitamente piccolo contiene un elemento fuori del campo di variabilità dei suoi elementi ».

Dal confronto dei due diversi postulati del continuo rettilineo si deducono facilmente le seguenti proposizioni:

1ª. Ogni ripartizione dei punti della retta in due classi definite in modo da soddisfare al postulato di Veronese è anche una *sezione.*

2ª. Viceversa una sezione può non soddisfare al postulato di Veronese.

3ª. Rimanendo nel campo finito le due ipotesi si equivalgono, cioè il postulato di Dedekind equivale al postulato di Veronese.

numeri infiniti ed infinitesimi anche di ordine infinito, pel fatto che noi abbiamo supposto gli esponenti di x anche *espressioni*, ottenute precedentemente da quella costruita con esponenti numeri interi (veramente numeri reali, che poi, per ottenere il campo del prof. Veronese, abbiamo supposti interi). Ma il nostro procedimento del n. 3 differisce da quello di Hilbert anche pel fatto che noi non ci serviamo della operazione $\sqrt{1+\omega^2}$; però se ci riferiamo al campo di numeri equivalente a quello di Veronese, che noi abbiamo dedotto dal nostro campo $\Gamma(x)$ particolareggiandolo e introducendo una nuova ipotesi (la corrispondenza di uno ed un unico ente ad ogni ripartizione in due classi contigue del campo equivalente al continuo del prof. Veronese dato dalle ipotesi I-VIII), noi possiamo subito persuaderci che in questo campo tale operazione è possibile. Da queste osservazioni, e da altre facili a farsi, risulta che *il campo di numeri del sig. Hilbert è compreso nel campo di numeri del prof. Veronese* (1).

La circostanza poi che il campo di Hilbert e quello di Veronese costituiscono ambedue un corpo rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed in essi è possibile anche la quinta $\sqrt{1+\omega^2}$ (2), ci permette di affermare pel campo del prof. Veronese ogni risultato ottenuto dal prof. Hilbert pel suo campo a mezzo di questa sola caratteristica di esso. Ora siccome Hilbert, nel suo citato lavoro, dimostra, a mezzo del fatto accennato, che il suo campo di numeri serve alla costruzione di un sistema geometrico nel quale sono verificati tutti i suoi postulati ad eccezione di quello di Archimede (da non confondersi secondo Veronese con quello della continuità) potremo affermare che il *sistema geometrico di Hilbert è compreso in quello di Veronese* (3).

(1) Le espressioni frazionarie di Hilbert che non si possono ottenere colle sole ipotesi I-VII di Veronese si ottengono appunto mediante due classi contigue (ip. VIII).

(2) Si può verificare la possibilità dell'operazione $\sqrt{1+\omega^2}$ nel campo del prof. Veronese, costruendo due classi contigue che definiscono per ciò un elemento corrispondente al numero $\sqrt{1+\omega^2}$.

(3) Vi è solo questa differenza che il prof. Veronese nel suo sistema geometrico non archimedeo ammette la forma sferica Riemanniana ed allora ci dimostra, come fece il prof. Levi-Civita, che in ogni campo infinitesimo rispetto all'unità Riemanniana vale l'ipotesi Euclidea, mentre Hilbert ammette la forma Euclidea. Ma tale forma per ciò che si è detto può essere assunta anche coi numeri di Veronese.

Chimica. — *Sopra alcuni prodotti di condensazione dei pirroli* [1]. Nota di G. PLANCHER, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

È noto da gran tempo che scaldando il pirrolo con acidi minerali diluiti, si ottiene il cosidetto *rosso di pirrolo*, che è una polvere rossa di composizione variabile, che si origina dalla condensazione di più molecole di pirrolo con eliminazione di ammoniaca.

Così pure è noto, che facendo passare acido cloridrico gassoso in una soluzione eterea di pirrolo, dopo alquanto tempo si separa il cloridrato del tripirrolo $(C_4H_5N)_3$ ed è notevole che questo corpo scaldato a 300° si decompone in ammoniaca, pirrolo e indolo [2].

Analogo comportamento si osserva nei pirroli alchilati. Queste condensazioni conducono dai pirroli agli indoli, e Dennstedt recentemente trovò che il pirrolo si può facilmente convertire in indolo a mezzo dell'acido solforico direttamente.

La presenza in natura di tanti corpi che contengono il nucleo pirrolico ci fa certi, che i pirroli sono capaci di condensarsi anche in altre guise e in dipendenza della loro costituzione e dei metodi impiegati. Credetti perciò opportuno intraprendere una ricerca sistematica atta a chiarire questi processi che debbono avere somma importanza per la genesi dei prodotti naturali, alcuni dei quali di sommo interesse, come sembrerebbe, ad esempio, la formazione della urobilina dall'emopirrolo e quella di alcaloidi, delle sostanze coloranti del sangue e dei corpi clorofilliani.

Le ricerche che pubblico sono i primi saggi dei risultati ottenuti.

Esse hanno per punto di partenza lo studio di una reazione già osservata in questo laboratorio.

Zanetti e Cimatti [3] riducendo l'$\alpha.\alpha'$-dimetilpirrolo con polvere di zinco ed acido acetico ottennero, invece della $\alpha.\alpha'$-dimetilpirrolina che si attendevano, una base della composizione $C_{12}H_{17}N$, la quale evidentemente prende origine non da una semplice idrogenazione, ma bensì ancora dalla contemporanea condensazione di due molecole del suddetto pirrolo.

Fu mia prima cura di convalidare la sua composizione, ed infatti facendo passare nella sua soluzione eterea dell'acido iodidrico gassoso ne ottenni un bel iodidrato, che cristallizza dall'alcoool assoluto in prismi incolori, che a 270° non fondono ancora e che all'aria umida diventano

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

[2] Dennstedt e Zimmerman, Ber. deutsch. chem. Gesell. 21, 1478; Dennstedt e Voigtländer, ibid. 27, 476; Dennstedt, ibid. 21, 3429.

[3] Ber. deutsch. chem. Gesell. 30, 1588.

verdicci. La sua composizione corrisponde alla formola $C_{12}H_{17}N . NI$. Questo processo si può spiegare così: dapprima il dimetilpirrolo per azione dell'acetato di zinco si idrolizza e l'acetonilacetone formatosi si condensa con una molecola di dimetilpirrolo ancora inalterato, formando un corpo $C_{12}H_{15}N$, il quale soggiace alla riduzione e dà la base $C_{12}H_{17}N$.

La dimostrazione più diretta di questa ipotesi doveva aversi condensando il dimetilpirrolo simmetrico con acetato di zinco in soluzione acetica. Bollendo infatti per 23 ore il $\alpha . \alpha'$-dimetilpirrolo con acetato di zinco e distillando il prodotto al vapor acqueo previa neutralizzazione, ho ottenuto un corpo cristallino in squamette, ma in quantità troppo piccole per essere studiato, vista anche la sua facile decomponibilità all'aria che lo arrossa rapidamente e lo resinifica.

Coll'α-β'-dimetilpirrolo, invece, questa reazione si compie assai più facilmente. Da esso si forma una base della composizione $C_{12}H_{15}N$.

Si bolle il dimetilpirrolo con acido acetico al 90 % e polvere di zinco a ricadere per tre giorni consecutivi; si decanta il liquido bollente dalla polvere di zinco rimasta inalterata e si distilla l'acido acetico nel vuoto. Il residuo si satura con potassa e si distilla a vapore. Insieme a poco dimetilpirrolo inalterato passa una sostanza che si condensa nella canna del refrigerante e nel raccoglitore. Essa viene raccolta per filtrazione e seccata rapidamente nel vuoto su acido solforico. Cristallizzata ripetutamente dall'alcool assoluto si ha in aghi incolori che fondono a 74°.

L'analisi e la determinazione crioscopica del peso molecolare fatte in benzolo, dimostrano che le compete la formola $C_{12}H_{15}N$.

Questo nuovo composto all'aria assume una colorazione verde, è basico: a freddo non reagisce col joduro di metile, non dà le reazioni dei pirroli con isatina e col fenantrenchinone; assai debolmente e in modo incerto la reazione del fuscello d'abete.

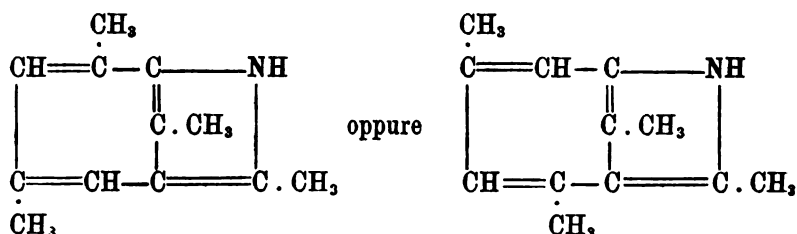
Non dà con acido ossalico anidro la reazione degli indoli di Angeli. Il suo cloroaurato dà degli aghi o dei prismi giallo-chiari; fonde a 109° ed ha corrisposto all'analisi. Il cloroplatinato si presenta in cristalli aranciati e fonde con decomposizione a 213°.

Come si vede nelle identiche condizioni il dimetilpirrolo simmetrico e il dimetilpirrolo asimmetrico si comportano differentemente. Il primo viene condensato e ridotto, il secondo solo condensato. La stessa base $C_{12}H_{15}N$ sopradetta si ottiene infatti condensando il dimetilpirrolo asimmetrico con acetato di zinco; anzi questo è il metodo migliore per ottenerla. Si scaldano per 24 ore a ricadere gr. 5 di dimetilpirrolo asimmetrico, gr. 150 di acido acetico al 90 % e gr. 10 di ossido di zinco. La base si separa come è detto sopra. La reazione avviene secondo la seguente equazione:

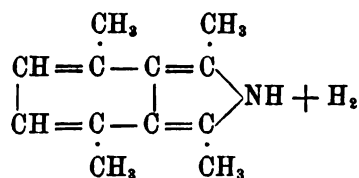
$$2C_6H_9N = C_{12}H_{15}N + NH_3$$

e si può interpretare nel senso che l'α-β'-dimetilpirrolo si idrolizza dapprima in metillevulinaldeide e questa si condensa col pirrolo ancora inalterato, con eliminazione di acqua.

Le formole che si possono assegnare a questa nuova base sono le seguenti:

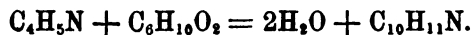
```
      CH3                                   CH3
      .                                     .
CH══C — C────────NH                         C══CH — C────────NH
|           ‖          |                    |             ‖          |
|           C . CH3    |        oppure      |             C . CH3    |
|           |          |                    |             |          |
C════CH—C══════C . CH3                      CH══C — C══════C . CH3
.                                                 .
CH3                                               CH3
```

e allo stato attuale è ben difficile dire quale delle due sia la più probabile.

Mentre per la base di Zanetti e Cimatti, lasciando impregiudicata la questione dell' idrogenazione, si può assumere la seguente formola:

```
        CH3      CH3
        .        .
CH ══ C — C ══ C\
|         |       >NH + H2
CH ══ C — C ══ C/
        .        .
        CH3      CH3
```

Secondo quanto è stato detto, era prevedibile che i pirroli potessero dare prodotti simili di condensazione coll'acetonilacetone. Essi si ottengono realmente.

Condensazione del pirrolo con acetonilacetone.

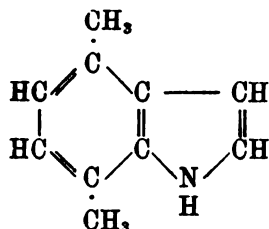
Se si bolle per 40 ore il pirrolo con acetonilacetone in soluzione acetica con acetato di zinco, si cristallizza l'acido acetico ed il pirrolo inalterato nel vuoto, resta un residuo rossastro che distillato al vapor d'acqua dà un prodotto volatile e cristallino, che seccato e cristallizzato dall'etere di petrolio si separa in aghi incolori di odore debole e caratteristico, fusibili a 101°-102°. La sua composizione data dall'analisi corrisponde alla formola $C_{10}H_{11}N$; esso si è dunque ingenerato secondo l'equazione:

$$C_4H_5N + C_6H_{10}O_2 = 2H_2O + C_{10}H_{11}N.$$

Il nuovo prodotto non ha proprietà basiche, dà la reazione dei pirroli e degli indoli col fuscello d'abete, e in quella coll' isatina solforica in soluzione acetica ad una colorazione violetta. Fusa con acido ossalico anidro, dà

la reazione di Angeli e la massa si scioglie in acido acetico glaciale con colorazione violetta. In soluzione benzolica dà un picrato che cristallizza in aghi rosso-granato.

Conservato a lungo assume un leggero odore indolico.

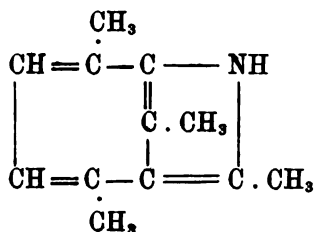
Queste proprietà fanno presumere che esso sia un corpo indolico e per la sua sintesi è probabile che abbia la formola:

```
          CH3
           .
           C
     HC//    \C ——— CH
      |       ||     ||
     HC\     /C\    /CH
         C       N
         .       H
        CH3
```

Questa reazione costituirebbe quindi un *passaggio* molto semplice *dal pirrolo ad un indolo.*

Condensazione dell'α-β'-dimetilpirrolo con acetonilacetone.

Due gr. di dimetilpirrolo e 3 gr. di acetonilacetone si scaldano con tre gr. di ossido di zinco in 100 ccm. di acido acetico al 90 %. Il residuo della distillazione nel vuoto, distillato al vapor d'acqua, fornisce un prodotto cristallino gialliccio che solidifica nel refrigerante.

Dall'etere di petrolio secco si separa in squamette bianche di splendore setaceo che hanno la composizione $C_{12}H_{15}N$ e fondono a 135°. È un corpo basico che non dà le reazioni pirroliche e dà un cloroaurato giallo-chiaro fusibile a 157° con decomposizione. Probabilmente possiede la formola:

```
          CH3
           .
CH = C — C ——— NH
|         ||    |
|         C.CH3 |
|         |     |
CH = C — C ═══ C.CH3
      .
     CH3
```

Sono in corso le esperienze atte ad accertare la costituzione dei composti qui descritti e spero di poterle fra breve riferire.

Mi è grato ringraziare i signori dottor F. Cattadori ed E. Tornani pel valido aiuto prestatomi.

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società Reale delle scienze di Upsala; la Società geodetica di Washington; la Società geologica di Sydney; la Società degli ingegneri civili di Parigi; l'Istituto Smithsoniano di Washington; i Musei di storia naturale di Hamburg e di New York; il Museo di scienze ed arti dell'Università di Pensilvania; il R. Osservatorio astronomico di Arcetri-Firenze.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

La R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna; la R. Società geologica di Berlino; la Società zoologica di Ottawa; la Società degli ingegneri civili di Londra; la Biblioteca Reale dell'Aja; l'Osservatorio Belloch di Llinás; l'Istituto tecnico superiore di Karlsruhe; l'Università di Tokyo.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dall' 8 settembre al 5 ottobre 1902.

Abderhalden E. — Das Verhalten des Hämoglobins während der Säuglingsperiode. Strassburg, 1902. 8°.

Id. — Weitere Beiträge zur Frage nach der Einwirkung des Höhenklimas auf die Zusammensetzung des Blutes. München, 1902. 8°.

Card. G. W. — Handbook to the Mining and Geological Museum. Sydney, 1902. 8°.

Ceresole G. — Analisi batteriologica dell'acqua di S. Gottardo. Padova, 1901. 8°.

Id. — Difendiamoci dall'Anchylostoma duodenale! Venezia, 1900. 8°.

Id. — Di un caso di ossificazione completa del pericardio di un'anitra domestica. Padova, 1899. 8°.

Id. — Gli erbaggi del mercato di Padova in rapporto alla diffusione delle malattie infettive e parassitarie. Padova, 1900. 8°.

Id. — Un caso di ascessi splenici multipli nella capra prodotti dal Bacterium coli comunis. Milano, 1900. 8°.

Chantre E. — Notice sur la vie et les travaux d'Albert Falsan. Lyon, 1902. 8°.

Choffat P. — Recueil d'études paléontologiques sur la Faune Cretacique du Portugal. Lisbonne, 1901-2. 4°.

Commemorazione di S. E. il vice-Ammiraglio Giov. B. Magnaghi fatta alla Camera dei Deputati nella tornata del 21 giugno 1902. Genova, 1902. 8°.

Geological Literature added to the Geological Society's Library during the year ended December 31st, 1901. London, 1902. 8°.

Gramme Z. — Les hypothèses scientifiques. Paris, 1902. 8°.

Haeckel E. — Kunst-Formen der Nature. Lief. VII. Leipzig, 1902. 4°.

Loria G. — Le trasfigurazioni di una scienza. Discorso — Donne matematiche. Lettura. Mantova, 1902. 8°.

Lovisato D. — Le specie fossili finora trovate nel calcare compatto di Bonaria e di S. Bartolomeo. Cagliari, 1902. 8°.

Lumia C. — I concimi fosfatici e potassici esercitano un'azione diretta sulle piante coltivate? S. l. e a. 8°.

Mac-Donald A. — A plan for the study of Man. Washington, 1902. 8°.

Observatorio Belloch. Hojas meteorológicas. Barcelona, 1902. f.

Petraroja L. — Sulla struttura e sullo sviluppo del rene. Napoli, 1902. 8°.

Saint-Lager. — Histoire de l'Abrotonium. Signification de la désiuence *ex* de quelques noms de Plantes. Paris, 1900. 8°.

Id. — La perfidie des synonymes dévoilée à propos d'un astragale. Lyon, 1902. 8°.

Silva A. da. — O aquario Vasco da Gama. Lisboa, 1901. 8°.

Wolfer A. — Revision of Wolf's Sun-Spot relative numbers. Washington, 1902. 4°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 19 ottobre 1902.

Matematica. — *Determinazione delle superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi.* Nota di UGO AMALDI, presentata dal Corrispondente GUIDO CASTELNUOVO.

Su di una superficie algebrica si dice, notoriamente, *fascio* un sistema di curve, tale che per un punto generico della superficie passi *una* curva del sistema. In questa breve Nota io mi propongo di risolvere il seguente problema, di cui debbo l'idea al ch. sig. prof. Enriques: *Determinare tutte le superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi*, cioè tali che la curva generica di uno qualsiasi fra codesti fasci intersechi in *un* punto la curva generica di ogni altro fra essi.

Sia una superficie algebrica, su cui esistano (almeno) tre fasci (C_1), (C_2), (C_3) di curve algebriche unisecantisi. Cominciamo col ripetere qui una considerazione, che il sig. Enriques ha applicato nel risolvere « *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* » (¹).

Considerata una curva generica c_1 del fascio (C_1), si associ ad essa un'altra qualsiasi curva c_1' del medesimo fascio: per un punto A arbitrario

(¹) Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, 1893.

di c_1 passa *una* curva del fascio (C_2), la quale interseca la c'_1 in un punto; e per questo passa *una* curva del fascio (C_3), la quale interseca la c_1 in un punto A'. Se sulla c_1 facciamo corrispondere al punto A il punto A', otteniamo, al variare di A, una corrispondenza fra i punti di c_1, la quale è algebrica e biunivoca, cioè birazionale. Se allora, tenuta fissa la c_1, facciamo variare nel fascio (C_1) la curva c'_1, concludiamo che la curva c_1 ammette su sè stessa una semplice infinità continua di trasformazioni birazionali; onde, per un notissimo teorema dello Schwarz [1], risulta che la c_1 è una curva di genere *zero* o di genere *uno*.

Poichè il medesimo ragionamento si può applicare anche alle curve generiche dei fasci (C_2) e (C_3) abbiamo intanto che *i tre fasci* (C_1), (C_2), (C_3) *sono costituiti ciascuno da curve razionali o ellittiche.*

Ma, facendo corrispondere su due curve qualsiansi di diverso fascio i punti di intersezione con una medesima curva variabile nel fascio rimanente, troviamo che due curve quali si vogliano, appartenenti a due fasci diversi, sono fra loro in corrispondenza birazionale, onde si conclude che *le curve dei tre fasci sono tutte insieme o razionali o ellittiche.*

Il primo caso si può senz'altro considerare come esaurito, come quello che, per un classico teorema del Nöther [2] conduce alle superficie razionali, sulle quali esistono infinite reti omaloidiche di curve. Si può notare che sopra una superficie razionale tre fasci quali si vogliano di curve unisecantisi appartengono a *due* reti omaloidiche, come nel piano rappresentativo tre fasci di rette appartengono alla rete delle rette e a quella delle coniche pei tre vertici di essi.

Passiamo ad esaminare il caso di una superficie algebrica S, su cui esistano (almeno) tre fasci (C_1), (C_2), (C_3) di curve ellittiche unisecantisi. Fissate due curve c_1, c_2 appartenenti a due fasci diversi, p. es. a (C_1), (C_2), ogni punto P della superficie S determina in (C_1), (C_2) due curve passanti per esso e intersecanti l'una la c_2, l'altra la c_1 in *un* punto: cioè ad ogni punto P di S corrisponde *una* coppia di punti appartenenti l'uno a c_1, l'altro a c_2. Reciprocamente, è del pari manifesto che ad ogni coppia di punti siffatti corrisponde *un* punto della superficie S, cioè la intersezione della curva di (C_2) passante per il punto scelto su c_1 e della curva di (C_1) passante per il punto scelto su c_2.

Di qui risulta che per avere una rappresentazione parametrica della superficie S basterà rappresentare le due curve c_1, c_2. Ma codeste due curve sono ellittiche entrambi, e fra loro in corrispondenza birazionale: onde si potranno rappresentare sopra due cubiche piane γ e γ' identiche, la cui rap-

(1) Crelle, Bd. LXXXVII.
(2) Mathematische Annalen, Bd. 3.

presentazione parametrica, per mezzo della p del Weierstrass, sarà

$$x = p(u), \quad y = p'(u)$$

e

$$z = p(v), \quad t = p'(v).$$

La superficie S sarà allora trasformabile birazionalmente nella superficie S′, che, in uno spazio a quattro dimensioni di coordinate cartesiane x, y, z, t, è data dalle equazioni

$$x = p(u), \quad y = p'(u), \quad z = p(v), \quad t = p'(v),$$

ove si facciano variare i punti complessi u, v, l'uno indipendentemente dall'altro, nel parallelogramma dei periodi $2\omega, 2\omega'$ della p considerata.

Su codesta superficie S′ ai due fasci (C_1), (C_2) di S corrispondono i due fasci di curve unisecantisi $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$. Per determinare gli altri fasci di curve unisecanti le $u = \text{cost}$ e le $v = \text{cost}$, notiamo, come già si è fatto più sopra, che ogni fascio siffatto stabilisce una corrispondenza birazionale tra una qualsiasi curva $u = \text{cost}$, e una qualsiasi $v = \text{cost}$, e dà luogo quindi ancora ad una trasformazione birazionale della cubica γ in sè stessa. Ma è noto che, se il modulo $\frac{\omega}{\omega'}$ della cubica γ è generale, codesta curva ammette in sè stessa due schiere di trasformazioni birazionali, dipendenti ciascuna da una costante arbitraria, le quali, ove v designi il parametro del punto trasformato, sono rappresentate da [1]

$$v = u + \text{cost}, \quad v = -u + \text{cost}. \tag{1}$$

Ora è manifesto che codeste due equazioni, lineari in u e v, rappresentano su S′ due fasci di curve unisecanti sia fra loro, come rispetto alle $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$.

Perchè la cubica γ ammetta in sè stessa altre trasformazioni birazionali oltre le (1), è necessario e sufficiente che il suo modulo $\frac{\omega}{\omega'}$ abbia un valore singolare, cioè precisamente sia uguale o all'unità immaginaria o ad una radice cubica primitiva dell'unità.

Se il modulo è uguale a $\pm i$, cioè se la funzione ellittica p è *armonica* (o *lesmiscatica*), la γ ammette in sè stessa, oltre le due schiere di trasformazioni (1), le altre due

$$v = \pm iu + \text{cost};$$

[1] Cfr. p. es. Appell-Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, pag. 474.

ed è ancora manifesto che queste due equazioni rappresentano, in tal caso, su S′ un quinto e un sesto fascio di curve unisecanti fra loro e rispetto a ciascuno dei fasci

$$(2)\qquad u = \text{cost}\,,\quad v = \text{cost}\,,\quad v = \pm u + \text{cost}\,.$$

Se infine, indicando con ε una radice cubica primitiva della unità, il modulo della cubica γ è uguale ad ε (o ad ε^2), cioè se la funzione ellittica p è *equianarmonica*, la γ ammette in sè stessa oltre le (1) altre quattro schiere continue di trasformazioni birazionali

$$(3)\qquad v = \pm \varepsilon u + \text{cost}\,,\quad v = \pm \varepsilon^2 u + \text{cost}\,.$$

Riferendoci alla superficie S′, abbiamo che in tal caso esistono su di essa oltre i fasci (2) altri quattro fasci di curve, unisecantisi fra loro e rispetto ai (2), i quali sono rappresentati dalle (3).

Concludendo, *una superficie algebrica, su cui esistano più di due fasci di curve algebriche unisecantisi, o contiene infiniti fasci siffatti* (costituiti da curve razionali) *ed è razionale, oppure si può trasformare birazionalmente in una superficie dello spazio a quattro dimensioni, rappresentabile mediante la p del Weierstrass sotto la forma*

$$x = p(u)\,,\quad y = p'(u)\,,\quad z = p(v)\,,\quad t = p'(v)\,.$$

In quest'ultimo caso, se la p è a modulo generale, la superficie contiene quattro fasci di curve ellittiche unisecantisi

$$(2)\qquad u = \text{cost}\,,\quad v = \text{cost}\,,\quad v = \pm u + \text{cost}\,.$$

Se invece la p è a moltiplicazione complessa, secondochè essa è armonica o equianarmonica, la superficie contiene sei od otto fasci di curve ellittiche unisecantisi. Nel primo caso codesti fasci sono rappresentati dalle (2) *e dalle*

$$v = \pm iu + \text{cost}\,;$$

nel secondo caso sono rappresentati dalle (2) *e dalle*

$$v = \pm \varepsilon u + cost\,,\quad v = \pm \varepsilon^2 u + \text{cost}\,,$$

dove ε designi una radice cubica primitiva dell'unità.

Fisica matematica. — *La teoria di Hertz applicata alla determinazione del campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme d'una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito.* Nota di G. Picciati, presentata dal Corrispondente Ricci.

In una Nota recente [1] il prof. T. Levi-Civita ha dimostrato che il problema generale dell'induzione elettrodinamica resta univocamente determinato entro l'àmbito della teoria hertziana pura. Infatti gli elementi (condizioni ai limiti) che apparivano mancanti perchè le particolari questioni da lui risolute risultassero matematicamente determinate, si possono derivare da un passaggio al limite, mediante il quale si riconosce il comportamento delle forze elettromagnetiche nell'attraversare una superficie conduttrice. Seguendo la nuova via tracciata dal prof. Levi-Civita mi sono proposto la risoluzione di una delle questioni da lui già trattate [2], cioè la determinazione del campo elettromagnetico generato da una carica elettrica che si muove con velocità costante su di una retta parallela ad un piano conduttore indefinito. L'esposizione dei resultati, ottenuti in modo relativamente semplice, forma oggetto della presente Nota; essi sono esattamente coincidenti con quelli assegnati per l'altra via dal Levi-Civita.

Si consideri un dielettrico indefinito impolarizzabile ed in quiete ed il campo elettromagnetico generato da una carica in moto di traslazione uniforme. Indicando con X', Y', Z' le componenti della forza elettrica, e con L', M', N' quelle della forza magnetica esse sono soluzioni del sistema

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt}=\dfrac{dZ}{dy}-\dfrac{dY}{dz}, \\ A\dfrac{dM}{dt}=\dfrac{dX}{dz}-\dfrac{dZ}{dx}, \\ A\dfrac{dN}{dt}=\dfrac{dY}{dx}-\dfrac{dX}{dy}; \end{cases} \qquad \text{(II)}\quad \begin{cases} A\dfrac{dX}{dt}=\dfrac{dM}{dz}-\dfrac{dN}{dy}, \\ A\dfrac{dY}{dt}=\dfrac{dN}{dx}-\dfrac{dL}{dz}, \\ A\dfrac{dZ}{dt}=\dfrac{dL}{dy}-\dfrac{dM}{dx}, \end{cases}$$

e delle due

$$\text{(III)}\quad \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0, \qquad \text{(IV)}\quad \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0,$$

indicando A l'inversa della velocità della luce nell'etere.

[1] *La teoria elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione.* Rendiconti Accademia Lincei, vol. XI, 2° sem., 1902, pag. 75.

[2] *Sur le champ électromagnétique* etc.. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, ser. III, t. IV, 1902.

Riferendoci ad un sistema di assi mobili $\xi\ \eta\ \zeta$ invariabilmente legati ad m, le cui coordinate sono rispetto a questi 0, 0, $d > 0$ sono note [1] le espressioni di X', Y', Z', L', M', N'.

Si ha cioè:

$$\begin{cases} X' = -m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right), & Y' = -m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right), \quad Z' = -m\dfrac{d}{d\zeta}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right), \\ L' = 0 & M' = -ma\dfrac{d}{d\zeta}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right), \quad N' = ma\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right), \end{cases}$$

avendosi

$$\Delta^2 = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (\zeta - d)^2] \ , \ a = cA \, ,$$

essendo c la velocità di traslazione della carica.

Introducendo dei conduttori nel campo, questo rimane evidentemente modificato; supponiamo si tratti di una superficie piana conduttrice parallela alla traslazione della carica, e sia il piano $\zeta = 0$, che indicheremo con σ. Indichiamo con X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 le componenti delle forze elettromagnetiche di induzione, e con X, Y, Z, L, M, N quelle del campo così modificato: avremo

$$X = X' + X_1 \ , \ Y = Y' + Y_1 \ , \ Z = Z' + Z_1 \, ,$$
$$L = L' + L_1 \ , \ M = M' + M_1 \ , \ N = N' + N_1 \, .$$

Le $X_1 \ldots\ldots N_1$ debbono essere soluzioni del sistema (I)...(IV), regolari in ogni punto dello spazio fuori di σ e nulle all' infinito come $\dfrac{1}{r^2}$ almeno ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$).

In un generico punto della superficie conduttrice σ le $X' \ldots\ldots N'$ si comportano regolarmente, invece le $X \ldots\ldots N$, ossia le $X_1 \ldots N_1$, debbono presentare attraverso la superficie i caratteri seguenti [2]:

1. Le componenti tangenziali della forza elettrica (indotta) rimangono continue anche attraverso la superficie.

2. Le componenti tangenziali della forza magnetica (indotta) subiscono, quando si attraversa la superficie nel senso della normale positiva, le discontinuità

$$\delta L = -\frac{4\pi}{AR} Y \ , \ \delta M = \frac{4\pi}{AR} X \, ,$$

ossia anche

$$(1) \qquad \begin{cases} \delta L_1 = -\dfrac{4\pi}{AR} Y_1 - \dfrac{4\pi}{AR} Y' \, , \\ \delta M_1 = \ \ \dfrac{4\pi}{AR} X_1 + \dfrac{4\pi}{AR} X' \, , \end{cases}$$

[1] Vedi per es. Mem. cit.. Annales de Toulouse, pag. 26.

[2] Vedi Mem. cit., *La teoria elettrodinamica di Hertz* ecc., pag. 77.

essendo R la resistenza unitaria della superficie valutata in unità elettromagnetiche.

Dovendosi determinare le $X_1 \dots N_1$ integrali del sistema (I)...(IV), regolari fuori del piano σ, e per i quali le condizioni caratteristiche sul piano stesso si riferiscono alle componenti tangenziali, si può scindere la ricerca in due parti cioè:

1. Determinazione di X_1, Y_1, L_1, M_1.
2. Determinazione delle componenti Z_1, N_1.

Quest' ultima determinazione è immediata esigendo solo due quadrature; infatti dal sistema (I)...(IV) si ottiene:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} &= A\frac{dY_1}{dt} + \frac{dL_1}{dz}, \\ \frac{dN_1}{dy} &= \frac{dM_1}{dz} - A\frac{dX_1}{dt}, \\ \frac{dN_1}{dz} &= -\left(\frac{dL_1}{dx} + \frac{dM_1}{dy}\right), \\ A\frac{dN_1}{dt} &= \frac{dY_1}{dx} - \frac{dX_1}{dy}, \end{aligned}\right. \qquad (3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dx} &= -A\frac{dM_1}{dt} + \frac{dX_1}{dz}, \\ \frac{dZ_1}{dy} &= A\frac{dL_1}{dt} + \frac{dY_1}{dz}, \\ \frac{dZ_1}{dz} &= -\left(\frac{dX_1}{dx} + \frac{dY_1}{dy}\right), \\ A\frac{dZ_1}{dt} &= \frac{dL_1}{dy} - \frac{dM_1}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Le combinazioni differenziali delle prime terne sono identicamente soddisfatte in virtù delle equazioni stesse del sistema; le combinazioni di una terna con la quarta corrispondente lo sono in virtù del sistema stesso (I)...(IV), e dell'equazione

$$(\mathrm{V})\qquad \Box f = A^2\frac{d^2 f}{dt^2} - \Delta_2 f = 0,$$

a cui soddisfanno gli integrali del sistema.

Il problema è quindi ridotto a questo: determinare quattro funzioni X_1, Y_1, L_1, M_1 soddisfacenti alla (V), regolari fuori del piano conduttore σ; attraversando il piano σ le X_1, Y_1 rimangono continue, mentre le L_1, M_1 subiscono discontinuità caratterizzate dalle (1).

Il fenomeno essendo stazionario rispetto agli assi $\xi\ \eta\ \zeta$, le funzioni cercate non dipenderanno esplicitamente dal tempo ma solo da $\xi\ \eta\ \zeta$, avendosi

$$\xi = x - ct\ ,\ \eta = y\ ,\ \zeta = z\,.$$

Avremo quindi $A\dfrac{d}{dt} = -a\dfrac{d}{dx}$ e perciò

$$\Box f = \bigcirc f = (1 - a^2)\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2} = 0,$$

equazione indefinita a cui debbono soddisfare le funzioni cercate.

Di queste le L_1, M_1 si possono considerare come derivate rispetto a ζ di potenziali ritardati (corrispondenti a distribuzione di superficie sul

piano $\zeta=0$); con questo esse soddisfanno all'equazione indefinita $\bigcirc f=0$, sono regolari fuori del piano e subiscono attraverso a questo una discontinuità. Posto quindi

$$L_1=\frac{dV_1}{d\zeta} \quad , \quad M_1=-\frac{dU_1}{d\zeta},$$

essendo V_1 ed U_1, per le loro espressioni analitiche sotto forma di integrali estesi al piano σ, funzioni dell'argomento $|\zeta|$, avremo, attraverso il piano σ,

$$\delta L_1=2\frac{dV_1}{d|\zeta|} \quad , \quad \delta M_1=-2\frac{dU_1}{d|\zeta|}.$$

Le condizioni caratteristiche (1) prendono quindi la forma

$$2\frac{dV_1}{d|\zeta|}=-\frac{4\pi}{AR}Y_1-\frac{4\pi}{AR}Y',$$

$$-2\frac{dU_1}{d|\zeta|}=\frac{4\pi}{AR}X_1+\frac{4\pi}{AR}X'.$$

Posto $AR=k$ e sostituendo ad X', Y' le note espressioni si ha

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|}+Y_1=m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right), \\ \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|}+X_1=m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right), \end{cases}$$

relazioni che debbono essere soddisfatte in tutti i punti del piano $\zeta=0$: a queste, come mostra il sig. Levi-Civita [1], se ne possono sostituire altre due valevoli in tutto lo spazio. Se si osserva che X_1, Y_1 si possono pure considerare come potenziali ritardati (corrispondenti a distribuzione di superficie sul piano $\zeta=0$) quindi funzioni di $|\zeta|$ e continue attraverso il piano, si può dire che i primi membri delle (4) sono funzioni di ξ, η, $|\zeta|$ olomorfe per tutti i valori reali di ξ. η, $|\zeta|>0$, riducentisi rispettivamente a $m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right)$ ed $m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right)$ per $\zeta=0$, e verificanti l'equazione $\bigcirc f=0$. Anche le funzioni $m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right)$, $m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{\Delta}\right)$ soddisfanno a tutte queste condizioni quando in esse si ponga $-|\zeta|$ in luogo di ζ, con che si toglie la singolarità nel punto m.

Ponendo quindi

$$r^2=\xi^2+(1-a^2)[\eta^2+(|\zeta|+d)^2],$$

si può alle (4), valevoli sul piano $\zeta=0$, sostituire quest'altre valevoli in tutto lo spazio

[1] Vedi Mem. cit., Annales de Toulouse, pag. 27.

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|}+Y_1=m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{r}\right), \\ \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|}+X_1=m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

A queste due equazioni che legano le X_1, Y_1, U_1, V_1 se ne aggiungono altre due che derivano dalle (2) e (3). Si ha infatti dalle (2)

$$-a\frac{dN_1}{dx}=\frac{dY_1}{dx}-\frac{dX_1}{dy},$$

ossia

$$-a\left(-a\frac{dY_1}{dx}+\frac{dL_1}{dz}\right)=\frac{dY_1}{dx}-\frac{dX_1}{dy},$$

e quindi

$$(1-a^2)\frac{dY_1}{dx}-\frac{dX_1}{dy}+a\frac{dL_1}{dz}=0;$$

analogamente dalle (3) si ottiene:

$$(1-a^2)\frac{dM_1}{dx}-\frac{dL_1}{dy}-a\frac{dX_1}{dz}=0.$$

A queste due equazioni si può dare questa forma

$$(6)\quad \begin{cases} (1-a^2)\dfrac{dY_1}{d\xi}-\dfrac{dX_1}{d\eta}+a\dfrac{d^2V_1}{d\zeta^2}=0, \\ (1-a^2)\dfrac{d^2U_1}{d\xi\, d\zeta}+\dfrac{d^2V_1}{d\eta\, d\zeta}+a\dfrac{dX_1}{d\zeta}=0. \end{cases}$$

Si ricava dalle (5)

$$(7)\quad \begin{cases} X_1=m\,(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{r}\right)-\dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|}, \\ Y_1=m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{r}\right)-\dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|} \end{cases}$$

le quali sostituite nelle (6) danno

$$(8)\quad \begin{cases} (1-a^2)\dfrac{d^2V_1}{d\xi\, d|\zeta|}-\dfrac{d^2U_1}{d\eta\, d|\zeta|}-\dfrac{a\,2\pi}{k}\dfrac{d^2V_1}{d|\zeta|^2}=0, \\ (1-a^2)\dfrac{d^2U_1}{d\xi\, d|\zeta|}+\dfrac{d^2V_1}{d\eta\, d|\zeta|}-\dfrac{ak}{2\pi}\dfrac{d^2U_1}{d|\zeta|^2}=-a\,m(1-a^2)\dfrac{d^2}{d\xi\, d|\zeta|}\left(\dfrac{1}{r}\right), \end{cases}$$

equazioni a cui debbono soddisfare U_1 e V_1. Integrandole rispetto a $|\zeta|$ da un valore qualunque fino all'infinito, annullandosi i due membri per $|\zeta|=\infty$, si ha

$$(9)\quad \begin{cases} (1-a^2)\dfrac{dV_1}{d\xi}+\dfrac{dU_1}{d\eta}-\dfrac{a2\pi}{k}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|}=0, \\ (1-a^2)\dfrac{dU_1}{d\xi}+\dfrac{dV_1}{d\eta}-\dfrac{ak}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|}=-a\,m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

Dalla prima delle (9) ricavando $\frac{dU_1}{d\eta}$ e sostituendolo nella seconda. derivata rispetto ad η, si ottiene

$$(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left\{(1-a^2)\frac{dV_1}{d\xi}-\frac{a2\pi}{k}\frac{dV_1}{d|\zeta|}\right\}+\frac{d^2V_1}{d\eta^2}-$$

$$-\frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\left\{(1-a^2)\frac{dV_1}{d\xi}-\frac{a2\pi}{k}\frac{dV_1}{d|\zeta|}\right\}=-am(1-a^2)\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

dalla quale, tenendo conto che $OV_1=0$, si ricava per V_1 l'equazione

$$a^2\frac{d^2V_1}{d\xi^2}+\frac{d^2V_1}{d|\zeta|^2}+\left(\frac{a2\pi}{k}+\frac{ak}{2\pi}\right)\frac{d^2V_1}{d\xi\, d|\zeta|}=am\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{10}$$

Essa si può scrivere, ponendo $G_1=\frac{a2\pi}{k}\frac{dV_1}{d\xi}+\frac{dV_1}{d|\zeta|}$, sotto la forma

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{dG_1}{d\xi}+\frac{dG_1}{d|\zeta|}=am\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{10'}$$

e l'integrazione di questa si può effettuare nel modo indicato dal Levi-Civita (¹).

Ponendo

$$\tau^2=\left(\xi+\frac{ak}{2\pi}\mu\right)^2+(1-a^2)\left[\eta^2+(|\zeta|+d+\mu)^2\right]$$

con μ indeterminata, si ha

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=0}=\frac{1}{r}\quad,\quad\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=\infty}=0\quad,\quad O\frac{1}{\tau}=0$$

ed inoltre

$$\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\mu}=\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}+\frac{d\frac{1}{\tau}}{d(\zeta)},$$

quindi la funzione $-ma\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu$ soddisfa alla (10'). Essa soddisfa inoltre alla $Of=0$, a cui pure deve soddisfare la G_1, ed al pari di questa si comporta regolarmente per tutti i valori reali di $\xi\ \eta\ \zeta$ avendo solo una discontinuità normale per $\zeta=0$.

La differenza $G_1-\left(-ma\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu\right)$, che dovrebbe essere funzione di $\xi-\frac{ak}{\lambda\pi}|\zeta|$, dovendo soddisfare alla $Of=0$ ed annullarsi all'infinito, è quindi identicamente nulla, e si ha perciò

$$G_1=-ma\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu\,.$$

(¹) Vedi Mem. cit., Annales de Toulouse, pag. 29.

Avendosi ora per V_1 l'equazione

$$(10'') \qquad a\frac{dV_1}{d\xi}+\frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|\zeta|}=-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\,d\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu$$

poniamo

$$\theta^2=\left(\xi+\frac{ak}{2\pi}\mu+a\nu\right)^2+(1-a^2)\left[\eta^2+\left(|\zeta|+d+\mu+\frac{k}{2\pi}\nu\right)^2\right],$$

essendo ν una nuova indeterminata.

Si ha in questo caso

$$\left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=0}=\frac{1}{\tau},\ \left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=\infty}=0\,,\ \text{O}\,\frac{1}{\theta}=0$$

$$\frac{d\frac{1}{\theta}}{d\nu}=a\frac{d\frac{1}{\theta}}{d\xi}+\frac{k}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\theta}}{d|\xi|}\,.$$

Si riconosce quindi che l'espressione

$$(11) \qquad V_1=\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\,d\eta}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu$$

è una soluzione della (10″) e l'unica soddisfacente a tutte le altre condizioni a cui V_1 è soggetta.

Per U_1 si ottiene con procedimento analogo dalle (9) l'equazione

$$(12) \qquad a^2\frac{d^2U_1}{d\xi^2}+\frac{d^2U_1}{d|\zeta|^2}+\left(\frac{a2\pi}{k}+\frac{ak}{2\pi}\right)\frac{d^2U_1}{d\xi\,d|\zeta|}=$$
$$=am(1-a^2)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{p}\right)-\frac{a^2m\,2\pi}{k}\frac{d^2}{d\xi\,d|\zeta|}\left(\frac{1}{p}\right)$$

della quale la soluzione unica soddisfacente alle condizioni date è

$$(13) \quad U_1=-\frac{ma^2k}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty\frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu-\frac{am}{p}\,.$$

Ottenute le espressioni di U_1 e V_1 possiamo stabilire le espressioni delle componenti tangenziali delle forze elettromagnetiche. Si ha per X_1 l'espressione data dalle (7) che si può scrivere

$$X_1=m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{p}\right)+\frac{mak}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\int_0^\infty\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}d\mu+$$
$$+\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty\frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{k}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\theta}}{d|\zeta|}\right)d\nu+\frac{akm}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{1}{p}\right).$$

Se si ricorda ora che si ha

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)=\frac{d}{d\mu}\left(\frac{1}{\tau}\right)-\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$
$$\frac{k}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\theta}\right)-a\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

ed inoltre

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=0}=\frac{1}{r},\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=\infty}=0\ ,\ \left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=0}=\frac{1}{\tau},\left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=\infty}=0$$

la precedente diviene

$$X_1=m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d^2}{d|\zeta|^2}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-$$

$$-\frac{ma^2k}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty\frac{d^3}{d\eta^2\,d\xi}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu$$

e quindi, essendo $\Theta\frac{1}{\tau}=0$, si ha

$$X_1=m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{mak}{2\pi}(1-a^2)\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-$$

$$-\frac{ma^2k}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty\frac{d^3}{d\eta^2\,d\xi}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu$$

A questa, come all'analoga espressione di Y_1, si può dare la forma esattamente coincidente con quella assegnata per l'altra via dal prof. Levi-Civita, ottenendo per le componenti tangenziali

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
X_1&=\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu+\frac{m}{r}\right\}+a\frac{dU_1}{d\xi}\,,\\
Y_1&=\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu+\frac{m}{r}\right\}+a\frac{dV_1}{d\xi}\,,\\
L_1&=\frac{dV_1}{d\zeta}\,,\\
M_1&=-\frac{dU_1}{d\zeta}\,.
\end{aligned}\right.$$

Restano ad ottenere le componenti normali Z_1 ed N_1, che si hanno con quadrature dalle (2) e (3). Si ha dalle (2)

$$\frac{dN_1}{d\xi}=-am\frac{d^2}{d\xi\,d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{ak}{2\pi}\frac{d^2V_1}{d\xi\,d|\zeta|}+\frac{d^2V_1}{d|\zeta|^2}=$$

$$=-a^2\frac{d^2V_1}{d\xi^2}-\frac{a2\pi}{k}\frac{d^2V_1}{d\xi\,d|\zeta|}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dU_1}{d\eta}-\frac{dV_1}{d\xi}\right),$$

e questo tenendo conto delle (10) e (9).

Così pure si ha

$$\frac{dN_1}{d\eta}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dU_1}{d\eta}-\frac{dV_1}{d\xi}\right),$$

$$\frac{dN_1}{d\zeta}=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{dU_1}{d\eta}-\frac{dV_1}{d\xi}\right)$$

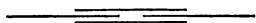
e quindi

$$N_1 = \frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi}.$$

In modo analogo si ha dalle (3)

$$Z_1 = -\frac{d}{d\zeta}\left\{-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu - \frac{m}{\rho}\right\}$$

restando così determinate tutte le componenti $X_1 \ldots\ldots N_1$ delle forze elettromagnetiche di induzione.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 novembre 1902.

P. VILLARI, Presidente.

PERSONALE ACCADEMICO

L'Accademico Segretario CERRUTI comunica i ringraziamenti inviati, per la loro recente nomina, dai Corrispondenti: BECCARI, DONATI, LUSTIG, PARONA, PASCAL, VENTURI; e dai Soci stranieri: LORENTZ, THALÈN, DE VRIES, WIESNER, ZEUTHEN.

Il Presidente VILLARI dà il triste annuncio delle perdite subìte dalla Classe durante le ferie accademiche, nelle persone dei Soci nazionali: FELICI, FERRERO, TARGIONI-TOZZETTI, COSSA, del Corrispondente MAGNAGHI, e dei Soci stranieri FAYE e VIRCHOW.

Il Socio RÒITI dà lettura di una Commemorazione dell'accademico prof. RICCARDO FELICI (1).

A nome del Socio CELORIA, il Vicepresidente BLASERNA legge la seguente

Commemorazione del Socio, generale ANNIBALE FERRERO.

Il giorno 7 dello scorso agosto morte immatura troncava l'esistenza del Tenente-Generale ANNIBALE FERRERO, Socio di questa nostra Accademia dei Lincei fin dal novembre del 1883.

Sarebbe difficile e fors'anche fuor di luogo seguire qui il Ferrero passo passo in tutta la vita sua, nei campi diversi ai quali via via rivolse la sua attività e nei quali seppe affermare la mente larga e comprensiva, l'ingegno

(1) Questa Commemorazione sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

colto e versatile, l'animo ardente e generoso. In quest' aula può e deve piuttosto essere messa in evidenza la parte efficace che egli prese al movimento e al progresso scientifico italiano.

Fu tra i primi in Italia ad acquistare la percezione chiara e sicura del nuovo spirito che, in seguito alle opere immortali degli scienziati di genio vissuti nella prima metà del secolo XIX, doveva informare le operazioni geodetiche del nuovo Regno, a intuire il potente impulso che ad esse operazioni poteva venire da una partecipazione attiva dell'Italia all'Associazione costituitasi nel 1864 a Berlino per iniziativa del Generale Baeyer da principio sotto il nome di Associazione per la misura del grado medio europeo, in seguito sotto quello, che ancora oggi porta, di Associazione geodetica internazionale.

Nel 1872 Capo della Divisione geodetica dell' allora Istituto topografico militare, dal 1885 fino al 1893 Direttore dell' Istituto geografico militare, nel quale in seguito l' Istituto topografico erasi trasformato, egli, pur continuandone le tradizioni nobilissime, vi seppe eccitare e mantenere vivo uno spirito scientifico, innovatore, fecondo di risultati diversi ed utilissimi.

Nel periodo 1873-83 Segretario della R. Commissione geodetica italiana, Presidente di essa dal 1883 fino al giorno di sua morte, nel periodo 1883-91 Membro della Commissione permanente dell'Associazione geodetica internazionale, nel periodo 1891-97 Vice-presidente di essa Commissione, a datare dal 1897 Vice-presidente dell'Associazione, egli dal cumulo di così importanti funzioni trasse modo di coordinare agli intenti scientifici della Commissione italiana e dell'Associazione internazionale i lavori pratici dell' Istituto geografico militare, e di far entrare energicamente la scienza nostra nelle vedute del suo maestro ed amico il Generale Baeyer sull' importanza somma che rilevamenti topografici esatti possono avere per la scienza e per la pratica. Così avvenne che per impulso suo scienziati forti e sapienti diventarono collaboratori suoi efficaci, e con lui riuscirono a far sì che il complesso dei lavori geodetici via via compiuti nel Regno d' Italia soddisfacesse non solo alle più alte esigenze scientifiche, ma offrisse insieme le basi più sicure per le misure della vita pratica, per le costruzioni ferroviarie ed idrauliche, per l'amministrazione finanziaria e del Catasto, per le grandi misure agricole e forestali.

Pubblicò il Ferrero: nel 1873 una Memoria sul *Sistema di proiezione più conveniente per le carte topografiche d'Italia*, sistema in seguito adottato; nel 1876 un libro ancor oggi pregiatissimo e intitolato *Esposizione del metodo dei minimi quadrati*. Nel periodo di tempo, 1887-1894, durante il quale tenne la Presidenza della Giunta superiore del Catasto, ispirò le notevolissime *Istruzioni* di quella Giunta sui lavori trigonometrici, sulle poligonazioni, sul rilevamento particellare; nel 1892 pronunciò ai Lincei il discorso che intitolò: *Pensieri sulla precisione delle misure*; negli Atti

della R. Commissione geodetica italiana e nei Rendiconti dell' Associazione geodetica internazionale pubblicò numerose Relazioni, e fra esse quella molto importante e voluminosa *Sulle triangolazioni*; nella XI Sessione, 1882, dell' Associazione francese per il progresso delle scienze trattò della necessità di coordinare i molteplici lavori topografici e cartografici eseguiti per cura delle singole Amministrazioni di uno Stato, e preparò per tal modo la creazione in Italia, 1886, del « Consiglio superiore dei lavori geodetici dello Stato ».

Ma l'opera sua vasta di geodeta e le pubblicazioni sue importanti non bastano a dare intera la misura dell' uomo. Una parte di questa ad esse sfugge, ed è il fascino tutto personale che egli esercitava in ogni riunione di uomini intellettuali alla quale prendesse parte, e che proveniva dalla innata distinzione della persona e dei modi, dalla cognizione delle lingue e dal modo corretto con cui le parlava, dall' indiscussa competenza tecnica sorretta da larga coltura storica e letteraria, dal pronto intuito delle questioni incidentali spesso personali e del più opportuno modo di risolverle, dall' abito filosofico della mente che lo portava a considerare i fatti, nei loro rapporti reciproci e nella loro complessità, dalla conversazione geniale, a sbalzi paradossale, attraentissima sempre, dall' innegabile qualità di oratore efficace, dall' impeto col quale, occorrendo, sapeva sostenere i concetti e i propositi dei quali fosse convinto.

Si deve a questo insieme complesso e punto frequente di doti eminenti se egli esercitò sempre un' influenza di primo ordine, a volte preponderante e decisiva, nei lavori e nelle sorti dell' Associazione geodetica internazionale, sicchè egli per consenso espresso dei più forti geodeti stava per esserne eletto Presidente. Ad esso insieme si deve ancora se egli durante il suo soggiorno in Inghilterra si acquistò le simpatie, l'amicizia, la stima degli scienziati più illustri di quel forte paese, tanto da ottenere, egli soldato e diplomatico, il grado di « doctor juris honoris causa » dalle Università di Glasgow e di Cambridge.

Il Socio TODARO legge la seguente

Commemorazione del Socio, prof. ADOLFO TARGIONI-TOZZETTI.

Con la morte di ADOLFO TARGIONI-TOZZETTI sparisce uno dei migliori e più attivi cultori di Entomologia. Discendente da una famiglia d'illustri naturalisti, quali furono Giovanni e Ottavio Targioni-Tozzetti, appena laureatosi in Medicina si dette allo studio della Botanica, che professò con plauso in Firenze; pubblicando varî lavori, fra i quali il *Saggio di studî intorno al guscio dei semi*, che fu uno dei primi comparsi sopra questo argomento e che viene ancora citato nei libri di Botanica.

Più tardi si dedicò tutto alla Zoologia, specialmente degli Invertebrati, per modo che, nel 1860, venne chiamato ad occupare la Cattedra d'Anatomia comparata e Zoologia degli Invertebrati nell'Istituto superiore di Firenze.

Nel 1875 il Ministero d'Agricoltura istituiva in Firenze l'ufficio d Entomologia agraria e chiamava il Targioni-Tozzetti alla Direzione di quell'Ufficio, nel quale egli spiegò una feconda attività, facendo studî e ricerche che tornarono a grande vantaggio dell'Agricoltura. Inoltre si interessò molto della pesca, intorno alla quale pubblicò varî lavori, dimostrando la sua grande competenza; come pure non trascurò gli argomenti, che si riferiscono alla caccia, studiando, in relazione con essa, gli uccelli e gli insetti nocivi all'Agricoltura.

Adunque il Targioni-Tozzetti fu operosissimo ed acutissimo indagatore; ma nella sua mente la stessa ricerca scientifica avea per mira precipua l'utile, l'applicazione o il bene immediato, onde soleva ripetere: *Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.*

Tuttavia pubblicò numerosi lavori di pura Zoologia, fra' quali trovo notevoli: la memoria sopra l'organo che fa lume nelle lucciole; quella sopra la composizione delle zampe del *Gyrinus natator*; gli studî sopra le cocciniglie; il riassunto ed emendamento dei prospetti dei generi e delle specie degli Ortotteri; lo studio dei Crostacei brachiuri anomali. Ma i lavori, nei quali fin dal primo momento il Targioni-Tozzetti mostrò il suo ingegno speciale alle ricerche agronomiche, furono le memorie e le relazioni dei suoi lavori intorno alle malattie dell'uva e della vite, per cui fu uno dei primi a studiare in Italia l'*Oidium* e la *Fillossera* della vite. Per questi studi, citati con onore anche dagli stranieri, e per le profonde e numerose conoscenze che mostrò possedere nell'Entomologia, quando per la prima volta fu istituita nella nostra Classe la sezione d'Agraria, il pensiero di tutti corse ad Adolfo Targioni-Tozzetti, il quale, prima (1888) Socio corrispondente, venne di poi, nel 1899, eletto Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei.

Pari all'ingegno eletto il Targioni-Tozzetti ebbe l'animo gentile e però nel colera che nel 1854 infierì anche in Toscana, si distinse in qualità di medico straordinario del Governo. Fu oratore felice e scrittore forbitissimo. Di modi squisitamente affabili, si tenne sempre sereno nelle discussioni più ardenti. Per tali qualità di mente e di cuore, non ostante che fin da giovane avesse occupato posti eminenti, fu amato e stimato da tutti, inchinandosi reverente anche l'invidia innanzi a questa nobile figura.

Il Segretario Cerruti, a nome del Corrispondente Piccini, legge la seguente

Commemorazione del Socio, prof. ALFONSO COSSA.

Chi ebbe con ALFONSO COSSA una lunga dimestichezza, si dovette accorgere che la salute di lui andava declinando più di quanto portasse l'età! La persona fatta un po' curva, il passo non ben sicuro, il respiro alquanto difficile, la diminuita mobilità della fisonomia davano a divedere che il lavoro eccessivo, le lotte combattute a pro' della scienza e dell'insegnamento avevano fiaccata, non già doma, la sua fibra robusta. Nessuno però, nemmeno fra i suoi famigliari, avrebbe sospettato una fine così pronta e così improvvisa. Di ritorno da Roma, dopo aver preso parte ad una commissione esaminatrice, giunse il 16 del mese scorso a Torino; ove subito fu colto dal male che, apparso lieve in principio, si aggravò a un tratto e nelle ore mattutine del 23 lo tolse di vita. Nello scrivere questa frase trema la mia mano che lo salutò al suo passaggio da Firenze, poche ore prima che egli salisse quel letto, dal quale doveva in brevi giorni calar nella tomba.

Alfonso Cossa nacque del nobile Giuseppe (nella paleografia e nella diplomatica peritissimo) e della Maria Bagnacavallo in Milano il 3 novembre del 1833. Laureato in medicina a Pavia, ivi rimase prima come assistente di materia medica e botanica, poi come assistente di chimica mostrando per questa, di buon'ora, una forte inclinazione. Nella lettura fatta il 3 novembre 1893 all'Accademia Olimpica di Vicenza sopra Angelo Sala, il Cossa medesimo lo racconta « appassionato per la chimica, ma costretto ad *un amore platonico,* perchè in quel tempo (1858) nell' Università di Pavia non era concesso ai giovani studiosi di dedicarsi a ricerche sperimentali in un laboratorio, cercava di assecondare la *mia inclinazione* coll'applicarmi, come sapeva e poteva, allo studio della storia della scienza ». Pur troppo nella maggior parte delle Università italiane, anzi in quasi tutte, la chimica sonnecchiava, proprio in quell'anno in cui il nostro Cannizzaro dava alle stampe, sotto la modesta forma di *Sunto di lezioni,* la sua dottrina degli atomi, che dall'Ateneo di Genova doveva poi diffondersi in tutto il mondo, ispiratrice di preclare scoperte; valga per tutte quella del sistema periodico degli elementi.

Rimase il Cossa in Pavia farmacista aggregato all'Università, professore di chimica e direttore dell'istituto tecnico; finchè nel 1866, che portò il Veneto all'amplesso delle regioni sorelle, fu, per intromissione di Quintino Sella, di cui si era già guadagnata la stima, incaricato di fondare l'istituto tecnico ad Udine, ove rimase fino al 1871 come insegnante e come preside. Venne poi chiamato a dirigere la Stazione agraria di Torino e al tempo stesso a dar lezioni di chimica al Museo industriale. Nel 1878-79 fu anche incaricato dell'insegnamento della chimica agli allievi universitarî del primo biennio di matematiche; finchè, ritiratosi Ascanio Sobrero, a lui successe

nel 1882 nella cattedra di Chimica docimastica presso la Scuola degl'ingegneri (al Valentino) alla quale pochi anni dopo presiedè, come direttore, dedicandovi fino agli estremi giorni di sua vita le cure più amorose ed assidue.

Insegnante pieno di zelo, efficacissimo, amministratore coscienzioso e severo, il suo parere fu spesso, e sempre con frutto, richiesto per affari concernenti la pubblica istruzione, l'agricoltura e l'industria: sicchè il suo nome fu tra i preferiti a comporre le commissioni ed i consigli tecnici dei diversi Ministeri.

Ma l'insegnamento, i pubblici ufficî, per quanto gravosi, una parte soltanto assorbirono dell'instancabile operosità di Alfonso Cossa. Agli studî, ai suoi prediletti studî, alle sue esperienze egli si dedicò sempre con entusiasmo: e i numerosissimi lavori, che ci dette compiuti, faranno, come fecero, apprezzare il suo nome ovunque la chimica abbia studiosi. La sua opera scientifica si riferisce alla chimica agraria, alla chimica mineralogica, alla chimica inorganica. A quest'ultima era specialmente inclinato l'animo suo; ma, privo di scuole e di esempî, subì in principio quel che dicono *influenza dell'ambiente* e gli studî di botanica congiunse alle ricerche analitiche, donde i lavori di chimica agraria; più tardi dalle analisi dei terreni, delle roccie che gli originano col loro disfacimento, fu condotto alla petrografia e alla chimica minerale: finchè il nobile desiderio di risolvere i problemi, di chiarire i dubbî, che gli si erano presentati nelle diverse ricerche, lo spinsero all'indagine puramente scientifica. Questa l'evoluzione della sua mente quale apparisce dalla serie dei suoi lavori, quale egli stesso ebbe a narrarmi con parole ben acconce a dipingere lo sforzo, durato con volontà ferrea, per raggiungere senza aiuto altrui la meta, verso la quale il natural talento lo dirigeva.

Se pregevoli sono i suoi lavori di chimica agraria, in maggior considerazione meritano di esser tenuti quelli di petrografia e di chimica mineralogica: sono essi numerosissimi e comprendono, oltre le indagini microscopiche e le analisi dei minerali, anche gli studî sulla loro riproduzione artificiale. Sotto il nome di *Cossaite* va un minerale da lui studiato, che costituisce una varietà di Paragonite (gruppo delle miche). La scrupolosa minuzia posta dal Cossa nelle sue estesissime ricerche sopra i minerali lo condusse, talvolta, ad assurgere dalle modeste analisi a studî elevati di Chimica teoretica. Così a spiegarsi la presenza del cerio nelle apatiti, affatto omogenee, studiò la diffusione di questo elemento; e, avendo confermato la sua frequente associazione col calcio, istituì delle esperienze per dimostrare, con l'isomorfismo e con altri caratteri, le analogie della calce con l'ossido ceroso, onde a questo converrebbe la formola RO: come anche oggi altri crede, contro l'autorità dei più e, peggio ancora, contro l'evidenza dei fatti nuovi e dei già noti, ma novellamente interpretati. Il che ben poco toglie di merito al grande lavoro del Cossa, eseguito in un campo, ai tempi

suoi così oscuro, con tutti gli accorgimenti dell'arte, istruttivo per la prudente sobrietà delle conclusioni e per la larga messe di fatti importantissimi messi in luce.

Avea Quintino Sella nella sua gioventù studiato le forme cristalline di alcuni composti ammoniacali del platino. Invitato il Cossa a commemorare nella nostra Accademia l'illustre cristallografo, riprese la lettura di questi lavori; ed estendendo, come era suo costume, le ricerche bibliografiche sull'argomento, si accorse che, ad onta delle molte ricerche fatte, molto ancora poteva sperarsi. Messosi all'opera con quantità ingenti di materiale, si accinse a rivedere i lavori fatti, dal Magnus e dal Reiset in poi: e già dal 3 maggio 1885 cominciava a farci una lunga serie di comunicazioni, una più importante dell'altra, sulle basi ammoniacali del platino fino ad annunziarcene la scoperta di una nuova, contenente una molecola sola di ammoniaca, da lui chiamata *platososemiammina;* divenuta poi notissima, ed oggetto di dotte discussioni, sotto il nome di *base del Cossa.* Le ricerche compiute su questa sono minuziose ed eseguite magistralmente: le Memorie in cui sono descritte rimarranno veramente classiche; e fanno fede come, al contrario di quel che suole accadere, si affinasse in lui con l'età l'attitudine alla ricerca, si accendesse vieppiù il sacro fuoco dell'investigazione.

E poco più di un anno è trascorso da che vide la luce il suo prezioso Manualetto: *Nozioni fondamentali di Elettrochimica,* ove con la massima chiarezza e con tutti gli espedienti del maestro provetto s'insegnano i primi principî di quelle dottrine, di cui tanto si è avvantaggiata la chimica inorganica tornando, per rinnovati sentieri, al dualismo ond'ebbe la vita. Il Cossa sentì presto, anzi presentì, la trasformazione che la prediletta sua disciplina doveva fatalmente subire e vi si preparò per tempo con lo studio delle matematiche; non disdegnando tornare, già celebre e in età matura, nei banchi di scuola per far tesoro delle dotte lezioni del suo e nostro collega D'Ovidio: cui la sorte riserbava il pietoso ufficio di chiudere gli occhi all'amico adorato e porgere i primi conforti alla famiglia rimasta atterrita dalla sventura.

L'entusiasmo per la scienza non rese il Cossa insensibile alle finezze dell'arte: natura privilegiata, intendeva e sentiva colla stessa energia. Amava i classici e gli studiava molto; curava diligentemente la forma anche negli scritti scientifici: e della sua cultura fanno buona testimonianza alcune monografie; come quella, già citata, sopra Angelo Sala.

Bene, dunque, meritò il compianto collega l'onore di essere annoverato fra i membri di preclare Accademie e Società scientifiche: oltre che alla nostra Accademia, apparteneva ai XL, all'Accademia di Berlino, di Catania, di Napoli, di Bologna, all'Istituto Lombardo, all'Istituto Veneto, all'Accademia di Torino; della quale era, da più di un anno, venerato presidente. E alla stima e all'amicizia dei dotti si unì l'affettuosa devozione di quanti lo conobbero e videro l'uomo degno dello scienziato.

Il Presidente VILLARI, rilevando quanto l'Accademia sia stata duramente colpita colle gravi e numerose perdite di tanti illustri ed amati Colleghi, ritiene d'interpretare il sentimento della Classe, togliendo la seduta in segno di lutto. Avverte poi i Soci che le comunicazioni scientifiche le quali dovevano esser presentate durante l'adunanza, potranno esser trasmesse alla Presidenza.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute alla Presidenza nella seduta del 2 novembre 1902.

Astronomia. — *Osservazioni e calcolo d'orbita del pianetino JL 1902 (Venetia).* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Il pianetino fu ritrovato sulla lastra fotografica il 9 luglio 1902 dal dott. L. Carnera, nostro valoroso giovane, che, ad Heidelberg (Königsthul), sotto la direzione del prof. M. Wolf, fece numerose scoperte di pianetini.

L'astro fu osservato, per quanto io sappia, ad Heidelberg, a Vienna e da me col grande rifrattore di 38 cm. d'apertura. Le mie osservazioni si estendono dal 12 Luglio al 22 Settembre; le tre ultime avendo a guida un'effemeride approssimata calcolata dal dott. Berberich, tutte le altre essendo state fatte extrapolando dalle osservazioni il luogo approssimato, e ritrovando in tal modo successivamente l'astro.

Il quadro delle mie osservazioni è il seguente:

1902 Luglio 12	$11^h 51^m 31^s$	R. C. R.	Grandezza 11.5
α apparente	20 23 52.09	(9^n.163)	
δ "	— 20° 17′ 14″. 2	(0. 883)	
1902 Luglio 13	$10^h 43^m 6^s$	R. C. R.	Grandezza 11.5
α apparente	20 23 6.29	(9^n.418)	
δ "	— 20° 23′ 38″. 4	(0. 867)	
1902 Luglio 15	$11^h 10^m 56^s$	R. C. R.	Grandezza 11.5
α apparente	20 21 26.50	(9^n.291)	
δ "	— 20° 37′ 26″. 4	(0. 879)	
1902 Luglio 25	$10^h 51^m 40^s$	R. C. R.	Grandezza 11.5
α apparente	20 12 41.38	(9^n.151)	
δ "	— 21° 46′ 1″. 2	(0. 889)	
1902 Agosto 4	$12^h 13^m 9^s$	R. C. R.	Grandezza 11.6
α apparente	20 3 44.58	(9^n.082)	
δ "	— 22° 51′ 45″ 2	(0. 895)	
1902 Agosto 6	$10^h 27^m 36^s$	R. C. R.	Grandezza 11.5
α apparente	20 2 6.64	(8^n.878)	
δ "	— 23° 3′ 32″. 7	(0. 898)	

1902 Agosto 27	$10^h\ 6^m\ 5^s$	R. C. R.	Grandezza 12.0
α apparente	19 48 32. 29	(8. 903)	
δ "	— 24° 46′ 16″. 1	(0. 904)	
1902 Settembre 10	$10^h\ 0^m\ 47^s$	R. C. R.	(Posiz. un poco incerta)
α apparente	19 45 38. 10	(9. 272)	
δ "	— 25° 25′ 51″. 7 ?	(0. 896)	
1902 Settembre 20	$7^h\ 18^m\ 48^s$	R. C. R.	Grandezza 12.4
α apparente	19 47 35. 49	(8^n.741)	
δ "	— 25° 41′ 44″. 6	(9. 908)	

Colle tre mie osservazioni di Luglio 12 e 21 e di Agosto 4, il dott. Berberich calcolò un'orbita approssimata ed un'effemeride, colla quale potei osservare l'astro nelle mie tre ultime posizioni.

Il calcolo dell'orbita venne fatto da me utilizzando l'intero intervallo di 72 giorni sopra un arco eliocentrico di 16° $^1/_2$. L'ellisse è poco eccentrica, quindi π e φ si determinano male. Gli elementi seguenti derivano dalle mie osservazioni del 12 Luglio, 27 Agosto e 22 Settembre, l'ultima delle quali non era così facile come le altre, e perciò meno sicura.

Il pianetino venne denominato « Venetia » dal dott. Carnera dietro mia preghiera.

T_0 1902 Agosto 4 12^h Berlino

$$
\begin{aligned}
M &= 280^\circ\ 8'\ 51''.1 \\
\varphi &= 4\ 53\ 56.\ 4 \\
\omega &= 278\ 3\ 44.\ 5 \\
\Omega &= 115\ 2\ 14.\ 5 \quad \Big\}\ 1902.0 \\
i &= 10\ 15\ 25.\ 1 \\
\mu &= 813.\ 1842 \\
m_0 &= 11{,}8 \\
g &= 8{,}6
\end{aligned}
$$

Con questi elementi ho calcolato un'effemeride a 6 figure allo scopo di comparare tutte le osservazioni, in numero di 12 (2 di Vienna ed una di Heidelberga), col conto, coll'intenzione di correggere i prefati elementi, che resteranno sempre approssimati, ma tali da permettere la ricerca senza grave difficoltà del pianeta in seconda opposizione.

Gli scarti fra le osservazioni ed il calcolo, aggruppati alle date: 1902 Luglio 12, Agosto 1, Settembre 2 e Settembre 22 a mezzanotte di Berlino sono i seguenti:

$15\ \Delta\alpha$	$\Delta\delta$
0″.0	+ 1″.0
+ 6. 8	+ 2. 8
+ 2. 4	. . . .
0. 0	0. 0

Essi sono poco sicuri, ma l'eliminazione di essi migliorerà di qualche cosa gli elementi prefati.

Astronomia. — *Osservazioni della cometa Perrine b 1902.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

La cometa fu scoperta dall'astronomo Perrine all'Osservatorio Monte Hamilton in California all'alba del 1° Settembre; essa venne trovata a Marsiglia dall'astronomo Borrelly il 2 Settembre indipendentemente dalla primitiva scoperta. La cometa verso la fine di Settembre scorgevasi con difficoltà ad occhio nudo; verso l'11 Ottobre era osservata facilmente anche da chi ne ignorava la posizione; attualmente non vedesi più se non se ne sappia esattamente il luogo; fra breve si immergerà nei crepuscoli serotini, giacchè il 12 Novembre tramonta a 6^h50^m M. E. C.

Inizi di coda si videro fin dalle prime sere, poi l'astro fu in opposizione, e però essa vedevasi appena appena per iscorcio, indi, liberatasi la cometa dall'opposizione, la coda, sviluppantesi, ruotò intorno al circolo di declinazione.

Una determinazione esatta della sua lunghezza (ampiezza) io potei avere il 31 Ottobre a 6 $^1/_2$ sera, poichè, se, centrando nel nucleo si descriveva un cerchio con raggio eguale all'ampiezza della coda, sulla periferia di esso giaceva la stella 31849 Lalande in Ofiuco; d'onde l'ampiezza sensibile mi risultò di 1°26′ e l'orientamento per N 79°,8 E.

Un'orbita parabolica rappresenta per ora abbastanza bene le osservazioni. Secondo i recentissimi calcoli del dott. Elis Strömgren si ha:

Passaggio al perielio 1902 Nov. 23,889 Berlino
Distanza perielia 0,401 = 59950 migliaia di chilometri.

Longitudine del perielio	202°19′	1902.0
Longitudine del nodo	49 21	
Inclinazione	156 21	

La cometa quindi ha moto retrogrado; essa si accostò alla terra il 6 Ottobre fino a distarle 0,38; poi cominciò ad allontanarsene; un nuovo ravvicinamento (0,74) avrà luogo in Gennaio per essere verso la prima metà di Febbraio luminosa quanto era circa all'epoca della scoperta. L'astro quindi dopo il passaggio al perielio potrà essere osservato per lungo tempo nell'emisfero australe, e, probabilmente fino ad Aprile e Maggio 1903, in ambedue gli emisferi. La grande vicinanza della cometa (il 30 Novembre) a Mercurio, circa 0,02, permetterà una determinazione della massa del pianeta. Le posizioni da me fatte al 38 cm. d'apertura, con micrometro filare e amplificazioni fra 180 e 240, sono le seguenti:

1902 Settembre 3	$9^h\ 37^m\ 25^s$	R.C.R.
α apparente cometa	3 15 40. 46	$(9^n.720)$
δ » »	35° 35′ 33″. 9 N	(0. 746)
1902 Settembre 5	$10^h\ 41^m\ 46^s$	R. C. R.
α apparente cometa	3 13 16. 57	$(9^n.733)$
δ » »	36° 29′ 58″. 6 N	(0. 631)
1902 Settembre 8	$10^h\ 23^m\ 43^s$	R. C. R.
α apparente cometa	3 8 39. 15	$(9^n.742)$
δ » »	37° 59′ 31″. 6 N	(0. 623)
1902 Settembre 22	$10^h\ 58^m\ 46^s$	R. C. R.
α apparente cometa	2 5 54. 56	$(9^n.682)$
δ » »	49° 11′ 26″. 0 N	(9. 564)
1902 Ottobre 13		
$9^h\ 41^m\ 7^s$ R. C. R.	24° 58′ 25″. 0 N	(0. 622)
9 42 8 »	$18^h\ 42^m\ 34^s.05$	(9. 645)
1902 Ottobre 18		
$9^h\ 42^m\ 36^s$ R. C. R.	$18^h\ 4^m\ 22^s.23$	(9. 645)
9 43 19 »	12° 4′ 2″. 6 N	(0. 741)

Le osservazioni posteriori all'ultima data non sono ridotte.

Zoologia. — *Ricerche sul Cytorictes del Guarnieri.* Nota dei Soci G. B. GRASSI e P. FOÀ.

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

Chimica. — *Sulla non prevalenza dei sali potassici nella bile dei pesci marini.* Nota preliminare di C. U. ZANETTI, presentata dal Socio CANNIZZARO.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'acido monocloroplatinico* (¹). Nota I di ITALO BELLUCCI, presentata dal Socio CANNIZZARO.

Allo scopo di chiarire alcune questioni che mi si sono presentate nel corso di uno studio da me intrapreso sui platinati, fui indotto a ripetere alcune esperienze, eseguite già da moltissimi anni da diversi chimici e relative all'azione della luce solare sovra i miscugli di soluzioni di acido cloroplatinico $Pt\,Cl^6\,H^2$ e di idrati alcalini ed alcalino-terrosi. E vi fui indotto anche per il fatto che il Miolati nella sua Memoria sul tetracloruro di platino (²) accenna alla probabile interpretazione da darsi ai composti che prendono ori-

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Roma.
(²) Zeitschr. f. anorg. Chemie, XXII, 464.

gine in tali circostanze, concludendo egli col dire che sarebbe stato interessante un loro studio accurato.

I platinati, così poco conosciuti, costituiscono una di quelle ben rare categorie di composti della chimica minerale, per ottenere i quali si è esperimentata anche l'azione della luce solare, e specialmente il comportamento degli idrati di calcio e di bario di fronte all'acido cloroplatinico, sotto l'influenza della luce solare, è riuscito ad interessare parecchi chimici.

Avendo avuto occasione, come ho detto, di ripetere ed anche di estendere queste esperienze, ed essendo giunto a conclusioni di fatto che hanno portato all'identificazione di un nuovo acido clorurato del platino, già preveduto teoricamente dal Miolati (lòc. cit.), trovo opportuno riassumere nella presente Nota i risultati delle mie ricerche, facendo anzitutto precedere per sommi capi alcune notizie storiche.

Parte storica.

Fin dal 1832 Herschel (1) in una sua Memoria ha notato che rendendo fortemente alcalina con eccesso di acqua di calce una soluzione di ac. cloroplatinico e lasciando questa miscela esposta alla luce solare diffusa, soltanto dopo lungo tempo si formava in seno ad essa un leggerissimo precipitato, nel mentre che, esponendo la stessa miscela alla luce solare diretta, essa si intorbidava subito e si deponeva abbondantemente al fondo del recipiente una sostanza bianco-giallognola, finemente cristallina. Herschel ha creduto trattarsi di un platinato di calcio, e sebbene il composto non sia stato da lui studiato ulteriormente, pure, anche oggidì, nella letteratura dei composti del platino, queta sostanza è rimasta indicata col nome di *sale di Herschel*.

Nell'anno successivo I. W. Döbereiner (2) pubblicando alcuni suoi studî sui platinati ebbe occasione di esaminare il sale di Herschel, nel quale però riscontrò anche la presenza del cloro. L'interpretò quindi, a differenza dell'Herschel, non come un platinato di calcio, ma come una combinazione di tetracloruro di platino con platinato di calcio, attribuendogli con riserva la formola:

$$Pt\,Cl^4 + Ca\,O\ ,\ 3\,Pt\,O^2\,.$$

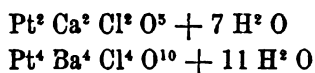
Seguono nel 1835 Weiss e Fr. Döbereiner (3), e Fr. Döbereiner da solo (4), i quali, studiando certi metodi di analisi dei minerali platiniferi degli Urali, analizzarono ripetutamente il sale di Herschel, in cui rinvennero sempre un

(1) Annal. der Pharmacie, *3*, 337 (1832).
(2) Poggend. Annalen, *28*, 180 (1833).
(3) Annal. der Pharmacie, *14*, 18.
(4) Ibid., *14*, 252.

quantitativo di cloro concordante perfettamente con quello trovato dal chimico precedente. Nell'attribuirgli una formola, in base ai loro risultati analitici, ammisero come possibile che il cloro fosse combinato soltanto con il calcio e ne dedussero la seguente formola di sale doppio:

$$3\,Ca\,Cl^2 + 2\,(Ca\,O\ ,\ 3\,Pt\,O^2\ ,\ 12\,H^2\,O).$$

Si giunge così all'anno 1870 in cui comparisce intorno a questo argomento lo studio più esteso ed accurato di E. Johansen (1) sul comportamento dell'acido cloroplatinico di fronte all'acqua di calce e di barite. Impiegando un tale eccesso di acqua di calce e di barite da far rimanere l'ambiente costantemente alcalino, il Johansen ottenne, per l'azione della luce solare diretta, dei precipitati bianco-giallognoli, del tutto simili tra loro, ed ai quali assegnò rispettivamente le formole:

$$Pt^2\,Ca^2\,Cl^2\,O^5 + 7\,H^2\,O$$
$$Pt^4\,Ba^4\,Cl^4\,O^{10} + 11\,H^2\,O$$

che, come vedesi, stabiliscono per i due sali un'analoga composizione, salvo che il sale di bario contiene un po' meno di acqua.

Il Johansen tentò di dare una formola più razionale ai composti ora ricordati, proponendosi il problema di indagare se il cloro in tali composti fosse legato al platino o alle basi alcalino-terrose, ma non potè giungere coi suoi tentativi a risultati concludenti (2).

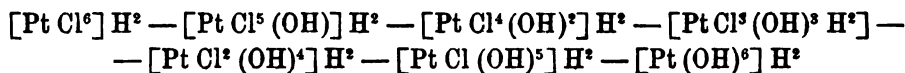
Dopo questo lavoro del Johansen, nessun chimico si è più occupato di questi composti. Ora, mentre da un lato, esaminando le numerose analisi eseguite sul sale di Herschel dai chimici citati, risalta subito una grande concordanza nei risultati analitici ottenuti, il che almeno fa ammettere che tale composto sia unico e ben definito, dall'altro lato i varî tipi di formole

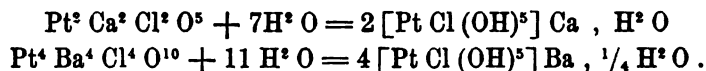
(1) Ibid., *155*, 204 (1870).

(2) A complemento della letteratura su questo argomento convien notare che nello stesso anno 1870 Topsöe (Berichte, *1870*, 462) pubblicava una Memoria sugli ossidi idrati del platino e sul platinato di bario, in cui asserisce di aver ottenuto un platinato di bario della formola $Ba\,Pt\,O^3 , 4\,H^2\,O$, scaldand all'ebollizione una soluzione di acido cloroplatinico con fortissimo eccesso di acqua di barite. Nelle identiche condizioni però il Johansen (loc. cit.) ha ottenuto costantemente, con la conferma di numerose e concordanti analisi, un prodotto clorurato. È lecito supporre che al Topsöe sia sfuggita in quel composto la presenza del cloro, sia perchè (come nota anche il Gmelin nel suo Trattato, vol. III, pag. 1075), le percentuali analitiche trovate dal Topsöe, ad eccezione ben s'intende del cloro, concordano molto bene con quelle ottenute dal Johansen nel caso del prodotto clorurato, sia perchè manca al Topsöe stesso la conferma analitica delle quattro molecole di acqua da lui attribuite al platinato ora indicato. È bene notare ciò perchè in quelle condizioni di esperienza, come ho potuto accertarmene anche io per prove dirette, si ottengono sempre prodotti clorurati, quali ha ottenuto il Johansen, e perchè va accolta quindi con la dovuta riserva la formola $Ba\,Pt\,O^3 , 4\,H^2\,O$ che nella incerta e molto scarsa letteratura dei platinati starebbe fino ad ora a rappresentare un tipo normale di sale.

destinati ad interpretarlo non ne dànno, come si vede, alcuna spiegazione razionale e soddisfacente.

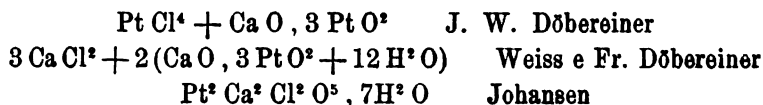
Il Miolati, nella sua Memoria sul tetracloruro di platino [1], parlando della possibilità dell'esistenza di una serie di acidi del platino, che dall'acido cloroplatinico $Pt\,Cl^6\,H^2$ giunge sino al platinico $Pt\,(OH)^6\,H^2$ per graduale sostituzione nel primo degli atomi di cloro con ossidrili:

$$[Pt\,Cl^6]\,H^2 - [Pt\,Cl^5\,(OH)]\,H^2 - [Pt\,Cl^4\,(OH)^2]\,H^2 - [Pt\,Cl^3\,(OH)^3\,H^2] -$$
$$- [Pt\,Cl^2\,(OH)^4]\,H^2 - [Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2 - [Pt\,(OH)^6]\,H^2$$

emise l'idea che i composti che si ottengono per azione della luce solare potessero rappresentare i sali di bario e di calcio dell'acido monocloroplatinico $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2$, vale a dire del penultimo termine, sconosciuto, della serie di acidi ora riportata. Secondo lui le formole date dal Johansen ai sali sopra ricordati, dovevansi semplificare nel modo seguente:

$$Pt^2\,Ca^2\,Cl^2\,O^5 + 7H^2\,O = 2\,[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ca\ ,\ H^2\,O$$
$$Pt^4\,Ba^4\,Cl^4\,O^{10} + 11\,H^2\,O = 4\,[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ba\ ,\ {}^1/_4\,H^2\,O\,.$$

La geniale intuizione del Miolati ha corrisposto infatti alla realtà, avendone io potuto constatare la giustezza dal lato sperimentale ed essendo riuscito ad identificare l'esistenza dell'acido monocloroplatinico $[Pt\,Cl\,(OH)^5]H^2$, del quale mi occupo appunto nella presente Nota.

Mi sembra opportuno osservare come questa nuova interpretazione concordi del resto perfettamente con tutti i risultati analitici trovati per il sale di Herschel dai chimici sovra ricordati.

Guardando anzitutto i tre tipi di formole date da essi per detto sale:

$Pt\,Cl^4 + Ca\,O\,,\,3\,Pt\,O^2$	J. W. Döbereiner
$3\,Ca\,Cl^2 + 2\,(Ca\,O\,,\,3\,Pt\,O^2 + 12\,H^2\,O)$	Weiss e Fr. Döbereiner
$Pt^2\,Ca^2\,Cl^2\,O^5\,,\,7H^2\,O$	Johansen

appare subito che in tutte il rapporto tra gli atomi di platino e di cloro è come 1 : 1 quale è richiesto dalla nuova formola $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ca\,,\,H^2\,O$.

Se si pone attenzione poi alle varie percentuali riportate nelle analisi relative, e che qui trovo inutile riferire, si hanno per i varî costituenti del sale di Herschel dati molto concordanti con quelli che derivano dalla formola $[Pt\,Cl\,(OH)^5]Ca\,,\,H^2\,O$. Soffermandoci, ad es., alle percentuali del cloro si ha:

	Weiss e Fr. Döbereiner	Fr. Döbereiner	Johansen	Calcol. per $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ca,\,H^2O$
Cloro °/₀	9.37	9.35	9.32	9.50

[1] Loc. cit.

La deduzione più notevole a favore della nuova interpretazione deve però ricavarsi dalle percentuali di acqua trovate sperimentalmente nel sale di Herschel dal Johansen e prima di lui anche dagli altri.

Per determinare l'acqua lo Johansen, dopo aver mescolato il sale con soda anidra (per evitare la perdita in acido cloridrico), lo scaldava fortemente in navicella di platino entro una canna di vetro, per cui passava una corrente di aria secca, trattenendo l'acqua che si sviluppava con un tubo a cloruro di calcio. In tali condizioni il sale $[PtCl(OH)^5]Ca, H^2O$, nuova formola spettante al sale di Herschel, non può svolgere in totale che tre molecole e mezzo di acqua, di cui due e mezzo derivanti dalla scomposizione dei cinque ossidrili ed una dall'acqua di cristallizzazione (vale a dire il 16.90 % di acqua). Ebbene in tal caso si hanno i seguenti dati di una concordanza molto significante:

	Fr. Döbereiner	Weiss e Fr. Döbereiner	Johansen	Calcol. per $[PtCl(OH)^5]Ca, H^2O$
$3 + \frac{1}{2} H^2O$	17.37	17.65	16.17	16.90

A ciò devesi aggiungere che di queste tre molecole e mezzo di acqua, come ho potuto provare sperimentalmente, una sola, quella di cristallizzazione, si allontana per riscaldamento a 100° e che occorre un innalzamento di temperatura molto più spinto per fargli perdere le altre due molecole e mezzo.

Bastino queste poche osservazioni per mostrare come le analisi eseguite in passato dai chimici sul sale di Herschel, per quanto varie e discordanti tra loro sien state poi le interpretazioni, conducano a giustificare per detto sale la formola $[PtCl(OH)^5]Ca, H^2O$.

Parte sperimentale.

Le prime prove che ho eseguite sono state dirette a ripetere le esperienze con gli idrati di calcio e di bario, che io ho poi estese anche all'idrato di stronzio.

In un grande vaso di vetro (capacità circa 3 litri), a pareti incolore ed a tappo largo smerigliato, ad una quantità di acido cloroplatinico (non eccedente dieci grammi), cristallizzato, purissimo, si aggiunge rapidamente la soluzione acquosa, satura a freddo, ben limpida, degli idrati di calcio, di bario o di stronzio, fino a riempire quasi completamente il recipiente. Dopo aver agitato il liquido per renderlo omogeneo, si espone il recipiente, chiuso dal tappo a smeriglio, alla luce solare diretta, con che, a capo di qualche minuto, cominciano a formarsi, in seno alla massa limpida del liquido, delle strie lattiginose che si estendono rapidamente fino a far diventare il liquido stesso fortemente torbido. Dopo qualche ora, a seconda dell'intensità luminosa, si trova che il color giallo della soluzione è scomparso ed al fondo del recipiente vi è uno strato abbondante di una sostanza leggermente giallognola, formata da

scaglie di splendore setaceo. La reazione è terminata; si decanta con rapidità ed il meglio possibile la maggior parte del liquido che trovasi sovra al precipitato e si agita questo ripetutamente e sempre decantando con soluzione diluitissima (5 %) di acido acetico, il quale, mentre in quel grado di diluizione scioglie soltanto minime quantità del composto, toglie le inevitabili, per quanto tenui, impurità di carbonati alcalino-terrosi, dovuti all'influenza dell'anidride carbonica atmosferica. Si filtra il precipitato alla pompa, si lava bene con acqua fredda, poi con alcool ed etere, e si asciuga tra carta. Condizione essenziale per ottenere questi composti puri si è che il liquido in seno a cui si svolge la reazione si mantenga decisamente alcalino, anche al termine di questa; altrimenti non si ha la decolorazione completa del liquido e si ottengono precipitati che non sono altro che miscugli. Operando nelle condizioni di esperienza ora citate, per azione della luce solare diffusa, invece che diretta, i precipitati si forman molto più lentamente, solo in capo a qualche giorno, ed aderiscono tutto intorno alle pareti interne del recipiente, sotto forma di pallottoline cristalline, non dissimili però in composizione chimica dalla polvere cristallina che si ottiene alla luce solare diretta. Effettuando e mantenendo poi la miscela dell'acido cloroplatinico con gli idrati alcalino-terrosi perfettamente all'oscuro, non si ha alcun precipitato nemmeno in capo a parecchi giorni.

I tre sali di bario, calcio e stronzio, ottenuti nelle condizioni ora descritte, sono l'un l'altro perfettamente simili, di colorito leggermente giallognolo, in laminette setacee, insolubili in acqua e negli ordinarî solventi neutri organici. Per analizzarli ho dovuto effettuarne la soluzione acquosa con l'aiuto di piccolissime quantità di acido nitrico, che ho preferito all'acido acetico, di cui ne sarebbe occorsa una quantità molto più grande, incomoda per i metodi di analisi che dovevo seguire. Riferisco i risultati ottenuti nell'analisi dei tre sali.

Sale di calcio $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ca\,,\,H^2\,O$.

Dalla soluzione, debolmente nitrica, di un peso determinato di questo sale si precipitò il platino a bagno maria con nastro di magnesio. Separato il platino si dosò nel filtrato o il cloro, precipitandolo con nitrato d'argento, o il calcio allo stato di ossalato e quindi di ossido.

1°. Gr. 0,3632 di sostanza, ridotti in tal modo, dettero gr. 0,1886 di platino e gr. 0,1385 di cloruro d'argento.

2°. Gr. 0,3872 di sostanza, id. id., dettero gr. 0,1998 di platino e gr. 0,1458 di cloruro d'argento.

3°. Gr. 0,4624 di sostanza, id. id., dettero gr. 0,2398 di platino e gr. 0,0718 di ossido di calcio.

4°. Gr. 0,8982 di sostanza, mantenuti in stufa a 100°, fino a peso costante, persero gr. 0,0395 di acqua.

Riferendosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per
	I	II	III	IV	$[PtCl(OH)^5]Ca, H^2O$
Pt	51.93	51.60	51.86	—	52.18
Ca	—	—	11.09	—	10.72
Cl	9.43	9.31	—	—	9.50
H^2O (a 100°)	—	—	—	4.39	4.82

Sale di bario $[PtCl(OH)^5]Ba, H^2O$.

Da un dato peso di sostanza sciolta nell'acqua acidulata con acido nitrico, si precipitò il platino a bagno maria per mezzo di magnesio in nastri. Separato il platino per filtrazione, si dosò nel filtrato prima il cloro per precipitazione con nitrato di argento e poi il bario come solfato.

1°. Gr. 0,4277 di sostanza ridotti con magnesio dettero gr. 0,1762 di platino e gr. 0,1276 di cloruro di argento.

2°. Gr. 0,3774 di sostanza, id. id., dettero gr. 0,1564 di platino, gr. 0,1149 di cloruro di argento, e gr. 0,1868 di solfato di bario.

3°. Gr. 0,3561 di sostanza, id. id., dettero gr. 0,1470 di platino, gr. 0,1080 di cloruro di argento, e gr. 0,1798 di solfato di bario.

4°. Gr. 0,7224 di sostanza, mantenuti in stufa a 100°, fino a peso costante, diminuirono di gr. 0,0236 di acqua.

Riferendosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per
	I	II	III	IV	$[PtCl(OH)^5]Ba, H^2O$
Pt	41.20	41.44	41.28	—	41.39
Ba	—	29.10	29.68	—	29.19
Cl	7.37	7.52	7.50	—	7.53
H^2O (a 100°)	—	—	—	3.26	3.83

Sale di stronzio $[PtCl(OH)^5]Sr, H^2O$.

Anche in questo caso si precipitò dalla soluzione nitrica del sale, il platino a bagno maria con nastro di magnesio. Dal filtrato, dopo separato il platino, si dosò prima il cloro con nitrato di argento e quindi, convenientemente concentrando la soluzione, lo stronzio allo stato di solfato.

1°. Gr. 0,3840 di sostanza così ridotti dettero gr. 0,1762 di platino e gr. 0,1280 di cloruro di argento.

2°. Gr. 0,4186 di sostanza, id. id., dettero gr. 0,1926 di platino, gr. 0,1414 di cloruro di argento e gram. 0,1784 di solfato di stronzio.

3°. Gr. 0,6302 di sostanza persero in istufa a 100°, fino a peso costante, gr. 0,0255 di acqua.

Questi risultati riferiti a 100 parti di sostanza, dànno:

	Trovato			Calcolato per
	I	II	III	$[Pt Cl (OH)^5] Sr, H^2 O$
Pt	45.89	46.01	—	46.28
Sr	—	20.32	—	20.81
Cl	8.24	8.35	—	8.42
$H^2 O$ (a 100°)	—	—	4.04	4.28

Questi sali di calcio, bario e stronzio, che hanno, come si vede, composizione chimica perfettamente analoga, sono gli unici che abbia potuto ottenere per via diretta. Esperimentando sovra l'acido cloroplatinico con gli idrati alcalini, nelle stesse condizioni che con gli idrati alcalino-terrosi si arriva a prodotti non più clorurati. Per ottenere quindi altri sali dello stesso tipo, non rimaneva che tentare una via indiretta coll'utilizzare uno dei tre sali alcalino-terrosi avuti direttamente e, meglio di tutti, il sale di bario $[PtCl(OH)^5] Ba, H^2 O$ che è quello che si presta meglio ad essere ottenuto in quantità relativamente grandi. A temperatura ordinaria o per debolissimo riscaldamento a bagno maria, con l'aiuto di forti quantità di acido acetico, si giunge ad ottenere, sebbene lentamente, una soluzione acquosa limpida di questo sale di bario, la quale trattata con la soluzione di uno degli acetati di argento, tallio, piombo e mercurio, in eccesso, perde il suo colore giallo, debolmente rossastro, decolorandosi completamente, e fornisce dei precipitati fioccosi, i quali, come si vedrà dall'analisi esposte qui sotto, derivano, come i tre sali alcalino-terrosi ora descritti, dallo stesso acido.

Questi precipitati tutti di colorito marrone più o meno scuro, vennero ben lavati con acqua fredda per decantazione e quindi raccolti su filtro: il filtrato passava limpido ed incoloro come pure le acque di lavaggio. Dopo essere stati lavati con alcool ed etere, seccati tra carta e poi su cloruro di calcio, fornirono all'analisi quantitativa i dati qui sotto riportati.

Paleontologia. — *Microflora e Microfauna nel disodile di Melilli in Sicilia* (1). Nota preventiva di L. PAMPALONI, presentata dal Corrispondente CARLO DE STEFANI.

Il disodile di Melilli in Sicilia si presenta come una sostanza di color giallo o giallo verdastro, assai elastico e molto facilmente sfaldabile in tante lamelle, specialmente dopo prolungate ebollizioni in soluzioni di potassa. Quando è secco, brucia con grandissima facilità, spandendo un odore caratteristico analogo a quello del cautchouc bruciato, che rivela appunto la pre-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio Botanico del R. Istituto Superiore di Firenze. 24 ottobre 1902.

senza di sostanze bituminose. Analogamente al disodile di Baviera e dell'Alvergna, anche quello di Melilli fa parte di un deposito terziario, riferibile con grandissima probabilità al Miocene medio.

L'esame chimico di questa sostanza ci rivela, oltre una percentuale di C 36,04, H 9,98, N 0,72, O 53,26, anche una abbastanza forte quantità di silice (circa il 15 %), proveniente, secondo l'Ehrenberg, in gran parte da resti di organismi che si sono andati man mano depositando. Il dott. Harz, nel disodile del Ries in Baviera, non ha trovato che scarsi residui di diatomee e di foraminiferi. Anche il prof. Baccarini ([1]) per quello di Melilli è giunto press'a poco ai medesimi resultati dell'Harz. La presenza della silice è spiegabile:

1) colla presenza di materie argillose intimamente collegate col disodile;

2) colla presenza di silice organica.

Il dott. Harz inoltre aveva rinvenuto nel disodile del Ries la presenza del pigmento clorofilliano di cui sarebbe provvista particolarmente un'alga conservatasi allo stato fossile, che egli aveva denominata *Palmella oligocaenica*. Nelle sue ricerche sul disodile di Melilli il prof. Baccarini ha confermata la presenza di una *Palmella*, ma non è riuscito in alcun modo, coi metodi ordinarî, ad estrarvi il pigmento clorofilliano.

Anche l'esame delle varie lamine, così come si trovano in natura, non dà resultati soddisfacenti. Per poterle avere così sottili da esaminarsi al microscopio, occorre una prolungata ebollizione in soluzioni abbastanza forti di potassa. Allora si viene a determinare fra esse una sfaldatura analoga a quella data dalle lamine di mica.

Così, esaminando le diverse lamelle sotto il microscopio, vi si possono osservare corpicciolì verdastri, rotondeggianti, riferibili forse a *Palmelle*, e numerosi micelî e spore di funghi, molto bene conservati.

Colla prolungata ebollizione nella potassa si ottiene inoltre il vantaggio di isolare dalle varie lamine frammenti di radici e di piccoli fusti che fra esse si possono trovare intercalati, non solo, ma ancora altre parti eterogenee che, o rimangono alla superficie delle lamine stesse, o, cadendo al fondo del recipiente nel quale si è operata la macerazione, possono esser raccolte filtrando o decantando il liquido.

L'esame da me fatto riflette non tanto il disodile stesso, quanto queste ultime sostanze; ed oggi mi è dato esporre succintamente i risultati ai quali sono giunto, riserbandomi di esaminarli accuratamente e corredarli con opportune tavole in un'altra Nota che è già alle stampe.

([1]) *Sopra alcuni microrganismi del disodile di Melilli* (Nota prelim.) Boll. Accad. Gioenia. Sc. nat. Catania, fasc. LXIV, 1900.

La microfauna e la microflora del disodile di Melilli sono rappresentate da funghi, da briofite, da aracnidi e da qualche insetto, tutti quanti così bene conservati da non rendere difficile la loro classificazione. Si comprende facilmente che, specialmente trattandosi di funghi, non si sono conservati tutti quei caratteri che servono di guida per il loro riferimento generico; perciò mi sono limitato a ricondurli tutti a famiglie determinate, adattando poi come determinazione generica quella dei generi a cui più si ravvicinano.

Ecco l'elenco delle specie di funghi da me trovate, di ciascuna delle quali darò la diagnosi:

FICOMICETI.

Saprolegneae.

Pythites disodilis.

Syn: Pythium disodilis. Baccarini.

Mycelium filamentosum tunc parce tunc crebre ramosum; hyphae incolores tunc uniformi crassitudine, tunc irregulariter varicosae; oogonia monospora, sphaeroidea, laevia, terminalia 70-100 μ.

Peronosporeae.

PERONOSPORITES.

1. Calothecae.

Peronosporites miocenica. Pampaloni

Oogonium membranosum, laeve, hyalinum, laxe circumdans oosporas sphaeroideas, 25-30 μ, dilute flavescentes; episporium cristis tenuibus praeditum, quae superficiem in decem areolas in binas series dispositas partiuntur.

2. Lejothecae.

Peronosporites sicula. Pampaloni.

Oogonium membranosum, laeve, hyalinum, laxe circumdans oosporas globosas, 20-25 μ, dilute flavescentes; episporium tenue, laeve, stratosum.

Ord. **PYRENOMYCETEAE.**

Fam. **Perisporiaceae.**

Subfam. ERISIPHEAE.

Uncinulites Baccarini. Pampaloni.

Perithecia subglobosa, tenui membranacea, nigra, astoma, 30-35 μ, appendicibus simplicibus, 18-25 cm. longis, apice uncinatis, perithecium fere aequantibus, indivisis, ad apicem fuscis ad basim atris.

Erisiphites Melilli. Pampaloni.

Perithecia sparsa, superficialia, sphaeroidea, undique clausa, atra, ceraceo membranacea, 170 μ, mycelio arachnoideo, persistente, appendicibus ramosis, flexuosis, sordide luteis, numerosis.

Subfam. PERISPORIEAE.

Perisporites hirsutus. Pampaloni.

Perithecia reniformia, simplicia, libera, virido carbonacea, cellulis fere 8 μ latis contexta, astoma, fere ad tertium sulco circulari praedita, 25-26 setulis atris, rigidis, perithecium fere aequantibus.

Perisporites setosus. Pampaloni.

Perithecia rotunda, simplicia, libera, virido-carbonacea, cellulis minutis fere 4 μ latis contexta, globosa, astoma, 18 setulis atris, rigidis, perithecium fere aequantibus.

Fam. **Sphaeriaceae.**
Sect. PHAEOSPORAE.

Chaetomites intricatus. Pampaloni.

Perithecia superficialia, 1 mm lata, gregaria carbonaceo-membranacea, aterrima, superne glabrata, inferne pilis densis, longissimis, tortuosis, simplicibus, fuscis, vestita.

Fam. **Hypocreaceae.**
Sect. PHAEOSPORAE.

Melanosporites Stefanii. Pampaloni.

Perithecia superficialia, simplicia, mollia, membranacea, sphaeroidea, flavescentia, villo fusco, stipato tecta; 6 sporis nigris, sphaeroideo-ellipsoideis 60-80 μ.

Fam. **Microthyriaceae.**
Sect. HYALODIDYMAE.

Microthyrites disodilis. Pampaloni.

Perithecia superficialia, sparsa, simplicia, membranacea, dimidiata, scutiformia, cellulis exiguis, poligonalibus, concentricis, 15-20 μ latis, fuscis, margine crenulatis.

Ord. HYPHOMYCETEAE.

Fam. Mucedineae.

Sect. AMEROSPORAE — Subsect. MICRONEMEAE.

Monilites albida. Pampaloni.

Hyphae septatae, hyalinae, vage ramosae, effusae; conidia globosa, elliptica, 18-21 μ, utrinque obtusa, in catenas breves, interdum ramosas disposita, hyalina, laevia.

Oltre queste specie di funghi che ho potuto classificare, esistono frammenti di micelî e numerosissime spore e torule così ben conservate da sembrare tuttora viventi, e molto probabilmente riferibili ai generi *Sordaria*, *Rosellinia*, *Macrosporium*, *Sphaeria*. In fine ho rinvenuto un verticillo di foglie appartenenti senza dubbio ad una briofita che però non ho potuto determinare.

La microfauna è, come sopra ho detto, costituita in special modo da aracnidi, con prevalenza del genere Acarus.

Così tra gli acari che vi ho trovato citerò:

Tyroglyphites miocenicus. Pampaloni.

$^1/_2$ mm. longus, 2 dmm. latus. Torax albidus, crassus, pedibus tuberculigeris. Corpus ovatum, sulculo dorsuali ad secundum par pedum in duas partes distinctum. Anticum conicum, latum. Abdomen ovatum, pedes carnei, setigeri. Mandibulae crassae, robustae.

Belbites disodilis. Pampaloni.

1 mm. longus, $^1/_2$ mm. latus. Abdomen obovatum, postice subacutum, supra convexum. Setae ad capitis toracis basim nullae. Femor inflatum. Color badio-ochraceus, uniformis. Pedes corpore multo longiores, nodosi, uniungues, setis robustis aucti. Setae stygmaticae perlongae.

Carabodites Pavesii. Pampaloni.

1 mm. longus, 3 dmm. latus. Color badio-ochraceus. Abdomen ovale, convexum, setis nullis albicantibus, longis et retrorsum directis. Anticum subcampaniforme. Stigmata parum prominentia. Setae stigmaticae clavatae. Pedes mediocres, corpore semper breviores. Ambulacra unco unico constituta.

Oppites Melilli. Pampaloni.

8 dmm. longus, $^1/_2$ mm. latus. Abdomen obovatum. Margines corporis setas cospicuas ferentes. Anticum triangulare, setis stigmaticis brevissime

clavatis, pyriformibus. Color corporis badio-ochraceus. Ambulacra uncis tribus constituta. Pedes omnes marginales.

A questi esemplari, che con abbastanza facilità ho potuto classificare, debbo aggiungerne altri non meno belli, ma più difficilmente riferibili ad uno piuttosto che ad altro genere.

Noto così alcune cocciniglie molto probabilmente riferibili, al genere *Aspidiotus*. Così pure tengo fra le varie preparazioni degli esemplari di *Heterodera*, in alcuni dei quali si trovano benissimo conservate perfino le uova, una magnifica larva di un insetto riferibile ad un libellulide, l'apparecchio masticatorio di un carabice, e numerosissimi altri frammenti, non determinabili, d'insetti.

Con questo termino l'elenco dei materiali organici finora da me ritrovati nel disodile di Melilli, materiali che faranno soggetto di future pubblicazioni.

Fisiologia. — *Esperienze sull' anestesia del labirinto dell' orecchio nei pesci cani (Scyllium catulus).* Nota del prof. G. Gaglio, presentata dal Socio Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; le Società zoologiche di Amsterdam e di Tokyo; la Società Reale di Hobart; le Società geologiche di Sydney e di Ottawa; il R. Istituto geologico di Stockholm; l'Istituto Teyler di Harlem; il R. Istituto geodetico di Potsdam; l'Istituto Smithsoniano di Washington; il Museo di storia naturale di Hamburg; il Comitato geologico di Zurigo; l'Osservatorio Harvard di Cambridge Mass.; l'Università di Tokyo.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

L'Accademia delle scienze di Córdoba; il R. Istituto geologico di Stockholm; le Società di scienze naturali di Batavia e di Stuttgart; l'Università di Giessen.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 novembre 1902.

Bassani C. — Intorno ai guasti delle fabbriche ed in particolare della Basilica Palladiana. Tivoli, 1902. 8°.

Brooks A. H. ecc. — Reconnaissances in the Cape Nome and Norton Bay Regions, Alaska, in 1900. Washington, 1901. 8°.

Colomba L. — Sulla presenza della dispersione nei pirosseni giadeitoidi in rapporto colla loro composizione chimica. Padova, 1902. 8°.

Dalla Vedova G. — Annibale Ferrero. Gotha, 1902. $^1/_2$ f.°

Felici R. — Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction. Leipzig, 1899. 8°.

Lockyer N. e *J. S.* — On some Phenomena which suggest a Short Period of Solar and Meteorological Changes. London, 1902. 8°.

Macoun J. — Catalogue of Canadian Plants. Part VII. — Lichenes and hepaticae. Ottawa, 1902. 8°.

Motta Coco A. — Sul movimento vibratile degli epitelî ciliati. Catania, 1902. 8°.

Id. — Sul potere osteogenetico della dura madre. Contributo all'istologia della dura madre encefalica in alcuni vertebrati. Catania, 1902. 8°.

Pflüger E. — Ueber das Verhalten des Glykogenes in siedender Kalilauge. Bonn, 1902. 8°.

Id. — Ueber den Glykogengehalt der Knorpel der Säugethiere. Bonn, 1902. 8°.

Schrader Ch. e *Spencer A. C.* — The Geology and Mineral Resources of a portion of the Copper River District, Alaska. Washington, 1901. 8°.

Viola C. — Beitrag zur Lehre von der Spaltbarkeit der Krystalle. S. l. 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 novembre 1902.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente Alfredo Capelli.

La formola fondamentale di Jacobi [1] sulla somma di due prodotti di quattro funzioni ϑ dà origine, come è ben noto, a molte altre formole analoghe che si deducono da essa sia coll'accrescere gli argomenti delle ϑ di mezze unità o di semi-moduli, sia col combinare fra loro linearmente le formole così ottenute. La presente Nota contiene qualche studio da me fatto sul modo possibilmente più semplice di ottenere tutte queste varie formole ed ha per suo primo risultato di condurre a tre tipi generali dai quali si possono poi dedurre tutte le formole in questione con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche. Anzichè trattenermi sulle altre cose che ancora dovrei aggiungere a complemento di questo risultato, ho però preferito limitarmi per ora alle poche formole ottenute per dedurre da esse la formola generale per l'addizione delle funzioni ϑ di una variabile. E ciò ho fatto tanto più volentieri, perchè la via da me seguita è tale da rendere la formola generale indipendente dalla natura delle caratteristiche che, nella mia trattazione, possono essere numeri reali o complessi quali si vogliano; e anche perchè ho ragione di ritenere che la formola stessa sia poco conosciuta,

[1] Ges. Werke, I, pag. 506. Cfr. anche Kronecker, *Ueber die Zeit und Art der Entstehung der Jacobischen Thetaformel* (Journal für Math. CVIII, 1891).

benchè essa non sia certamente nuova, almeno per il caso delle caratteristiche intere. Dalle indagini fatte in proposito mi è infatti risultato che questa formola non differisce sostanzialmente da quella già data dallo Smith, sempre nel presupposto non necessario delle caratteristiche intere, in una Memoria ormai antica (1) nella quale lo stesso Autore fa anche menzione, in nota, di alcune formole analoghe già date precedentemente dal Betti (2) e dall' Hermite (3).

I.

1. Dalla formola

$$(1) \qquad \vartheta_{\gamma g}(u) \equiv \vartheta_{\gamma g}(u, \omega) = e^{\pi i g \gamma} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i \omega \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)\left(u+\frac{g}{2}\right)}$$

che definisce, nel modo più generale, la funzione ϑ di argomento u e modulo ω, con caratteristiche reali o complesse quali si vogliano g e γ, si deduce facilmente, qualunque siano i numeri reali o complessi h e k:

$$(2) \qquad \vartheta_{\gamma g}\left(u + \frac{h}{2} + \frac{k}{2}\omega\right) = e^{-\pi i \left(\frac{k^2\omega}{4} + ku + \frac{3}{2}kg + \frac{3}{2}kh + h\gamma\right)} \vartheta_{\gamma+k, g+h}(u).$$

2. Se ora nella formola fondamentale di Jacobi:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\vartheta_{00}(z_1)\,\vartheta_{00}(z_2)\,\vartheta_{00}(z_3)\,\vartheta_{00}(z_4) + \vartheta_{10}(z_1)\,\vartheta_{10}(z_2)\,\vartheta_{10}(z_3)\,\vartheta_{10}(z_4) = \\ &= \vartheta_{00}(z_1')\,\vartheta_{00}(z_2')\,\vartheta_{00}(z_3')\,\vartheta_{00}(z_4') + \vartheta_{10}(z_1')\,\vartheta_{10}(z_2')\,\vartheta_{10}(z_3')\,\vartheta_{10}(z_4') \end{aligned}$$

in cui le z_1, z_2, z_3, z_4 sono affatto arbitrarie e

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} z_1' &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \\ z_2' &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3 - z_4) \\ z_3' &= \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \\ z_4' &= \frac{1}{2}(z_1 - z_2 - z_3 + z_4) \end{aligned} \right.$$

(1) *On a Formula for the Multiplication of four Theta Fonctions* (Proc. London, M. S. I, Maggio 1866).

(2) *La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni* (Annali di Mat. di Tortolini, III, pag. 26, 1860).

(3) *Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques* (Giornale di Liouville, 2a serie, III, pag. 27, 1858).

si diano alle z_ρ (per $\rho=1,2,3,4$) rispettivamente gl'incrementi $\frac{1}{2}g_\rho\omega+\frac{1}{2}\gamma_\rho\omega$, cosicchè le z'_ρ riceveranno rispettivamente gl' incrementi $\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega$, essendo le g' legate alle g, dalle stesse relazioni (a) che legano le z' alle z, cioè:

$$(a)'\left\{\begin{aligned} g'_1&=\frac{1}{2}(g_1+g_2+g_3+g_4)\\ g'_2&=\frac{1}{2}(g_1+g_2-g_3-g_4)\\ g'_3&=\frac{1}{2}(g_1-g_2+g_3-g_4)\\ g'_4&=\frac{1}{2}(g_1-g_2-g_3+g_4)\end{aligned}\right.\qquad (a)''\left\{\begin{aligned} \gamma'_1&=\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)\\ \gamma'_2&=\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4)\\ \gamma'_3&=\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4)\\ \gamma'_4&=\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4)\end{aligned}\right.$$

essa ci dà:

$$(4)\qquad \prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{00}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)+\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{10}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)=$$

$$=\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{00}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega\right)+\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{10}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega\right).$$

Dalla (2) si ha intanto:

$$\vartheta_{00}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)=e^{-\pi i\left(\frac{1}{4}\gamma_\rho^2\omega+\gamma_\rho z_\rho+\frac{3}{2}g_\rho\gamma_\rho\right)}\cdot\vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho)$$

$$\vartheta_{10}\left(z_\rho+\frac{1}{2}g_\rho+\frac{1}{2}\gamma_\rho\,\omega\right)=e^{-\pi i\left\{\frac{1}{4}\gamma_\rho^2\omega+\gamma_\rho z_\rho+\frac{3}{2}g_\rho\gamma_\rho+g_\rho\right\}}\quad .$$

e similmente per la $\vartheta_{00}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\,\omega\right)$ e $\vartheta_{10}\left(z'_\rho+\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{2}\gamma'_\rho\right)$;

cosicchè la (4) si può scrivere:

$$e^{-\pi i\left(\frac{\omega}{4}\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho^2+\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho z_\rho+\frac{3}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=4}g_\rho\gamma_\rho\right)}\cdot\left\{\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho)+e^{-\pi i\sum_{\rho=1}^{\rho=4}g_\rho}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho+1,g_\rho}(z_\rho)\right\}=$$

$$=e^{-\pi i\left(\frac{\omega}{4}\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho'^2+\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma'_\rho z'_\rho+\frac{3}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=4}g'_\rho\gamma'_\rho\right)}\cdot\left\{\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma'_\rho g'_\rho}(z'_\rho)+e^{-\pi i\sum_{\rho=1}^{\rho=4}g'_\rho}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma'_\rho+1,g'_\rho}(z'_\rho)\right\}.$$

Ma, in virtù delle sostituzioni ortogonali (a), $(a)'$, $(a)''$, si ha:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho^2=\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho'^2,\ \sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho z_\rho=\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma'_\rho z'_\rho,\ \sum_{\rho=1}^{\rho=4}g_\rho\gamma_\rho=\sum_{\rho=1}^{\rho=4}g'_\rho\gamma'_\rho.$$

Quindi resta semplicemente la formola:

$$(5)\qquad \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho+1, g_\rho}(z_\rho) =$$

$$= \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho g'_\rho}(z'_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g'_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho+1, g'_\rho}(z'_\rho)$$

che si può considerare come una prima generalizzazione della formola fondamentale di Jacobi. Vi sono però, come ora vedremo, altre formole di tipo analogo a questo che pur non sono contenute nella (5).

II.

1. Se poniamo per brevità:

$$\vartheta_{\gamma_1 g_1}(z_1)\, \vartheta_{\gamma_2 g_2}(z_2)\, \vartheta_{\gamma_3 g_3}(z_3)\, \vartheta_{\gamma_4 g_4}(z_4) = [\gamma_1, g_1; \gamma_2, g_2; \gamma_3, g_3; \gamma_4, g_4] = [\gamma, g]$$

$$\vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(z'_1)\, \vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(z'_2)\, \vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(z'_3)\, \vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(z'_4) = [\gamma'_1, g'_1; \gamma'_2, g'_2; \gamma'_3, g'_3; \gamma'_4 g'_4] = [\gamma', g']',$$

la formola (5) testè ottenuta si può compendiare così:

$$(\mathrm{I})\qquad [\gamma, g] + e^{-\pi i \Sigma g}[\gamma+1, g] = [\gamma', g']' + e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma'+1, g']'.$$

Se in questa formola si dà a g_1 l'incremento di 2 e conseguentemente a ciascuna delle g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 l'incremento di 1, e si tengono presenti le formole

$$\vartheta_{\gamma+2,g}(u) = e^{2\pi i g}\, \vartheta_{\gamma,g}(u), \quad \vartheta_{\gamma-2,g}(u) = e^{-2\pi i g}\, \vartheta_{\gamma g}(u)$$

$$\vartheta_{\gamma,g+2}(u) = e^{3\pi i \gamma}\, \vartheta_{\gamma,g}(u), \quad \vartheta_{\gamma,g-2}(u) = e^{-3\pi i \gamma}\, \vartheta_{\gamma g}(u),$$

se ne deduce:

$$(\mathrm{I})'\qquad e^{3\pi i \gamma_1}[\gamma, g] + e^{3\pi i(\gamma_1+1)}\, e^{-\pi i \Sigma g}[\gamma+1, g] =$$

$$= [\gamma', g'+1]' + e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1]'.$$

Dalla (I)' segue ora scambiando, come è lecito (poichè le formole (a) seguitano a sussistere anche se si scambiano le z colle z') le γ, g, z rispettivamente colle γ', g', z':

$$(\mathrm{I})''\qquad [\gamma, g+1] + e^{-\pi i \Sigma g}[\gamma+1, g+1] =$$

$$= e^{3\pi i \gamma'_1}[\gamma', g'] + e^{3\pi i(\gamma'_1+1)}\, e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma'+1, g']$$

e, finalmente, operando su questa formola come si è operato sulla (I) per ottenere la (I)':

$$\text{(I)'''} \qquad e^{3\pi i\gamma_1}[\gamma,g+1]+e^{3\pi i(\gamma_1+1)}\,e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1,g+1]=$$
$$=e^{3\pi i\gamma'_1}[\gamma',g'+1]+e^{3\pi i(\gamma'_1+1)}\,e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1,g'+1].$$

Dalle quattro formole (I), (I)', (I)'', (I)''' che scriveremo così:

$$[\gamma,g]+e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1,g]=[\gamma',g']'+e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1,g']'$$
$$[\gamma,g]-e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1,g]=e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma',g'+1]+$$
$$+e^{-3\pi i\gamma_1}\,e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1,g'+1]'$$

$$e^{-3\pi i\gamma'_1}[\gamma,g+1]+e^{-3\pi i\gamma'_1}\,e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1,g+1]=[\gamma',g']-e^{-\pi i\Sigma g'_1}[\gamma'+1,g']'$$
$$e^{-3\pi i\gamma'_1}[\gamma,g+1]-e^{-3\pi i\gamma'_1}\,e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1,g+1]=$$
$$=e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma',g'+1]'-e^{-3\pi i\gamma_1}\,e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1,g'+1]'$$

segue, sommando membro a membro, la formola:

$$[\gamma,g]+e^{-3\pi i\gamma'_1}[\gamma,g+1]=[\gamma',g']'+e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma',g'+1]'$$

che si può anche scrivere, in virtù delle $(a)''$:

$$\text{(II)} \qquad [\gamma,g]+e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma}[\gamma,g+1]=[\gamma',g']'+e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma'}[\gamma',g'+1]'.$$

Se poi le stesse quattro formole si sommano ancora membro a membro dopo avere moltiplicato l'ultima per -1, si ottiene:

$$[\gamma,g]+e^{-\pi i(3\gamma'_1+\Sigma g)}[\gamma+1,g+1]=[\gamma',g']'+e^{-\pi i(3\gamma_1+\Sigma g')}[\gamma'+1,g'+1]'$$

o anche, che è la stessa cosa:

$$\text{(III)} \qquad [\gamma,g]+e^{-\pi i(\Sigma g+\frac{3}{2}\Sigma\gamma)}[\gamma+1,g+1]=$$
$$=[\gamma',g']'+e^{-\pi i(\Sigma g'+\frac{3}{2}\Sigma\gamma')}[\gamma'+1,g'+1]'.$$

2. Osserviamo finalmente che dalle stesse quattro formole si hanno oltre alla formola già trovata (I)' che scriveremo come segue:

$$\text{(I)'} \quad [\gamma,g]-e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1,g]=e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma'}\left\{[\gamma',g'+1]'+e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1,g'+1]'\right\}$$

mediante analoghe combinazioni lineari, anche le formole:

$$\text{(II)}' \qquad [\gamma, g] - e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma}[\gamma, g+1] =$$

$$= e^{-\pi i \Sigma g'}\left\{[\gamma'+1, g']' + e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma'}[\gamma'+1, g'+1]'\right\}$$

$$\text{(III)}' \qquad [\gamma, g] - e^{-\pi i (\Sigma g + \frac{3}{2}\Sigma\gamma)}[\gamma+1, g+1] =$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma'}[\gamma', g'+1] + e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma'+1, g'].$$

Si osservi però che, come la (I)′ non differiva sostanzialmente dalla (I) da cui si deduceva dando alla g_1 l'incremento di 2, così la (II)′ non differisce sostanzialmente dalla (II) da cui si ricava dando l'incremento di 2 a γ_1; e precisamente in questo stesso modo si deduce dalla (III) la (III)′.

3. Nelle formole (I), (II), (III) le caratteristiche γ, g, γ', g' possono essere dei numeri reali o complessi assoggettati alla sola restrizione di rendere soddisfatte le relazioni $(a)'$ ed $(a)''$. Se però si scelgano per le $g_1, g_2, g_3, g_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ dei numeri razionali interi, e si voglia che riescano intere anche le caratteristiche $g'_1, g'_2, g'_3, g'_4, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4$, è necessario e sufficiente, come appare dalle $(a)'$ ed $(a)''$, che sia:

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \equiv 0 \pmod{2},$$

e sarà poi di conseguenza $\Sigma g' \equiv 0$, $\Sigma\gamma' \equiv 0 \pmod{2}$.

Nel caso di caratteristiche *intere* le formole (I), (II), (III) assumono dunque la forma più semplice:

$$\text{(A)} \qquad [\gamma, g] + [\gamma+1, g] = [\gamma', g']' + [\gamma'+1, g']'$$

$$\text{(B)} \quad [\gamma, g] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma, g+1] = [\gamma', g']' + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma', g'+1]'$$

$$\text{(C)} \quad [\gamma, g] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma+1, g+1] = [\gamma', g']' + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma'}[\gamma'+1, g'+1]'.$$

Si potrebbe dimostrare, su di che non ci indugieremo qui, non essendo ciò necessario allo scopo che per ora ci siamo prefisso, che le formole (A), (B), (C) rappresentano, nel loro insieme, la generalizzazione completa della formola fondamentale di Jacobi, nel senso che: *tutte le formole analoghe alla formola fondamentale di Jacobi che si possono da essa dedurre dando alle z incrementi di mezze unità o di semimoduli e combinando poi linearmente in un modo qualunque le formole così ottenute, sono necessariamente contenute, come caso particolare, nell'una o nell'altra delle tre formole* (A), (B), (C).

4. Dalla formola generale (I) e dalla (I)′ dell'art. 2 segue sommando o sottraendo membro a membro:

$$\text{(IV)}\qquad 2[\gamma,g]=[\gamma',g']'+e^{-\pi i(3\gamma_1+2g_1)}[\gamma'+1,g'+1]'+ \\ +e^{-2\pi i g_1}[\gamma'+1,g']'+e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma',g'+1]'$$

e

$$2e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1,g]=[\gamma',g']'-e^{-\pi i(3\gamma_1+2g_1)}[\gamma'+1,g'+1]'+ \\ +e^{-2\pi i g_1}[\gamma'+1,g']'-e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma',g'+1]'.$$

Di queste due formole però la seconda non differisce sostanzialmente dalla prima da cui si deduce immediatamente accrescendo le γ di un'unità.

Se poi sottoponiamo le g e γ alla condizione di essere razionali intere e soddisfare alle congruenze:

$$\Sigma g\equiv 0\ ,\ \Sigma\gamma\equiv 0\quad (\text{mod. } 2)\,,$$

la (IV) prende la forma più semplice

$$\text{(D)}\qquad 2[\gamma,g]=[\gamma',g']'+(-1)^{\gamma_1}[\gamma'+1,g'+1]'+ \\ +[\gamma'+1,g']'+(-1)^{\gamma_1}[\gamma',g'+1]'$$

in cui anche le g' e γ' riusciranno numeri interi.

Sarebbe facile dedurre le formole (A), (B), (C) dall'unica formola (D). Quest'ultima è ad esse preferibile dal punto di vista della simmetria; e specialmente poi per il fatto che qui particolarmente c'interessa, che tutte le formole fondamentali per l'addizione delle funzioni ϑ si deducono da essa, come ora passiamo a vedere, con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche g e γ e degli argomenti z, senza che sia poi anche necessario di combinare linearmente i risultati ottenuti come accade a chi voglia servirsi della formola fondamentale di Jacobi o delle sue generalizzazioni.

Del resto mi riservo di ritornare, quanto prima mi sarà possibile, sulla formola (D) per dimostrare in base ad un'accurata analisi della formola stessa, come ad essa si possa anche sostituire la formola più semplice:

$$2[\gamma,g]=[\gamma,g]'+(-1)^{g_1+\gamma_1+\frac{1}{2}\Sigma g}[\gamma+1,g+1]'+ \\ +(-1)^{g_1+\frac{1}{2}\Sigma g}[\gamma+1,g]'+(-1)^{\gamma_1}[\gamma,g+1]'.$$

III.

1. Se nella formola generale (IV) del paragrafo precedente prendiamo, essendo u e v affatto arbitrarie:

$$z_1=u+v,\quad z_2=u-v,\quad z_3=0,\quad z_4=0$$

onde, per le (α):

$$z'_1 = u\,,\quad z'_2 = u\,,\quad z'_3 = v\,,\quad z'_4 = v\,,$$

otteniamo:

$$2\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o)\,.\,\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o) =$$

$$= \vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(v) +$$

$$+ e^{-2\pi i g_1}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1+1,g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4}(v) +$$

$$+ e^{-3\pi i\gamma_1}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4,g'_4+1}(v) +$$

$$+ e^{-\pi i(2g_1+3\gamma_1)}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1+1,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4+1}(v).$$

Questo risultato, nel mentre che ci permette di abbracciare in un'unica formola le ordinarie 10 formole fondamentali per l'addizione delle funzioni ϑ, ci presenta il teorema di addizione sotto una forma assai più generale del consueto; giacchè le caratteristiche $g_1, g_2, g_3, g_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sono quì dei numeri affatto arbitrarî, reali od immaginarî.

Così, per esempio, se prendiamo:

$$\gamma_1 = i\,,\ \gamma_2 = i\,,\ \gamma_3 = 0\,,\ \gamma_4 = 0\,,\quad g_1 = i\,,\ g_2 = i\,,\ g_3 = 0\,,\ g_4 = 0\,,$$

cosicchè:

$$\gamma'_1 = i,\ \gamma'_2 = i,\ \gamma'_3 = 0,\ \gamma'_4 = 0,\quad g'_1 = i,\ g'_2 = i,\ g'_3 = 0,\ g'_4 = 0,$$

troviamo subito:

$$2\,\vartheta^2_{00}(o)\,.\,\vartheta_{i,i}(u+v)\,.\,\vartheta_{i,i}(u-v) =$$

$$= \vartheta^2_{i,i}(u)\,\vartheta^2_{00}(v) + e^{2\pi}\,\vartheta^2_{i+1,i}(u)\,\vartheta^2_{10}(v) + e^{3\pi}\,\vartheta^2_{i,i+1}(u)\,\vartheta^2_{01}(v) + e^{5\pi}\,\vartheta^2_{i+1,i+1}(u)\,\vartheta^2_{11}(v).$$

2. Se per le g e γ si prendono dei numeri razionali interi soddisfacenti alle condizioni:

$$(\alpha)\qquad g_1+g_2+g_3+g_4 \equiv 0\,,\quad \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

anche le g' e γ' riusciranno intere secondo le relazioni:

$$\begin{array}{ll}
g'_1 = \frac{1}{2}(g_1+g_2+g_3+g_4) & \gamma'_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)\\
g'_2 = \frac{1}{2}(g_1+g_2-g_3-g_4) & \gamma'_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4)\\
g'_3 = \frac{1}{2}(g_1-g_2+g_3+g_4) & \gamma'_3 = \frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4)\\
g'_4 = \frac{1}{2}(g_1-g_2-g_3+g_4) & \gamma'_4 = \frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4)
\end{array}$$

cosicchè la formola generale di addizione delle funzioni ϑ *a caratteristiche razionali intere* prenderà la forma più semplice:

$$2\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o)\,\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o) =$$
$$= \vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(v) +$$
$$+ \vartheta_{\gamma'_1+1,g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4}(v) +$$
$$+ (-1)^{\gamma_1}\,\vartheta_{\gamma'_1,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4}(v) +$$
$$+ (-1)^{\gamma_1}\,\vartheta_{\gamma'_1+1,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,g'_4+1}(v)\,.$$

Questa formola dà effettivamente l'espressione del prodotto

$$\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)$$

in funzione di ϑ col solo argomento u o col solo argomento v, comunque si scelgano i quattro numeri interi $\gamma_1, g_1, \gamma_2, g_2$; poichè è poi sempre possibile (come subito si riconosce) di determinare gli altro quattro numeri interi $\gamma_3, g_3, \gamma_4, g_4$ in modo da rendere soddisfatte le congruenze (α) evitando sia la soluzione $\gamma_3 \equiv g_3 \equiv 1$ per la quale sarebbe $\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o) = 0$, come la soluzione $\gamma_4 \equiv g_4 \equiv 1$ per la quale riuscirebbe nullo il coefficiente $\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o)$.

Quanto a questa formola generale, mi riservo di ritornare sull'argomento prossimamente, potendo essa, come è naturale, ulteriormente semplificarsi quando si prenda come punto di partenza, in luogo della formola (D), l'altra formola da me già accennata in fine del precedente paragrafo.

Fisica. — *Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

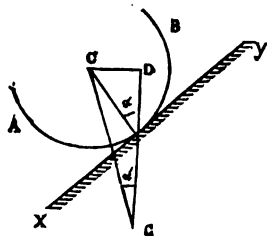
Le due faccie laterali del coltello di sospensione d'una bilancia o d'un pendolo, evidentemente non s'incontrano secondo una linea matematica ma sono raccordate da una superficie cilindrica, la cui sezione retta può considerarsi come approssimativamente circolare o ellittica ed il cui raggio di curvatura è bensì piccolissimo ma non è infinitesimo, e non è neppure tanto piccolo quanto sarebbe fisicamente possibile, perchè bisogna evitare che questa superficie sia troppo soggetta a rompersi o smussarsi, ciò che renderebbe il coltello pressochè inservibile.

La conoscenza di questo raggio di curvatura è utile nel caso delle bilancie, poichè essa da modo di osservare la relazione che passa fra esso raggio

e varie proprietà della bilancia come sensibilità, resistenza, attrito, e di determinare, non empiricamente ma razionalmente, la forma più conveniente da darsi allo spigolo.

Tale conoscenza inoltre è necessaria nel caso del pendolo, perchè la grandezza di questo raggio influisce sensibilmente sulla durata delle oscillazioni, e perciò esso entra nell'espressione della lunghezza ridotta del pendolo fisico per la determinazione della gravità, ed inoltre la diversità del suo valore nei diversi punti della sezione retta produce nelle oscillazioni con diverse ampiezze, una variazione della durata di cui non sarebbe possibile tener conto se non si conoscessero i valori di questo raggio per tutti i punti della sezione retta che vengono a contatto col piano d'appoggio.

Generalmente si considera come impossibile o molto difficile la determinazione di questo raggio, e nelle determinazioni della gravità si procura di eliminarne l'influenza osservando le durate d'oscillazione di pendoli di diversa lunghezza con un identico coltello; credo però che coi due metodi seguenti si ottenga un valore abbastanza approssimato di questo raggio di curvatura per una inclinazione qualsiasi del pendolo.

Il primo di questi metodi che si applica direttamente ai coltelli delle bilancie, consiste nell'osservare di quanto s'inclina il giogo in equilibrio, quando il piano d'appoggio viene inclinato d'un determinato angolo nel piano d'oscillazione; se il raggio di curvatura cercato fosse infinitamente piccolo, il giogo conserverebbe immutata la sua orizzontalità o la sua inclinazione, mentre se questo raggio è finito, il giogo seguirà alquanto l'inclinazione che si produce nel piano d'appoggio e la seguirà tanto più quanto maggiore è questo raggio e quanto minore è la distanza fra il centro di gravità del giogo e l'asse di curvatura.

Sia XY il piano d'appoggio, ABC la sezione retta della superficie dello spigolo supposta circolare, enormemente ingrandita, C il centro di questo circolo, G il centro di gravità del giogo; sia inoltre ϱ il raggio del circolo ABC e δ la distanza CG fra il centro di curvatura e quello di gravità, sia α l'angolo del piano d'appoggio col piano orizzontale ed α' l'angolo della CG colla verticale.

Perchè il giogo sia in equilibrio occorrerà sempre che il centro di gravità si trovi sulla verticale passante per il punto d'appoggio; se il piano d'appoggio è orizzontale, la CG sarà verticale e sarà $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$; se invece, come appare nella figura, il piano d'appoggio è inclinato d'un angolo α, perchè la suddetta condizione si verifichi, dovrà la CG deviare dalla verticale d'un angolo α' tale che sia:

$$CD = \varrho \operatorname{sen} \alpha = \delta \operatorname{sen} \alpha'$$

Se ϱ fosse uguale a δ dovrebbe essere $\alpha = \alpha'$, ossia il giogo s'inclinerebbe tanto quanto il piano d'appoggio, se ϱ è minore di δ sarà $\alpha' < \alpha$ ed il giogo s'inclina meno del piano d'appoggio, se però fosse $\varrho > \delta$ sarebbe $\alpha' > \alpha$, e l'inclinazione del piano d'appoggio causerebbe una inclinazione maggiore della posizione d'equilibrio del giogo che così costituirebbe una livella molto sensibile, valevole per elementi di superficie.

In alcune bilancie totalmente immerse, estremamente sensibili, nelle quali il coltello mediano era sostituito da due punte coniche di vetro terminanti con calotte sferiche di 0,25 a 0,5 mm. di raggio, ebbi spesso occasione di osservare questa grande variabilità della posizione d'equilibrio del giogo per effetto degli spostamenti del sostegno.

Dalla formula che dà la sensibilità della bilancia si ricava per δ il valore:

$$\delta = \frac{pL}{P \tang \beta}$$

dove p e β sono l'eccesso di peso in uno dei piatti e l'inclinazione che esso produce nel giogo, L è la lunghezza di ciascun braccio e P il peso del giogo. Si ha quindi:

$$\varrho = \frac{L}{P} \cdot \frac{p}{\tang \beta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha}$$

dove di solito, per la piccolezza degli angoli, potranno prendersi gli archi invece dei seni e della tangente.

Il suddetto ragionamento e il valore di ϱ che ne deriva, valgono anche se la sezione retta della superficie dello spigolo non è circolare; in tal caso ϱ è il raggio di curvatura di questa sezione nel punto di contatto col piano d'appoggio e varia colla posizione di questo punto.

È però da notare che in questo caso il valore δ varia alquanto coll'inclinazione del giogo, quindi converrà nella formula suddetta introdurre quel valore di δ che vale per l'inclinazione α' che si considera. Quindi se chiamiamo p_1 quel peso che collocato su uno dei piatti, produce sul giogo in bilico su un piano orizzontale l'inclinazione α', sarà:

$$\varrho = \frac{L}{P} \cdot \frac{p_1}{\tang \alpha'} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha}$$

ossia prendendo gli archi invece dei seni e della tangente, si avrà

$$\varrho = \frac{L}{P} \cdot \frac{p_1}{\alpha}$$

dove p_1 è quel peso che collocato su un piatto produce nel giogo in bilico

su un piano orizzontale la stessa inclinazione che vi produrrebbe l'inclinazione α del piano d'appoggio. Osservando le inclinazioni prodotte nel giogo da varî pesi e cercando poi le inclinazioni del piano d'appoggio che producono lo stesso effetto, si avranno varie coppie di valori di p_1 ed α che daranno i corrispondenti valori di ϱ.

È inoltre da notare che in questo caso gli angoli α ed α', dovranno esser contati rispettivamente dal piano orizzontale e dalla verticale, mentre nel caso che lo spigolo abbia la sezione retta circolare α ed α', si possono contare da un piano qualsiasi e dalla corrispondente posizione della CG e quindi si può prendere per α una qualsiasi variazione dell'inclinazione del piano d'appoggio e per α' la corrispondente variazione dell'inclinazione del giogo.

Per determinare α ed α' nelle comuni bilancie di precisione col lungo indice rivolto in basso, si può collocare entro la vetrina della bilancia un filo a piombo il cui punto di sospensione si trovi sul prolungamento dello spigolo del coltello e che cada davanti alla scala e coincida coll'indice del giogo in bilico su piano orizzontale. Allora, se si girano in senso inverso le viti di livello di destra e di sinistra della bilancia, il suo piano s'inclina e s'inclina altresì il piano d'agata d'un angolo α che è misurato dallo spostamento del filo a piombo sulla scala; il giogo invece s'inchina d'un angolo α' che è dato dallo spostamento dell'indice rispetto al filo a piombo.

Non ho seguito questo modo di procedere che tuttavia credo suscettibile di molta precisione purchè si abbia cura che il punto d'attacco del filo a piombo, sia esattamente sul prolungamento dello spigolo, e quando inoltre si osservino gli spostamenti con un mezzo d'ingrandimento; ho creduto più comodo di misurare le inclinazioni per mezzo di specchietti fissati al giogo ed al sostegno.

Ho incominciato anzitutto per cambiare uno dei vetri laterali della bilancia di precisione (di Deleuil) sostituendo un vetro da specchi al vetro comune attraverso il quale si vedeva molto confusamente; quindi ho fissato al giogo e precisamente all'indice a circa 3/4 della sua altezza dal basso uno specchietto parallelo all'indice, e perpendicolare al piano d'oscillazione e rivolto dalla parte del vetro da specchi suddetto. Fissai prima lo specchietto con cera, ma esso lentamente cadeva ruotando attorno all'indice, e ad ogni nuova determinazione occorreva regolar nuovamente la sua posizione, e perciò mi decisi di fissarlo con un mastice poco plastico di colofonia e gommalacca. Collocai inoltre dentro alla vetrina della bilancia un'asta d'ottone su piede di piombo, che portava in cima uno specchietto verticale che disponevo affatto contiguo al primo, regolando l'orientazione e l'inclinazione del medesimo in modo che i due specchietti fossero all'incirca nello stesso piano e che dirigendo sui medesimi un cannocchiale apparissero assieme nel campo, in essi apparissero le immagini di una scala verticale opportunamente collocata e queste immagini fossero intersecate dal reticolo all'incirca alla stessa divisione.

Riferisco come esempio i risultati di alcune determinazioni, osservando però che esse non possono esser prese nè come modello, nè come misura del grado di precisione ottenibile. Un poco per la mancanza di pratica del metodo, un poco perchè non era mio scopo la determinazione esatta del raggio di curvatura, ma solo di osservare in complesso come il metodo riuscisse in pratica, lasciai sussistere molte cause d' errore. Così, il cannocchiale non era del tutto stabile, la scala non era sempre verticale, nè ugualmente inclinata, non era ben visibile contemporaneamente in entrambi gli specchietti e spostandola variava alquanto la divisione intersecata dal reticolo, lo specchietto fissato al giogo era troppo piccolo o imperfetto e l'immagine della scala vi appariva un po' confusa; l' operazione necessaria per cambiare lo specchietto era un po' delicata e non volli intraprenderla. Inoltre è da notare che un grano di pulviscolo appena visibile, sul piano d' agata sotto il coltello, può far variare considerevolmente la posizione d' equilibrio del giogo, e finalmente io non tenni conto delle possibili differenze del valore di ϱ e di quelli di δ e della sensibilità che ne derivano, ed anzi inconsideratamente determinai quest' ultima rapidamente, con minor cura che non usassi per α ed α', mentre nella formula ha uguale importanza.

Il peso del giogo collo specchietto era $P = 248{,}7$ gr., la lunghezza di ciascun braccio $L = 18{,}25$ cm., quindi $L : P = 0{,}0733$. Nelle prime determinazioni 1 mgr. all' estremità del giogo faceva spostare l' immagine della scala, distante 213 cm. dagli specchietti, di 100 cm., quindi $\beta = 100:4260$; nell' ultima serie di determinazioni era invece $\beta = 111:4260$ nel senso del movimento delle freccie dell' orologio $\beta = 114:4260$ nel senso inverso.

Nella seguente tabella, nella 1ª e 2ª linea trovansi riferiti gli spostamenti a ed a' che subivano le immagini della scala per effetto delle inclinazioni α ed α' del sostegno e del giogo, nella 3ª linea trovasi il rapporto $\alpha':\alpha$, e nella 4ª il valore di ϱ in millimetri calcolato con molte approssimazioni. Le doppie linee verticali separano determinazioni eseguite in epoche e condizioni diverse.

a'	12,0	24,5	19,5	29,5	31	11,6	10,6	13,5	13,0
a	33,0	35,0	34,5	52,0	54	20,0	20,0	24	23
$\alpha':\alpha$	0,364	0,70	0,565	0,567	0,574	0,58	0,53	0,563	0,565
ϱ	0,0113	0,0218	0,0176	0,0177	0,0179	0,0160	0,0147	0,0156	0,0157

Ho riferito anche i risultati più discordi, sebbene le principali irregolarità fossero dovute a perturbazioni constatate negli apparecchi; la media di tutti i valori da $\varrho = 0{,}0165$ mm., l'errore probabile, nonostante tutte le circostanze sfavorevoli suddette, non pare che superi il millesimo di millimetro.

Ho applicato lo stesso metodo alla determinazione del raggio di curvatura della superficie dello spigolo del coltello d'una bilancia di Mohr fornita dalla casa Desaga di Heidelberg, strumento che sebbene da molti

anni sia in continuo uso e sia sottoposto a prove ed adattamenti in altri apparecchi, tuttavia continua a funzionare ottimamente.

Misurai anche in questo caso l'inclinazione del piano d'appoggio e del giogo mediante specchietti fissati ai medesimi; siccome il sostegno del giogo era appeso ad un uncino attorno al quale poteva oscillare, producevo l'inclinazione del sostegno spostandolo per mezzo d'un ostacolo contro il quale rimaneva appoggiato e deviato dalla verticale.

Il peso del giogo collo specchietto era di 45 gr., la lunghezza di ciascun braccio 12 cm., la scala era distante 107,5 cm. dagli specchietti e 5 mgr., collocati all'estremità del giogo facevano spostare di 9 mm. la corrispondente immagine della scala. Nella seguente tabella sono indicati con a ed a' gli spostamenti della scala prodotti dalle inclinazioni α ed α' del sostegno e del giogo, con $\alpha' : \alpha$ il rapporto di queste inclinazioni e con ϱ il raggio di curvatura in millimetri che se ne deduce.

a'	7	7	4
a	197	162	81
$\alpha' : \alpha$	0,0355	0,0432	0,0494
ϱ	0,0114	0,0138	0,0158

Da questa tabella risulterebbe che il raggio di curvatura della sezione retta dello spigolo non è costante, ma va decrescendo a misura che ci si allontana dal punto di mezzo, ossia che il taglio del coltello è un po' smussato, forse per effetto del lungo uso; tuttavia la precisione di queste esperienze addotte solo come esempio non mi pare che, senza ulteriore conferma, possa giustificare con sicurezza questa conclusione. Alle ragioni addotte precedentemente, relative alla cura non eccessiva con cui vennero eseguite queste determinazioni, bisogna aggiungere che quelle relative alla bilancia di Mohr sono le prime in ordine di tempo, che la disposizione dell'apparecchio per ciò e per la natura della bilancia era del tutto provvisoria e poco soddisfacente, che la bilancia essendo di precisione media si prestava poco a misure molto esatte, che per la poca sensibilità ossia per il valore relativamente grande di δ l'inclinazione del giogo variava pochissimo, e d'altra parte per le circostanze suddette non era del tutto impossibile anche l'errore di 1 mm., nel valore di a'; finalmente il coltello riposava su due pezzi cilindrici, concavi, di pietra dura, e l'inclinazione del piano tangente d'appoggio del coltello poteva essere un pò diversa da quella del sostegno osservata mediante lo specchietto.

Credo perciò che dalla precedente tabella si possa solo dedurre un valor medio di ϱ che sarebbe di 0,0137 mm., con un errore possibile di qualche millesimo di millimetro, valore non molto diverso da quello ottenuto per il coltello della bilancia di Deleuil.

Il metodo precedente non si applica direttamente ai coltelli dei pendoli, perchè in questi la distanza δ del centro di gravità dall'asse di curvatura della superficie dello spigolo è grandissima e quindi l'inclinazione che subisce il pendolo è minima anche quando s'inclina molto il sostegno. Occorrerebbe togliere il coltello e fissarlo in una specie di giogo da bilancia, oppure togliere la lente del pendolo e prolungare l'asta al disopra del coltello in modo che il centro di gravità venisse vicinissimo allo spigolo.

Un metodo che si applica direttamente ai coltelli dei pendoli, è quello di far riposare il coltello sopra un sistema di due coppie parallele di ruote coassiali, quale si usa nella macchina d'Atwood per diminuire l'attrito della puleggia, in modo che il coltello cada sulle intersezioni delle ruote al posto dell'asse della puleggia suddetta.

Occorrerà però che questo sistema di ruote sia costruito appositamente per il coltello, in modo che la distanza delle ruote di ciascuna coppia sia minore della lunghezza del medesimo. Inoltre nella macchina di Atwood le ruote sono tutte indipendenti, mentre credo utile per l'esattezza della costruzione e comodo per l'uso, che le due ruote coassiali di ciascuna coppia siano fissate ad uno stesso asse; così i cuscinetti son due per ciascuna coppia invece di due per ciascuna ruota.

Facendo oscillare o semplicemente deviare il pendolo, l'attrito che si genera sulle linee di contatto dello spigolo colle ruote, mentre da un lato oppone una resistenza al movimento del pendolo, dall'altro agisce in senso contrario al precedente sulle ruote facendole oscillare o deviare; se supponiamo che lo strisciamento della superficie dello spigolo sulle ruote sia nullo, abbiamo che le lunghezze degli archi descritti dalla superficie dello spigolo e dalla periferia delle ruote sono uguali e quindi le ampiezze di questi archi sono in ragione inversa dei raggi rispettivi; quindi se ϱ ed R sono i raggi della sezione retta dello spigolo, supposta circolare, e delle ruote, α ed α' le ampiezze degli archi descritti dal pendolo e dalle ruote, sarà:

$$\alpha\varrho = \alpha' \mathrm{R}, \qquad \varrho = \frac{\alpha'}{\alpha}\mathrm{R}$$

Se la sezione retta dello spigolo non fosse circolare, si otterrebbe collo stesso processo e colla stessa formula il valor medio del raggio di curvatura.

Da quanto precede risulta la possibilità d'una causa d'errore derivante da ciò che lo strisciamento non può essere rigorosamente nullo, come s'è supposto, altrimenti non si produrrebbe l'attrito che fa muovere le ruote. Questo strisciamento sarà tanto maggiore quanto maggiore è l'attrito che si manifesta nella rotazione delle ruote sui loro assi, esso tende a diminuire il valore di α e quindi far apparire il valore di ϱ maggiore del vero. Tuttavia non credo impossibile, nè di render minimo quest'errore usando ruote mobilissime nelle quali agli assi siano sostituiti coltelli riposanti su piani d'agata,

nè di determinare la grandezza di quest'errore sia sperimentalmente che teoricamente supponendo noti i coefficienti d'attrito radente e volvente e i diametri degli assi e della sezione retta dello spigolo.

Non ho potuto fare questo studio perchè non disponevo che di due tribometri molto imperfetti, uno destinato a dimostrare nella scuola le diverse specie di attrito e sufficiente a tale scopo ma disadatto per misure di precisione, l'altro appartenente ad una vecchia macchina d'Atwood in condizioni ancor peggiori.

Mi contentai perciò di verificare sommariamente l'applicabilità del metodo usando il primo dei suddetti tribometri, sebbene l'attrito degli assi delle ruote sui cuscinetti d'ottone apparisse grande. Siccome non avevo un coltello di sospensione lungo quanto la distanza delle ruote di ciascuna coppia, usai come asse d'oscillazione del pendolo un grosso tubo di vetro con foro capillare nelle cui estremità avevo infisso e fissato con mastice le parti quasi cilindriche di due grossi aghi da cucire che riposavano sulle intersezioni delle ruote. L'asta del pendolo fissata perpendicolarmente e nel mezzo di quest'asse era lunga solo circa 10 cm. quanto permetteva la posizione della base del tribometro; però talvolta feci anche uso di un'asta lunga circa 1 m., capovolgendo il tribometro e fissandolo con la base adattata contro la faccia inferiore di un tavolo.

Misurai le deviazioni del pendolo e di una delle ruote fissando ad essi due specchietti contigui ed osservando in essi con un cannocchiale con reticolo le immagini d'una scala verticale. Sarebbe stato preferibile far uso di due cannocchiali e due scale, uno dei quali a forte ingrandimento con relativa scala finamente divisa per osservare nello specchietto fisso alla ruota, la quale si sposta pochissimo.

Nella seguente tabella sono riferiti i risultati di una serie di esperienze; nella 1ª e 2ª linea trovansi gli spostamenti a ed a' delle immagini causati dalle deviazioni del pendolo e della ruota rispettivamente, nella 3ª linea il loro rapporto.

a	201	96	160	136,5	107	137,5	244	316	241,5	315
a'	2,5	1,2	2,1	1,8	1,5	1,75	3,7	3,7	3,1	4,5
$\frac{\alpha}{\alpha'}$	80,4	80	76,2	75,8	71,3	78,6	85,4	85,4	78	70

Il valor medio di α/α' che se ne deduce è 78,0 e siccome il diametro 2R della ruota era di 76 mm., risulta per il diametro dell'asse d'oscillazione del pendolo 76 : 78 mm. ossia 0,974 mm., mentre misurato direttamente con un compasso a vite lo stesso diametro risultò di 1,05 mm.

Le condizioni in cui furono eseguite queste determinazioni erano molto meno soddisfacenti di quelle relative al coltello delle bilance, e non sarebbe stato possibile migliorarle senza usare un altro apparecchio costruito appo-

sitamente e con cura, ed esse spiegano le differenze dei singoli valori di $a:a'$. La differenza tra il valore ottenuto per 2ϱ coll'apparecchio suddetto e quello ottenuto direttamente col micrometro conferma l'esistenza dell'accennata causa d'errore prodotta dallo strisciamento dell'asse sulle ruote; tuttavia questa differenza non è così grande che non si possa sperare di ottenere un buon valore del diametro cercato, sia diminuendo nel modo sopraccennato lo strisciamento, sia correggendo l'errore che esso produce.

Ho eseguito molte esperienze su questo modo di sospensione del pendolo, che così oscilla rigorosamente attorno all'asse di curvatura dello spigolo; esse potranno esser oggetto d'una prossima Nota. Sarà inoltre oggetto d'uno studio speciale la determinazione del raggio di curvatura degli spigoli naturali ed artificiali delle sostanze cristallizzate ed amorfe, la quale forse potrà fornire dati importanti sulla struttura molecolare delle medesime.

Chimica. — *Sull'acido monocloroplatinico* [1]. Nota II [2] di Italo Bellucci, presentata dal Socio Cannizzaro.

Sale di argento $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ag^2$.

La riduzione del composto venne fatta ad elevata temperatura in corrente d'idrogeno.

1°. Gr. 0,3398 di sostanza ridotti ad elevata temperatura in crogiuolo di Rose ed in corrente d'idrogeno dettero gr. 0,2612 di platino ed argento.

2°. Gr. 0,3748 di sostanza ridotti in egual modo, lasciarono per residuo gr. 0,2886 di platino ed argento. Questo residuo, staccato accuratamente dal crogiuolo, venne trattato ripetutamente fino all'ebollizione, con ac. solforico concentrato. Rimasero indisciolti gr. 0,1350 di platino.

3°. Gr. 0,3516 di sostanza egualmente ridotti dettero gr. 0,2704 di platino e argento, che, trattati come sopra, con ac. solforico concentrato, lasciarono indietro gr. 0,1270 di platino.

4°. Gr. 0,4867 di sostanza disaggregati con carbonato sodico-potassico, in crogiuolo di porcellana, dettero gr. 0.1292 di cloruro di argento.

Riferendosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per
	I	II	III	IV	$[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ag^2$
Pt + Ag	76.87	77.00	76.91	—	77.30
Pt	—	36.02	36.12	—	36.67
Ag	—	40.98	40.79	—	40.63
Cl	—	—	—	6.56	6.67

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Roma.
(2) V. pag. 241.

Sale di tallio $[PtCl(OH)^5]Tl^2$.

Per determinare e separare il platino dal tallio, ho adoperato il metodo usato dal Miolati ([1]) per il sale di tallio dell'acido tetracloroplatinico, metodo che dà risultati veramente buoni.

1°. Gr. 0,4232 di sostanza, trattati nel modo indicato di separazione del platino dal tallio, fornirono gr. 0,1131 di platino.

2°. Gr. 0,4112 di sostanza, trattati id. id., dettero gr. 0,1094 di platino e gr. 0,3726 di ioduro talloso.

3°. Gr. 0,4006 di sostanza, trattati id. id., dettero gr. 0,1068 di platino e gr. 0,3622 di ioduro talloso.

4°. Gr. 0,4410 di sostanza, disaggregati con carbonato sodico-potassico, in crogiuolo di porcellana, dettero gr. 0,0836 di cloruro di argento.

Riferendosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per
	I	II	III	IV	$[PtCl(OH)^5]Tl^2$
Pt	26.72	26.61	26.66	—	26.92
Tl	—	55.89	55.77	—	56.42
Cl	—	—	—	4.68	4.90

Sale di piombo $[PtCl(OH)^5]Pb, Pb(OH)^2$.

Per la precipitazione di questo sale si adoperò acetato neutro di piombo. Per la separazione del platino dal piombo, una data quantità di sostanza si evaporò ripetutamente in crogiuolo di platino con acido solforico concentrato, pesando il residuo di platino e solfato di piombo. Questo residuo poi si pesò nuovamente dopo averlo esaurito con acetato di ammonio che ne aveva asportato il solfato di piombo.

1°. Gr. 0,4031 di sostanza dettero gr. 0,4222 di platino e solfato di piombo e gr. 0,1036 di platino.

2°. Gr. 0,3960 di sostanza fornirono gr. 0,4157 di platino e solfato di piombo e gr. 0,1024 di platino.

3°. Gr. 0,4575 di sostanza disaggregati con carbonato sodico-potassico, dettero gr. 0,0774 di cloruro di argento.

Riportandosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato			Calcolato per
	I	II	III	$[PtCl(OH)^5]Pb, Pb(OH)^2$
$Pt + SO^4Pb$	104.73	104.96	—	104.93
Pt	25.70	25.86	—	25.53
Pb	54.11	54.02	—	54.23
Cl	—	—	4.18	4.65

([1]) Zeitschr. f. anorg. Chemie *XXII*, 460.

Sale di mercurio [Pt Cl (OH)^5] Hg.

Il platino si determinò quale residuo della calcinazione. Il cloro fondendo il composto con idrato sodico.

1°. Gr. 0,3230 di sostanza, calcinati, lasciarono per residuo gr. 0,1208 di platino.

2°. Gr. 0,2926 di sostanza, id. id., dettero gr. 0, 1097 di platino.

3°. Gr. 0.4388 di sostanza, fusi con idrato sodico, dettero gr. 0,1138 di cloruro di argento.

Riferendosi a 100 parti, si ha:

	Trovato			Calcolato per
	I	II	III	[Pt Cl (OH)^5] Hg
Pt	37.40	37.49	—	37.78
Cl	—	—	6.41	6.88

Acido monocloroplatinico [Pt Cl (OH)^5] H^2.

Sono riuscito ad ottenere una soluzione acquosa di acido monocloroplatinico [Pt Cl (OH)^5] H^2, agendo con acido solforico sul sale di bario [Pt Cl (OH)^5] Ba , H^2 O, nelle condizioni che qui riferisco. Ad una quantità pesata di sale di bario, seccato bene fra carta, ridotto in polvere finissima, si aggiunge entro un recipiente di vetro relativamente grande, a tappo largo smerigliato, un volume calcolato di soluzione di acido solforico $^{norm}/_{10}$, tale da non essere completamente sufficiente a precipitare tutto il bario del sale allo stato di solfato (c.c. 35 per ogni grammo di sale platinico, mentre teoricamente se ne richiedono c.c. 42,5). Si lascia stare così il recipiente in luogo fresco per almeno ventiquattro ore, curando di squassarlo molto spesso e vivacemente.

A capo delle ventiquattro ore, dopo essersi assicurati che più non vi rimangono quantità di acido solforico sensibili ai reattivi, si filtra il liquido per separarlo dallo strato di solfato di bario formatosi e dalla eccedenza del sale di platino indecomposto.

La soluzione dell'acido monocloroplatinico, così ottenuta, si presenta con un leggero colorito giallo-rossastro; ha reazione nettamente acida alle carte reattive; scompone lentamente a freddo, rapidamente a caldo, i carbonati, e si mantiene limpida anche in capo a qualche giorno.

Volli determinare anzitutto se in tale soluzione il platino ed il cloro si mantenevano nel rapporto voluto di 1:1. Da un volume qualunque di

essa, addizionata di un po' di acido acetico, precipitai a b. m. il platino con nastro di magnesio e nel filtrato, dopo la separazione del platino, il cloro per precipitazione con nitrato di argento. Ottenni così gr. 0,3872 di platino e gr. 0,2811 di cloruro di argento corrispondenti a gr. 0,0695 di cloro, il che porta ad un rapporto tra platino e cloro come 1:0,987, cioè molto vicino a quello richiesto di 1:1.

Stabilendo poi il titolo della soluzione di acido monocloroplatinico dal platino contenuto in un dato numero di c.c., ho titolato detta soluzione, convenientemente diluita con acqua, con una $^{norm}/_{10}$ di idrato sodico, adoperando come indicatore la fenol-ftaleina.

Dal comportamento acidimetrico risulta evidente la presenza nella soluzione di un acido bibasico, poichè per ogni atomo di platino furono necessarie per la neutralizzazione del liquido due molecole di idrato sodico.

I dati ottenuti sono i seguenti:

1°. Una soluzione contenente gr. 0,1526 di acido monocloroplatinico richiese per essere neutralizzata cmc. 9,95 di Na HO $^{N}/_{10}$, mentre la teoria ne richiedeva 9,62.

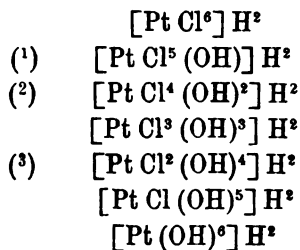
2°. Una soluzione contenente gr. 0,1914 di acido monocloroplatinico (di preparazione diversa dalla precedente), richiese per la neutralizzazione cmc. 12,40 di Na HO $^{N}/_{10}$, mentre la teoria ne richiedeva cmc. 12,07.

La soluzione dell'acido monocloroplatinico, dopo lungo soggiorno nel vuoto su acido solforico, lascia un residuo bruno sciropposo, deliquescentissimo, da cui non è possibile separare cristalli. Tale soluzione trattata con le soluzioni degli idrati di bario, calcio e stronzio rigenera gli stessi precipitati finemente cristallini che si ottengono direttamente per azione della luce solare; trattata con le soluzioni degli acetati di argento, tallio, piombo e mercurio precipita i rispettivi sali identici a quelli, sopra descritti, ottenuti per doppio scambio dal sale di bario. Neutralizzata però con soluzioni di varî idrati (di sodio, di litio) non dette mai prodotti cristallini, ma solo, dopo lungo soggiorno nel vuoto secco, dei residui vischiosi e deliquescenti

Da quanto sopra ho esposto mi sembra bastantemente provata l'esistenza dell'acido monocloroplatinico $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2$.

Il modo con cui dal sale di bario, avuto direttamente, sono riuscito a preparare per doppio scambio i quattro sali di argento, tallio, piombo e mercurio, e ad isolare la soluzione dell'acido libero, le relative proprietà di questa, comprovano in maniera indubitata l'esistenza dell'anione complesso $[Pt\,Cl\,(OH)^5]''$ che si è trasportato sempre integro dall'uno all'altro dei varî composti ottenuti. L'acido monocloroplatinico può perciò mettersi a lato degli acidi pentacloroplatinico, tetracloroplatinico, bicloroplatinico, in quella serie di acidi che dall'esacloroplatinico $Pt\,Cl^6\,H^2$ arriva sino al platinico per sostituzione gra-

duale di ossidrili agli atomi di cloro di quello:

$$[Pt\,Cl^6]\,H^2$$
(1) $$[Pt\,Cl^5\,(OH)]\,H^2$$
(2) $$[Pt\,Cl^4\,(OH)^2]\,H^2$$
$$[Pt\,Cl^3\,(OH)^3]\,H^2$$
(3) $$[Pt\,Cl^2\,(OH)^4]\,H^2$$
$$[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2$$
$$[Pt\,(OH)^6]\,H^2$$

della quale serie, trascurando l'esacloroplatinico, conosciuto già da molto tempo, non rimane sconosciuto che il tricloroplatinico $[Pt\,Cl^3\,(OH)^3]\,H^2$ e poco determinato il platinico $[Pt\,(OH)^6]\,H^2$.

Chimica. — *Sulla non prevalenza dei sali potassici nella bile dei pesci marini* (4). Nota preliminare di C. U. Zanetti, presentata dal Socio Cannizzaro.

Già da tempo, occupandomi di alcuni argomenti di chimica fisiologica e scorrendone la letteratura, mi colpì il fatto che nella maggior parte dei trattati, sia recenti che vecchi di fisiologia e chimica fisiologica (5), sta scritto: « Gli acidi biliari si trovano combinati in generale con il sodio nella bile degli animali terrestri, mentre nei pesci marini questi acidi sono combinati quasi esclusivamente al potassio ».

La mia meraviglia non deriva tanto dal fatto della prevalenza del potassio, il che poteva essere, visto che essa è riportata da un autore all'altro nella letteratura da me consultata e che abbraccia circa mezzo secolo, prevalenza quindi da tutti finora ammessa od accettata; ma dall'altro fatto che non potei riscontrare alcun lavoro o capitolo nelle opere esaminate, il quale accennasse essere stati eseguiti studî, per vedere quale fosse la ragione di questa specie di elettività per il potassio da parte dell'apparato biliare di animali, che vivono in un mezzo dove il potassio si trova in piccolissima quantità, mentre prevale fortemente il sodio (6); elettività che a mio avviso

(1) Miolati e Bellucci, Gazz. chim. italiana, *XXX* (II), 565.
(2) Miolati, Zeitschr. f. anorg. Chemie, *XXII*, 445.
(3) Miolati e Pendini (di imminente pubblicazione).
(4) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Catania.
(5) Bottazzi, 1991; Hammarsten, Hoffmeister, Neumeister, Wurtz, Bunge, Selmi Enciclopedia, 1869.
(6) Usiglio (Enciclopedia chimica del Selmi, vol. I, pag. 241), fornisce i seguenti dati per l'acqua del Mediterraneo: in 1000 parti cloruro di sodio gr. 29,442; cloruro di potassio gr. 0,505.

presentava non scarso interesse nel campo della biologia e della biochimica.

Tale lacuna, il non aver veduto in alcuno dei trattati, che pure mettono in rilievo tale particolarità, riportati dati numerici sulle quantità di sodio e potassio contenute nella bile dei pesci marini, ed infine, tenendo conto del fatto ormai stabilito, che nella bile umana la quantità di sodio si mantiene pressochè costante, mentre quella del potassio si può variare per l'aggiunta di sali potassici con gli alimenti, mi fecero dubitare sulla esattezza di quanto finora si è affermato, e stimai prezzo dell'opera fare delle analisi quantitative sul contenuto di sali sodici e potassici nella bile dei pesci marini, le quali determinazioni o avrebbero confermato il fatto di cui mi pareva interessante studiarne il perchè, ovvero mi avrebbero permesso, come a me sembrava più probabile, di togliere un errore che da tanto tempo si perpetuava.

L'essere a Catania e nella opportunità quindi di procurarmi fresco il materiale occorrente, mi determinò a trattare questo argomento, ma soltanto in questo autunno mi trovai in condizioni di tempo e di mezzi per occuparmene; nella presente breve Nota preliminare espongo i primi risultati ottenuti, i quali però sono sufficienti a far vedere che non erravo dubitando della prevalenza del potassio nella bile dei pesci marini.

Le esperienze si riferiscono al liquido biliare contenuto nelle cistifele fresche di alcuni pesci di mare venuti sul mercato di Catania.

Le analisi furono fatte sul residuo proveniente dallo incenerimento della bile dalla quale prima veniva separata la sostanza mucoide coll'acido acetico; quindi l'albumina per coagulazione, e ciò per eliminare la maggior parte delle sostanze proteiche che rende sempre difficile la calcinazione. Per brevità non descrivo in esteso il metodo analitico eseguito, dirò solo che dal residuo fisso, tolta la silice nel modo ordinario, vennero eliminate le basi pesanti, quelle terrose, alcalino terrose per mezzo dell'idrato di bario in eccesso, il quale nel contempo toglieva alla soluzione leggermente cloridrica i solfati ed i fosfati; l'eccesso di barite venne tolto per azione dell'acido carbonico in presenza di ammoniaca, così da trasformare in carbonato quel bario che era passato nella soluzione allo stato di sale solubile, ed infine eliminando per arroventamento tutti i sali ammoniacali. La determinazione dei sali alcalini e separazione venne fatta per mezzo del cloruro di platino; il sodio venne determinato sia per differenza, sia pesandolo sotto forma di cloruro, togliendo il platino dalla soluzione dalla quale era stato separato il cloroplatinato potassico.

I seguenti valori si riferiscono alla percentuale di ossidi alcalini contenuti nella cenere proveniente dalla calcinazione del liquido biliare *in toto* contenuto nella cistifele.

(Al nome scientifico del pesce faccio seguire quello in uso sul mercato di Catania).

	Ossido di sodio	Ossido di potassio
Xiphias gladius (Pesce spada). . .	47,52	4,56
Orcynus thynnus (Tonno)	48,64	3,22
Polyprion cernium (Addotto) . . .	45,14	6,60
Cerna gigas (Cirenga)	46,19	4,48

A maggior conferma dei risultati ottenuti ho voluto anche analizzare la cosidetta bile cristallizzata di Platner preparata, tanto dal liquido biliare del pesce spada che del tonno, seguendo il metodo indicato nell'Hammarsten; in quantochè, essendo come si sa questa bile cristallizzata costituita principalmente dal miscuglio dei sali alcalini degli acidi biliari, operavo con un materiale meno ricco di altri sali minerali.

Bile cristallizzata in 100 p. . . .	Na_2O	K_2O
Pesce spada	49,29	13,42
Tonno	42,78	12,63

Da queste determinazioni risulta quindi: che nella bile dei pesci di mare da me analizzata non si riscontra la prevalenza del potassio sul sodio, bensì il contrario. Altre determinazioni e l'analisi completa della bile del pesce spada affidai al laureando sig. Melfi, e delle ricerche e descrizione dei metodi seguiti nei varî processi di separazione, accennati anche nella presente Nota, sarà dettagliatamente fatta presto la pubblicazione nella Gazzetta chimica italiana; ed in allora spero poter anche citare la fonte di quelle prime notizie che, riportate dai varî autori, ci condussero tutti a ritenere che i sali degli acidi biliari nei pesci marini contenessero prevalentemente il potassio, notizia che secondo quanto è riferito nel vol. III della Enciclopedia del Selmi 1869, pag. 160, è attribuita a Bensch e Strecher, ma che fino ad ora non potei controllare nei lavori originali di questi autori per deficienza momentanea di mezzi bibliografici nell'Istituto da me diretto.

Fisiologia. — *Esperienze sull'anestesia del labirinto dell'orecchio nei pesci cani (Scyllium catulus).* Nota del prof. G. Gaglio, presentata dal Socio Luciani.

Si è discusso infino agli ultimi tempi, riguardo ai disturbi di movimento, che seguono al taglio dei canali semicircolari dell'orecchio, su di un punto fondamentale, se essi, cioè, siano da considerare, come un effetto della eccitazione del canale leso o come conseguenza della soppressa funzione del canale. Alle buone ragioni, che hanno sostenuto l'opinione che veramente si tratti di deficienza funzionale, io ho aggiunto il fatto, che la semplice anestesia dei canali, praticata nei colombi con l'applicazione di una soluzione di cocaina,

determina precisamente gl' identici disturbi, che si hanno in seguito alla distruzione del canale, e in una maniera temporanea, in rapporto all' azione fugace della cocaina (1).

Il metodo, che diede così buoni risultati, in quanto che ha permesso lo studio delle funzioni dei canali semicircolari, arrecando una minima lesione anatomica, meritava di essere esteso allo studio del labirinto uditivo di altri animali.

Ho così rivolto l' attenzione sui pesci cani, che sono stati oggetto di molte esperienze e discussioni da parte di Steiner, Loeb, Bethe ed altri.

Lo Steiner ha eseguito ricerche (2) sui canali semicircolari dei pesci cani, venendo alla conclusione, che si possono in questi animali distruggere largamente i canali semicircolari, senza che si veda comparire alcun disturbo di movimento, a meno che la lesione non sia complicata da una lacerazione del midollo allungato. Nel suo *Trattato di Fisiologia*, lo Steiner, poi, dice che nei pesci, specialmente nei pesci cani, si possono asportare i canali semicircolari, in modo che compaiano o no disturbi di movimento, secondo quello che si vuole. Quando si provocano disturbi di movimento, egli aggiunge, è il centro di origine del nervo acustico che viene leso, e queste lesioni producono una forma di disturbi perfettamente eguale a quella che si ha per asportazione dei canali semicircolari. Anche Tomaszewics e Kiesselbach hanno affermato, come la distruzione dei canali semicircolari nei pesci non determini disturbi di equilibrio.

Ma questi risultati non sono stati accettati, avendo essi trascurato di considerare le posizioni e i movimenti compensatorî, che sono conseguenza delle lesioni dell' orecchio interno (Mach e Breuer, Loeb).

D' altra parte (Loeb, Bethe) fu dimostrato, che il taglio degli acustici nei pesci cani, senza lesione alcuna del midollo allungato, dà luogo ai caratteristici cambiamenti di posizione e di movimenti.

Certamente i disturbi motorî, che presentano i pesci cani, in seguito alle lesioni dell' organo uditivo, non sono così intensi, come quelli che si osservano per gli organi analoghi dei piccioni, e possono sfuggire ad una osservazione superficiale. Ho cominciato, infatti, col fare larghe esportazioni del labirinto uditivo nei pesci cani e la prima impressione è stata veramente quella di sorpresa, nel vedere questi animali, rimessi nelle vasche, nuotare discretamente; ma presto notai, come l' animale per lesioni unilaterali inclinasse più da un lato e tenesse le pinne pettorali inegualmente espanse e nel muoversi facesse giri più o meno larghi di maneggio, come se ineguale fosse la forza di contrazione dei muscoli dei due lati del corpo. L' animale

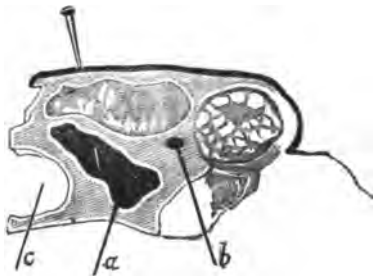
(1) G. Gaglio, *Esperienze sulla anestesia dei canali semicircolari dell' orecchio.* Archivio per le Scienze mediche, vol. XXIII, n. 3.

(2) Steiner, *Die functionen des Central-nervensystem,* ecc. Braunschweig, 1888.

mostrava, inoltre, in seguito alle mutilazioni, un pronunziato e duraturo abattimento generale.

A distinguere quanta parte di questi disordini spettasse alla mancanza dell' organo asportato, quanta a possibili irritazioni operatorie, doveva prestarsi bene l'applicazione locale della cocaina, capace di rivelare, mercè l'anestesia locale, i soli fatti di deficienza funzionale.

Il labirinto uditivo dello *Scyllium catulus* si presta assai bene per le applicazioni locali di cocaina, essendo ampio e di facile accesso. Esso risulta di una cavità (utricolo) entro la quale sboccano le ampolle dei tre canali semicircolari; ho pensato, quindi, di instillare dentro di essa qualche goccia di soluzione di cloridrato di cocaina. L'operazione è riuscita nel miglior modo ad animale integro, penetrando con la punta di un ago di Pravaz attraverso la cute e la parete cartilaginea del cranio direttamente entro la cavità dell' utricolo.

Mi fu facile orientarmi sul punto preciso, nel quale penetrare: ho tirato una linea ideale sulla superficie del cranio dall' avanti all' indietro, in modo da dividere la testa in due parti eguali, destra e sinistra, e un' altra linea perpendicolare alla prima, che andava da un forame branchiale all' altro; è dal punto di incrocio delle due linee, che dovevo muovere, andando in linea retta verso il forame branchiale e fermandomi press' a poco ad un terzo della distanza, per essere sicuro, che l' ago, infitto perpendicolarmente, penetrasse nel centro della cavità dell' utricolo.

Nei comuni esemplari dello *Scyllium catulus* di kg. uno di peso, questo punto era alla distanza di un cm. dal punto di incrocio delle linee descritte. Del resto, una volta passato con la punta dell' ago attraverso la parete del cranio, si sentiva dalla mancata resistenza di essere penetrati nella cavità, e quando non se ne era bene sicuri, vi si riusciva, inclinando opportunamente l' ago.

La figura qui sopra mostra uno spaccato, a grandezza naturale, della regione otica, come risulta per un taglio della testa, praticato lungo la linea da un forame branchiale all' altro; essa rappresenta la parte posteriore della metà destra della testa così tagliata. Si vede bene come ampio sia l' utricolo (*a*) e come facile ne sia l' accesso dall' esterno, segnato dallo spillo infitto;

b corrisponde alla sezione del canale orizzontale, esterno; *c* alla cavità cranica.

Per mezzo di iniezioni di liquido colorato con inchiostro di China o fucsina ho visto, che iniettando entro la cavità dell'utricolo 4-5 gocce di liquido, questo si diffondeva nell'utricolo e nei canali semicircolari, che ne rimanevano colorati. Il pericolo, che il liquido attraverso la via del nervo acustico potesse penetrare entro del cranio, non si mostrò fondato, poichè anche iniettandone quantità maggiore, non fu vista colorazione alcuna della parete interna del cranio e dell'encefalo. Ho anche iniettato a più riprese molte gocce di mercurio entro l'utricolo, senza che abbia mai constatato passaggio di mercurio entro la cavità cranica.

Per essere, talvolta sicuro, dell'azione localizzata della cocaina, ho aggiunto alla soluzione di essa una sostanza colorante e dopo l'esperienza, ucciso l'animale, ho verificato come essa si fosse diffusa solamente entro l'àmbito del labirinto.

Riferisco alcune esperienze:

I. 7 agosto. Grosso *Scyllium catulus* del peso di kg. 1,400.

Ore 9.20. Si toglie il pesce cane dalla vasca, e mentre un aiuto tiene ferma la testa su di un tavolo, inietto entro il labirinto uditivo, a sinistra, 3-4 gocce di una soluzione di cloridrato di cocaina 5 %, colorata con una goccia di inchiostro di China; l'operazione dura meno di un minuto. Rimesso rapidamente l'animale nella vasca, questo fa subito movimenti disordinati, che debbono in gran parte riferirsi alla reazione dell'animale per la violenza patita. Presto l'animale si calma e dopo 10-15 minuti si osserva, che esso nel nuotare affonda di più nell'acqua il lato sinistro; anche quando riposa al fondo della vasca, si osserva, che l'animale sta inclinato, poggiando di più verso il lato sinistro.

Nell'animale in riposo si osserva, che la posizione delle pinne pettorali non è simmetrica, quella sinistra più abbassata e meno espansa è in contatto col suolo, la destra è più sollevata e tocca appena col suo margine il suolo o non lo tocca affatto.

Eccitando l'animale per mezzo di lunghe pinze di legno a muoversi, esso nuota, inclinato verso il lato sinistro e si volta sempre da sinistra verso destra; esso, cioè, fa giri di maneggio più o meno larghi e sempre nel senso da sinistra verso destra. Costringendo l'animale per mezzo delle pinze di legno a voltarsi in senso opposto, esso vi riesce con difficoltà eseguendo movimenti disordinati e ripiglia subito la sua direzione verso destra.

Questi disturbi sono durati distintamente per un'ora e mezza, quindi cominciarono ad attenuarsi; osservato l'animale alle ore 15, appariva normale per la sua posizione di equilibrio simmetrica e per i giri che faceva nell'acqua, voltandosi indifferentemente ora verso destra, ora verso sinistra.

Ucciso l'animale, furono trovati colorati in nero dall'inchiostro di China tutto l'utricolo e in gran parte i canali semicircolari; nessuna traccia di coloramento nero fu riscontrata entro il cranio.

II. 9 agosto. *Scyllium catulus*, peso kg. 1,200.

Ore 14.25. Iniezione nel labirinto destro di poche gocce di soluzione di cocaina 5 %, colorata con un po' di fucsina.

Ore 14.33. L'animale nuota, inclinandosi verso il lato destro; quando sta in riposo sul fondo della vasca, poggia inclinato sul fianco destro, con la pinna pettorale destra abbassata. quella sinistra più dilatata e sollevata dal suolo.

Eccitato, nuota voltandosi sempre verso sinistra, fa, cioè, giri di maneggio da destra verso sinistra. Non si riesce, presentandogli degli ostacoli per mezzo di lunghe pinze di legno, a farlo girare in senso opposto, verso destra.

Nel nuotare muove con prevalenza la pinna pettorale sinistra.

Ore 15.10-15.30. Persistono i disturbi.

Ore 16.30. I disordini di equilibrio e di locomozione sono attenuati, ma persiste la tendenza a fare giri di maneggio verso sinistra.

Alla dimane l'animale appare perfettamente normale.

Questo animale servì per altre ricerche, ma quando esso morì, due giorni dopo la prima esperienza, furono trovati colorati dalla fucsina l'utricolo e i canali semicircolari del labirinto destro, nessuna traccia di coloramento entro la cavità del cranio.

III. 16 agosto. Grosso *Scyllium catulus.*

Ore 10. Si iniettano nel labirinto destro 2-3 gocce della soluzione di cocaina. Dopo 5 minuti l'animale inclina sul fianco destro e fa giri di maneggio verso sinistra; si toglie dalla vasca e si iniettano nel labirinto sinistro 2-3 gocce della stessa soluzione di cocaina.

Immediatamente dopo l'iniezione, rimesso l'animale nella vasca, compie rapidi movimenti di rotazione attorno l'asse longitudinale del corpo e nuota in posizione verticale, colla testa fuori l'acqua.

Calmatisi dopo uno o due minuti questi movimenti disordinati, l'animale nuota barcollando, oscilla, cioè, ora un po' verso il lato destro, ora un po' verso quello sinistro; non fa più giri di maneggio, voltandosi ora a destra, ora a sinistra.

Appare molto prostrato di forze e offre poca resistenza, quando lo si prende con le mani. Se per mezzo delle pinze di legno si mette l'animale a giacere su di un fianco o sul dorso, esso resta per qualche minuto in questa posizione anormale.

Dopo un'ora i disturbi persistono, ma appaiono un po' diminuiti.

Nelle ore pomeridiane l'animale sembra rimesso, ma non del tutto, mostrandosi ancora un po' abbattuto. Lo stesso stato presentava all'indomani; ucciso, fu riscontrata una lieve emorragia nel labirinto, così a destra, come a sinistra.

Queste esperienze dimostrano, che i disturbi motorî, che si osservano nei pesci cani in seguito alle instillazioni di cocaina entro il labirinto uditivo, sono fondamentalmente gli stessi di quelli che seguono alle mutilazioni del labirinto e al taglio del nervo acustico. Una differenza può essere notata nei risultati per quello che riguarda la direzione dei giri di maneggio, che il Loeb (1) in seguito al taglio dell'acustico vide seguire costante verso il lato del nervo leso, mentre in seguito alle instillazioni labirintiche di cocaina i giri di maneggio si fanno di regola verso il lato normale. Tuttavia anch'io ho osservato una volta, e veramente in seguito ad instillazioni entro il labirinto di una soluzione molto concentrata di cocaina (10 %) farsi giri di maneggio verso il lato operato.

Secondo Bethe (2) in seguito al taglio dell'acustico nei pesci cani, non si hanno risultati costanti riguardo alla comparsa e alla direzione dei giri di maneggio, ma sul proposito debbo fare osservare, che i giri di maneggio

(1) Loeb, *Ueber den Antheil des Hörnerven an den nach Gehirnverletzung auftretenden Zwangsbewegungen* ecc. Pflüger's Archiv, Bd. 50, 1891.

(2) Bethe, *Die Locomotion des Haifisches* ecc. Pflüger's Archiv, Bd. 76, 1899.

sono talvolta molto larghi e possono sfuggire ad una osservazione superficiale; l'animale, per esempio, che si trova in una vasca discretamente grande, della lunghezza di 2 metri, riesce a dirigersi nel nuoto da un'estremità all'altra della vasca e il maneggio non è allora rivelato, che dal voltarsi che fa sempre da un lato, quando esso torna indietro, e dalla difficoltà che si prova quando si vuole costringerlo a voltarsi dal lato opposto. Debbo inoltre notare, che il Loeb e il Bethe hanno fatto le loro esperienze sullo *Scyllium canicula*, mentre io ho tentato le prime esperienze su questo animale e poi ho dovuto limitarle allo *Scyllium catulus* o gattuccio di mare, che è di mole assai più grande e che mi offriva il vantaggio di avere una regione otica estesa ed un utricolo ben capace. Sono le esperienze su questo animale che mi hanno convinto di avere raggiunto un'azione ben localizzata nelle instillazioni labirintiche di cocaina.

Ad ogni modo, ciò che risulta fuori di ogni dubbio è, che i disordini motorî, che seguono nei pesci cani al taglio dell'acustico, alle asportazioni del labirinto o alle instillazioni di cocaina entro il labirinto, sono della stessa natura ed essenzialmenle dovuti alla mancanza dell'organo o alla deficienza funzionale di esso e non ad irritazioni operatorie.

Io non nego, che anche le eccitazioni dirette dei canali semicircolari, come il Breuer [1] specialmente ha dimostrato nei piccioni, possano dar luogo a movimenti ben determinati e caratteristici, benchè debba osservare, che, trattandosi di organi delicatissimi, una irritazione, che passi certi limiti, deve equivalere alla distruzione funzionale dell'organo. È quello che ho dovuto tenere presente, quando per via di controllo e di completamento delle mie ricerche, ho iniettato entro il labirinto dei pesci cani sostanze diverse.

Premetto anzi tutto, che l'iniezione di poche gocce di liquido indifferente, come acqua di mare sterilizzata, entro il labirinto dei pesci cani, non diede luogo a manifestazioni motorie di sorta; inefficace si mostrò anche l'instillazione di poche gocce di una soluzione di cloruro di sodio al 5 °/₀, e quando ho pensato di iniettare soluzioni saline di più alta concentrazione, sorse subito il dubbio, se con questi mezzi realmente avrei eccitato o non invece distrutto le espansioni nervose dell'acustico.

Più adatto mi parve ad esercitare un'eccitazione meccanica il mercurio metallico, come quello che suddividendosi in goccioline minutissime e pesanti, avrebbe potuto avere un'azione analoga a quella degli otoliti. Queste esperienze ho ripetuto parecchie volte, iniettando entro il labirinto dei pesci cani, ora di un lato, ora di tutti e due i lati, ora poche gocce, ora molte gocce di mercurio, senza che abbia potuto osservare disordini motorî ben definiti; sicchè esse confermano pienamente il concetto fondamentale, che è la paralisi labirintica quella, che costantemente determina disturbi motorî.

[1] Breuer, *Neue Versuche an den Ohrbogengängen*. Pflüger's Archiv. Bd. 44, 1889.

Venendo ora alla interpretazione dei fatti osservati, se ci teniamo stretti alla immediata osservazione dei disturbi motorî, poichè in seguito alla instillazione della cocaina nel labirinto di un lato, l'animale affonda di più nell'acqua il lato dalla parte dove s'è fatta l'iniezione, e nel cambiare direzione, quando nuota, si volta sempre verso il lato opposto a quello iniettato, dobbiamo convenire, che l'animale si comporta, come se non fosse più simmetrica la forza muscolare dei due lati, e precisamente, come se fosse paretico il lato corrispondente a quello della praticata iniezione. L'animale, nel quale s'è iniettata cocaina in tutti e due i labirinti, non fa più giri di maneggio, ma barcolla nel muoversi, perchè la forza della contrazione muscolare è diminuita così nel lato destro, come in quello sinistro. Esso è così debole, che si lascia mettere a giacere nelle posizioni non naturali sul fianco o sul dorso e si lascia prendere con le mani e tirare fuori della vasca, dibattendosi appena. Questa debolezza muscolare, consecutiva alle instillazioni di cocaina entro il labirinto e che dura temporaneamente in rapporto all'azione temporanea della cocaina, mi pare veramente il fatto più importante delle lesioni labirintiche.

Per avere un'idea precisa di quanto diminuisse lo sforzo muscolare in seguito alle instillazioni di cocaina, ho pensato di praticare delle misure. Ho legato alla coda del pesce cane un lungo nastro, che dall'altro capo era in connessione con un apparecchio adatto a indicare lo sforzo, che il pesce, eccitato a muoversi, avrebbe spiegato. Per queste misure mi sono valso ordinariamente di una bilancetta a spirale, ma siccome essa non segnava che a quarti di chilogrammo, per misure più precise ho fatto passare il laccio, che ad uno estremo era legato alla coda del pesce, attraverso una carrucola e ho posto all'altro estremo un sacchetto con dei pesi; potevo così notare il peso, che il pesce era capace di sollevare, l'altezza a cui lo faceva arrivare e il peso massimo, che faceva equilibrio allo sforzo dell'animale.

Ho così trovato, che un pesce cane del peso di kg. 1,400, allo stato normale, segnava gr. 250-500 e qualche volta arrivava fino a gr. 1000. Dopo l'iniezione di poche gocce di cocaina nel labirinto di sinistra, il pesce segnava gr. 250 e non arrivava più che difficilmente a gr. 500. Dopo l'iniezione praticata anche a destra il limite massimo era indicato da gr. 250.

Un altro pesce del peso di kg. 1,800, allo stato normale, sollevava con facilità dei pesi di kg. 1-1,500 e qualche volta arrivava fino a kg. 2.

Dopo l'iniezione di cocaina nel labirinto di destra, esso non sollevava più che pesi di gr. 500-800 e, dopo l'iniezione praticata anche all'altro lato, innalzava solamente pesi di gr. 100-200, arrivando appena negli sforzi massimi a gr. 300.

Queste esperienze dimostrano, che dopo l'iniezione di cocaina entro il labirinto di un lato, la forza muscolare del pesce diminuisce della metà e anche più e, dopo l'iniezione bilaterale, essa scende ancora infino al quarto della forza primitiva e anche più sotto.

La diminuzione della forza di contrazione di determinate masse muscolari ci spiega in una maniera naturale i cambiamenti di posizione e i disturbi motorî che presentano i pesci cani in seguito alle lesioni labirintiche e fa apparire artificiose e ingombranti le ipotesi, che si sono agitate, della vertigine, del deficiente senso dello spazio o della alterata funzione geotropica. Già basta osservare, come precisi e costanti siano i cambiamenti motorî, che si determinano in seguito alla distruzione o all'anestesia del labirinto, per escludere quelle spiegazioni, che dovrebbero fondarsi su di una confusione di percezioni e di movimenti dell'animale. L'orientazione nello spazio, la funzione statica (geotropica, Loeb) più che l'espressione funzionale di un solo organo, appare, come la risultante della complessa coordinazione sensitiva e motoria, che ha luogo nei centri nervosi.

Le ricerche sui pesci cani ci conducono, quindi, a conclusioni analoghe a quelle, alle quali siamo pervenuti nelle ricerche sull'anestesia dei canali semicircolari dei colombi; esse hanno fondamento sul tono muscolare labirintico, illustrato specialmente dall'Ewald e che si può ritenere, come la sola funzione dei canali semicircolari finora ben dimostrata.

Il labirinto dell'orecchio regola per via riflessa il tono dei muscoli; dal labirinto, cioè, partono in una maniera continua eccitazioni sensitive, che ascendono verso i centri nervosi e si diffondono lungo i nervi motori rendendo possibile il normale funzionamento dei muscoli. Nei pesci questa funzione del labirinto appare isolata, mancando in essi la funzione acustica; pare, infatti, che i pesci, così come sono privi di coclea, siano del tutto privi del senso dell'udito. Nei colombi, l'Ewald vide, come anche la coclea abbia questa influenza riflessa sulla funzionalità dei muscoli, benchè in assai minor grado dei canali semicircolari. I colombi, infatti, nei quali si sono asportate tutte e due le coclee, se hanno una deambulazione normale, perdono però l'attitudine al volo, perdono, cioè, la forza di tenersi col movimento delle ali librati in aria.

Nè mancano altri esempî di questa influenza continua, leggermente eccitante, che da un organo di senso attraverso ai centri nervosi si trasmette ai nervi ed ai muscoli. Così il taglio delle radici posteriori spinali o l'anestesia di esse fatta per mezzo della cocaina, fa diminuire l'eccitabilità della corrispondente radice spinale anteriore. Dal ganglio intervertebrale passa, quindi, nella radice posteriore un'influenza eccitatrice lenta e continua, che attraverso le cellule del midollo spinale si riflette sulle radici anteriori.

In seguito al taglio delle radici posteriori spinali si svolgono, anche nelle cellule anteriori del midollo, distinte alterazioni istologiche, come Rossolimo, Oddi e Rossi e recentemente Warrington (1) hanno dimostrato.

(1) Warrington, *On the structural alterations observed in nervecells*. Journal of Physiology, vol. 23, 1898-99.

Queste osservazioni rivelano l'intima connessione funzionale fra il neurone sensitivo e il neurone motore, e riescono a renderci conto dei disturbi motori che seguono alle lesioni del labirinto uditivo; ma con ciò non riteniamo conosciuta tutta la funzione di esso, anzi abbiamo con una certa predilezione adoperato la parola *labirinto* per aver sempre presente, che esso rappresenta, davvero, fisiologicamente, un labirinto, che è ancora da distrigare.

Le ricerche, che ho riferito, sono state fatte nell'Istituto della Stazione Zoologica di Napoli, ove hanno pure sperimentato sui canali semicircolari dei pesci Steiner, Loeb, Bethe e tanti altri; al sig. Direttore dell'Istituto, che mi accolse con gentilezza e mi fu largo di aiuti, mi è caro rivolgere vivi ringraziamenti.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione del Socio prof. Riccardo Felici, letta dal Socio Ròiti nella seduta del 2 novembre 1902.

A commemorare degnamente Riccardo Felici davanti a Voi, illustri Colleghi, non v'ha dubbio che mi manca la sufficienza; ma non ho potuto declinare il mesto ufficio perchè troppo intensi e profondi sono i sentimenti di affettuosa venerazione, di gratitudine e di ammirazione che in me ridesta la memoria del grande estinto.

Lo conobbi sullo scorcio del 1864 quando andai studente a Pisa, d'onde è sgorgato sì largo fiume di sapienza e di virtù civiche ad irrigare e fecondare tutta Italia.

Il Mossotti era scomparso, ma il suo spirito aleggiava ancora sulla Facoltà di scienze, il Piria, che aveva avuto per assistente il Cannizzaro, era passato a Torino, il Matteucci se n'era pure allontanato, travolto dal turbinío politico. Dei veterani rimanevano il patriarcale Luigi Pacinotti, padre del nostro Collega, il quale stava maturando a Bologna la sua invenzione, germe di tante meraviglie scientifiche ed economiche, il Meneghini, i due Savi, e attorno a loro il Cuppari, l'Orosi, il Lavagna, il Martolini, Novi, Sbragia, Barsotti, Botto, ahimè tutti scomparsi! e su tutti primeggiavano il Betti ed il Felici, tanto diversi nelle forme esteriori e pure fratelli nella psiche. Il Beltrami passava per Pisa qual meteora luminosa. Stava per sorgere il Dini.

La scolaresca della Facoltà di scienze era diligente, seria, avida d'imparare e con preparazione migliore della media, perchè i concorsi della Scuola normale superiore richiamavano a Pisa dalle altre Università non pochi giovani fra i più promettenti. Ed il Felici si sarebbe trovato nell'ambiente più acconcio alle proprie doti, se questi scolari non fossero stati so-

prafatti per numero dagli altri di farmacia, d'agraria, di veterinaria e di medicina, che allora tutti insieme dovevano assistere alle lezioni di fisica, e che per un'aberrazione di noi Italiani si ritenevano allora, anche più d'oggi, come giustamente avversi alle matematiche.

Egli dunque, spinto irresistibilmente dall'indole sua e dall'onesta coscienza a dimostrare ed approfondire col più stretto rigore il nesso logico fra i varî fenomeni che andava descrivendo, si reputava obbligato a non usar punto le notazioni del calcolo come se fossero armi insidiose. E le sue dimostrazioni, frutto perciò di lunga meditazione e d'improba fatica, riuscivano interessanti, limpide e persuasive solo a chi avesse il talento di seguirle con la necessaria tensione della mente. Escogitava delle esperienze ingegnosissime per rendere palpabili nella scuola le relazioni fra le variabili d'un fenomeno: e rammenterò ad esempio quella di proiettare con un fascio di luce un pendolo oscillante al di sopra di un disco girevole con velocità costante attorno al proprio asse geometrico, per mostrare che la legge delle oscillazioni pendolari è quella stessa della proiezione del moto circolare uniforme sopra un diametro del circolo; e rammenterò pure l'altra esperienza di rendere visibile col metodo stroboscopico la curva d'oscillazione di una corda vibrante, rilevando che essa varia di forma insieme col timbro del suono reso, secondo che la corda viene pizzicata, od eccitata coll'archetto da violino, od in altro modo diverso.

Esperienze di tal genere il Felici montava in lezione per l'ottica, la elettricità, il calore: e naturalmente non riuscivano tutte di primo acchito; ma quando fallivano, egli le rendeva ancor più istruttive denunciando i motivi dell'insuccesso. Aborriva dai facili sotterfugi che davanti all'uditorio producono sicuramente l'apparenza dell'effetto cercato e lo mostrano cospicuo più del vero, tanto da strappare gli applausi: anzi si asteneva perfino di dare vistosità alle esperienze sincere. So che questo era un suo proposito deliberato, ma non so dire se provenisse da religioso rispetto per l'austerità della scienza cui forse egli avrebbe temuto di mancare ricorrendo ad effetti teatrali di dubbia efficacia didattica, o pure se fosse naturale conseguenza del suo fare dimesso, del ritegno che aveva di porsi in luce, della pena che provava quand'era notato.

Il Felici, nato a Parma l'11 giugno 1819, aveva allora quarantacinque anni, faceva lezione da poco meno d'un ventennio, prima aiuto e supplente del Matteucci, poi professore aggregato, e co' suoi colleghi che si chiamavano Piria, Luigi Pacinotti, Burci, Ferrucci, Ranzi, Vaccà, Giorgini, Pilla, Martolini, Sbragia, Tassi, Marcacci e Tigri, aveva marciato da tenente nel generoso battaglione universitario guidato dal Mossotti, aveva preso parte alla eroica lotta di Curtatone, ove il Montanelli vide ferito ed il Pilla morente; era professore ordinario da cinque anni, avendo già pubblicato alcuni dei lavori che dovevano lasciare tanta orma nella scienza. E nella sua modestia

gli pareva un sogno che la cieca fortuna lo avesse portato tant'alto da farlo padrone d'una reggia qual era a' suoi occhi l'istituto fisico di Pisa allor così angusto e povero, ma in grazia sua così lindo, con annessa la casuccia ancor più angusta ed umile, ma abbellita dal sorriso dell'unica figliuoletta Isabella e dall'attento amore della impareggiabile sua consorte, signora Elisa Frullini.

Io ebbi la rara ventura d'essere accolto in quella casuccia, di poter muovermi liberamente in quel laboratorio e d'aver commercio quotidiano con quell'anima eletta; e giunto oramai all'età nella quale si vive di memorie, trovo un ristoro dolcissimo a quel sereno spettacolo di virtù domestiche, di gioie intellettuali, di felicità perfetta.

Il Felici era gioviale, arguto, piacevole nel conversare, e la fine ironia ed il pungente sarcasmo delle sue barzelette facevano il più singolare contrasto coi sentimenti benevoli e delicati che lo guidavano in ogni suo atto. Non incoraggiava i giovani con blandizie e nutrendoli di speranze, li spronava con epigrammi ed insieme li ammoniva con precetti più o meno giocosi: « Giovinotto, giovinotto!, mi diceva, rifletta che ogni idea nuova è « novantanove volte su cento uno sproposito da prendersi con le molle. Se « le viene, la combatta prima di buttarla fuori! ».

Bonarietà e pessimismo, umiltà ed acume critico fusi insieme, formavano il fondo del suo carattere mite ed equilibrato. Severo più con sè che con gli altri, diffidava delle proprie scoperte, non ne parlava mai: e le cautele nello sperimentare, gli scrupoli nell'asserire non gli parevano mai soverchi, così che può sorgere il dubbio se la perfezione di quanto ha pubblicato compensi la perdita che la scienza ha patito dal suo riserbo.

Pare incredibile, ma solamente in questi ultimi giorni sono venuto a scoprire alcuni suoi lavori: fra gli altri uno sulla termoelettricità del mercurio, col quale metteva in evidenza sino dal 1846 come la semplice variazione di temperatura da punto a punto di un conduttore, il cui assetto molecolare non possa modificarsi, non basti a destarvi la corrente elettrica.

Un'altra sua Memoria, che mi era sfuggita e che non trovo citata in nessun luogo e che pure indurrebbe a stabilire fatti non ammessi generalmente, ha la data del 1851 e tratta *delle polarità galvaniche secondarie e dell'influenza esercitata dal calore sulla propagazione della corrente elettrica nei liquidi.* In essa bisogna ammirare gli accorgimenti sottili mercè i quali il Felici ha saputo far rispondere degli apparecchi primitivi a questioni che tuttora rimangono incerte, malgrado la raffinatezza strumentale raggiunta con mezzo secolo di febbrile lavoro. Il Felici vi determinava, insieme con altro, come dipenda la forza elettromotrice di polarizzazione galvanica dalla intensità della corrente, ed i suoi numeri s'acconciano abbastanza bene nella formola empirica suggerita dal Crova molto più tardi. Stabiliva inoltre come varia la conduttività elettrica dell'acqua al crescere

della temperatura partendo da sotto zero, ed accennava ad un minimo corrispondente al massimo di densità. Questo fatto, malgrado l'affermativa recente del prof. Lussana, corroborata indirettamente dalle determinazioni di viscosità fatte dal compianto dottor Pacher, rimane ancora molto incerto avendo contrario il nostro illustre collega Kohlrausch, la più grande autorità che si conosca in simil genere di ricerche; ma io confido che, di fronte al nome del Felici, il Kohlrausch stesso, od altri per lui, possa riprendere in esame la questione.

A Pisa, già nel 1847, quasi contemporaneamente col Kirchhoff, e prima che questi ne avesse poste le equazioni generali, il problema della distribuzione delle correnti elettriche nei corpi a tre dimensioni era stato attaccato dal senatore Luigi Ridolfi, allor giovinetto, e discusso dal Felici, il quale poco di poi lo risolse pienamente pel caso della sfera, ricavandone alcuni interessanti teoremi accessibili alla verificazione sperimentale.

Se questi lavori del Felici rimasero più o meno ignorati insieme con altri che io sono andato rintracciando per presentarvene una lista, non toccò ugual sorte alle sue indagini intorno alla induzione elettrodinamica.

Egli, a differenza di Weber e Neumann che avevano preso le mosse da dati ipotetici, s'era prefisso di ricercare la legge fondamentale dell'importantissimo fenomeno appoggiandosi unicamente a fatti bene accertati: e, seguendo i classici procedimenti di Ampère nello studio delle azioni ponderomotrici fra correnti elettriche, seppe ideare e mandar ad effetto delle esperienze ammirabilì per eleganza e semplicità, dalle quali trasse una espressione matematica della forza elettromotrice indotta in un elemento conduttore da un elemento di corrente, sia pel moto relativo, sia per le variazioni di essa corrente primaria, ed anche per lo spostamento d'una parte del conduttore indotto rispetto alla rimanente.

La formola del Felici non coincide nè con quella del Weber, nè con l'altra del Neumann; ma dopo una lunga discussione contenuta in gran numero di Memorie interessantissime che il tempo mi vieta di analizzare davanti a Voi, illustri Colleghi, e dopo aver sottoposto alla prova dello sperimento i più varî casi escogitati pro e contro, si arrivò a conchiudere che tutte e tre le formule, convenientemente applicate, si trovano in pieno accordo coi fatti osservabili. Ciò è naturale per la prima, poichè ricavata con rigor logico da esperienze inecoepibili senza il soccorso d'alcun che d'arbitrario: e se pur le altre dànno risultati conformi alla realtà, la ragione è che le premesse arbitrarie v'introducono dei termini i quali svaniscono quando esse si applichino a correnti guidate da circuiti chiusi. Finora non si è sperimentato nessun caso di correnti aperte, e quando, come ogni indizio porta a ritenere, sia conforme al vero il concetto di Maxwell che anche pei conduttori non rientranti in se stessi, il circuito si chiuda pel dielettrico interposto; dovremo dire che la controversia già

antica non potrà esser composta mai, come cosa riguardante un'astrazione che non trova riscontro in Natura.

Spetta però al Felici il merito altissimo, e da tutti riconosciuto, d'aver dato un'espressione matematica dell'induzione con una base inconcussa che sfida qualunque mutar d'imagini ci preparino le più fervide fantasie volte a descrivere i fenomeni naturali ([1]).

Egli la propria imaginazione la tiene a freno: e se il freno talvolta rallenta, è sollecito a farselo perdonare con una ingenuità che desta il sorriso. Così, per tentare una teoria che derivi il diamagnetismo dall'induzione, premette che non intende menomamente di risolvere un problema destinato ad essere agitato fra i fisici per molto tempo ancora, che sarebbe assai meglio non ricorrere ad alcuna ipotesi sullo stato molecolare dei corpi; ma che, non potendo di necessità esimersene, essa sia almeno chiaramente concepibile come quella, per quanto arrischiata, di ridurre a proporzioni infinitamente piccole un fatto ben conosciuto e studiato sperimentalmente in tutte le sue particolarità e con ogni esattezza sui corpi di dimensioni finite, per supporne poi l'esistenza nelle ultime particelle materiali.

Quindi, avendo dedotto matematicamente dalla sua formula dell'induzione che in una sfera conduttrice rotante di fronte ad una calamita si devono destare delle correnti indotte per cui essa tenderà ad avvicinarsele o ad allontanarsene secondo che la rotazione avviene in un verso o nell'altro; ed avendo riscontrato con paziente cura che, a parità di tutte le altre circostanze, la seconda azione è più intensa della prima, ne deduce a buon dritto che riescono in tal modo semplicemente interpretabili tutti i fenomeni sino allora conosciuti del diamagnetismo.

Ma sorriderebbe lui, l'uomo superiore, compiacendosi della propria circospezione, se potesse leggere l'ultimo discorso inaugurale dell'Associazione britannica, dove il prof. Dewar riferisce che, alle temperature bassissime otte-

([1]) Il Maxwell, negli art. 536 a 539 del suo celebre Trattato (Oxford, 1873) riporta con lode le esperienze del Felici; ma poi all'art. 542 dice: *We may regard J. Neumann* (dalle citazioni si scorge che si riferiva invece a F. E. Neumann), *therefore, as having completed for the induction of currents the mathematical treatment which Ampère had applied to their mechanical action.*

Questa inesattezza sfuggita al grande Inglese, che in apparenza defrauda il Felici, non è impossibile che derivi da una parola usata dal Felici stesso! Infatti scopro che questi nella sua Rivista di lavori esteri sulla elettrodinamica (N. Cimento XIX, 205) aveva detto dieci anni prima: *Il Neumann poi completò, ipoteticamente, quella legge* (di Lenz, determinante la direzione delle correnti indotte) *per ciò che riguarda la intensità dell'induzione. Nulladimeno, come è noto, la precedente espressione algebrica....* (la formula di Neumann applicata a circuiti chiusi) *coincide esattamente con quella da me ottenuta, seguendo per la* SUA RICERCA (*per la* RICERCA DI ESSA, che avrebbe impedito, anche ad un lettore straniero, di cadere in equivoco) *un modo affatto sperimentale, e simile a quello di Ampère nella sua teoria dei fenomeni elettrodinamici.*

nibili mercè la liquefazione dell'aria o dell'idrogeno, il diamagnetismo del bismuto aumenta malgrado la diminuita forza viva interna, e ci rivela così che è condizionato non tanto dal moto quanto dall'assetto molecolare.

Il Felici apparteneva con Helmholtz, per fare qualche nome, Beltrami, Poincaré, Volterra qui presente, a quella schiera eletta la quale sa appagarsi della espressione matematica dei fenomeni senza sentire il bisogno nè l'utilità di foggiarsene alcun modello meccanico, come predilige la scuola inglese e con essa la grande maggioranza dei fisici moderni.

Questa predilezione muove dalla mente di Faraday che, priva del fine magistero del calcolo, arrivò a surrogarlo con vivide pitture, e si figurò i fenomeni elettrici e magnetici come dovuti a forze che si trasmettono da punto a punto dei varî mezzi dotati di peculiari elasticità: e Maxwell, dando più tardi veste matematica al quadro, fomentò siffatta predilezione. Ma nessuno ignora più oggi che i fatti studiati sperimentalmente, per ciò che sono fedelmente espressi dalle formole, non possono decider nulla in favore della rappresentazione faradaica o piuttosto delle azioni a distanza tanto fecondate dall'ingegno di La Place, Poisson, Plana, Mossotti.

Cinquant'anni fa la grande maggioranza dei fisici non aveva idee così chiare, ed è notevole come il Felici colle sue *Osservazioni sopra l'interpretazione di alcune esperienze* (allora) *moderne di elettrostatica*, ammonisse coloro che si perdevano in vani conati, e li esortasse ad approfondire maggiormente la teoria che da altri cinquant'anni era incontrastabilmente stabilita, senza che c'entrassero ipotesi, sopra un fatto accertato sperimentalmente con tutta l'esattezza desiderabile (che cioè l'elettrico si porta per intero alla superficie dei conduttori), di guisa che imbattendoci in esperienze che ci sembrino contradirla, dobbiamo conchiudere che esse furono male eseguite, o che noi non sappiamo analizzarle.

Le imagini che guidavano Faraday alle sue eccelse scoperte, se avevano per lui contorni ben delineati, bisogna convenire che chiunque altro, a leggerne la descrizione, doveva vederle annebbiate: e mentre il Maxwell era intento a dissipare matematicamente le nebbie, il Felici, sempre in sospetto d'ogni creazione soggettiva, s'accingeva a scrutare se veramente si potesse attribuire alle sostanze isolanti una parte attiva nella trasmissione delle forze elettriche. Le sue ricerche intorno all'*azione dei corpi non conduttori soggetti alla influenza d'un corpo elettrizzato* lo occuparono dal 1865 al 1871 con un'assiduità, una pertinacia, una precisione di cui nessuno può farsi idea adeguata senz'esserne stato testimonio oculare, e gli permisero di fornire con piena sicurezza degl'importanti dati di fatto che ebbero il plauso universale.

A dir vero, non furono da lui giudicati ancora bastevoli a vincere la sua riluttanza; ma non di meno costituiscono il primo fondamento sperimentale per cui oggidì la teoria del Faraday può emulare con probabilità di vittoria l'antica teoria delle azioni a distanza.

Ora dovrei intrattenervi sulla scoperta fatta dal Felici che un coibente in moto trascina seco un corpo elettrizzato il quale gli stia di fronte, accennandoci come la polarizzazione dielettrica non sia rigorosamente istantanea; dovrei parlarvi del suo metodo originale per determinare quanto duri la scarica elettrica nelle varie circostanze, e quanto tempo impieghi a propagarsi lungo un filo conduttore; dovrei rammentare il prezioso strumento ch'egli ci ha dato, facendolo costruire al suo bravo meccanico il compianto Mariano Pierucci, per seguire ad ogni ventimillesimo di secondo lo svolgimento d'un fenomeno, e narrare le determinazioni interessantissime che con questo interruttore delle correnti elettriche furono eseguite da lui, dai suoi allievi Donati e Poloni, e dall'altro suo allievo Adolfo Bartoli sì presto rapito alla scienza che Voi non poteste conferirgli il premio Reale prima della morte. Nè dovrei passare sotto silenzio i confronti minuziosi del Felici fra le deduzioni del calcolo e l'osservazione nel campo della capillarità, nè tanti altri suoi studî, nè la passione che da squisito musicista prendeva ai problemi d'acustica aventi attinenza coll'arte. E vorrei rilevare com'egli, avverso alle ipotesi, accogliesse senza riserva quella della costituzione molecolare degli aeriformi nata dal Bernoulli e portata a sviluppo dal Clausius e dal Boltzmann, ed accettasse come un portato dell'esperienza l'altra delle ondulazioni luminose.

Ma il tempo trascorre, e non ho ancora dato risalto all'influenza benefica ch'egli esercitò fra noi infondendo da un lato la persuasione che gli studî fisici scompagnati da quelli matematici a ben poco possono approdare, e dall'altro invogliando i suoi colleghi di matematica ad occuparsi di questioni fisiche; nè ho per anco indicata la insigne benemerenza che si acquistò tenendo in vita, contro molteplici difficoltà, l'unico periodico italiano di fisica, il *Nuovo Cimento*, che informava gli stranieri dei nostri lavori, e noi teneva informati dei progressi scientifici. Questo periodico egli donò poi alla Società fisica italiana che lo aveva acclamato suo presidente onorario.

Peritoso com'era di mostrarsi in pubblico, scansò i pubblici uffici; ma il sentimento del dovere gl'impose di non sottrarsi a quello di rettore che abilmente esercitò a due riprese in tempi difficili. Fu anche più volte preside della Facoltà di scienze e consigliere della Scuola normale superiore; ma si può dire che con la severità dell'esempio e l'oculatezza del consiglio fu ininterrottamente per una lunga serie d'anni l'ispiratore d'ogni savio provvedimento in favore dei buoni studî a Pisa: ed a questo proposito mi piace riferirvi alcune delle parole pronunziate sul suo feretro dal nostro collega Antonio Pacinotti:

« L'amicizia di mio Padre pel Felici fu, sino dai primi ricordi della « mia infanzia, continua, sincera, costante, perchè fondata nella stima della « incorruttibile rettitudine del carattere. Ed io stesso, e per la gratitudine « che al Felici dovevo come discepolo e per le severe virtù che in lui am-

« miravo, sempre sono stato desideroso di poter meritare l'amicizia di sì va-
« lente uomo ».

Ed ora, illustri Colleghi, dopo questa semplice ed affrettata enumerazione de' suoi meriti eminenti, concedete che lasci alla nobiltà dell'animo vostro d'innalzare l'inno che glorifichi il grande maestro, lo scienziato insigne, il generoso divulgatore, il cittadino virtuoso, l'uomo intemerato: io mi sento inetto a trovarne l'espressione.

Alla mestizia onde sono invaso perdonate se non posso astenermi di parlarvi del martire.

Varcati di poco i settant'anni, il Felici, sempre più incontentabile di se, stesso e rigido osservatore di quanto stimava doveroso, cominciò a temere che gli venissero meno la vigoría e la elasticità del pensiero, giudicò che altri potesse con maggior efficacia occupare la sua cattedra, pensò a scegliersi un successore nella pienezza dell'energia giovanile, e stoicamente piegò il capo ai rigori della legge crudele verso i veterani che in cattedra non voglion rimanere contro coscienza: multa, sfratto dal laboratorio, confisca dei mezzi di studio!

Però lo strazio ch'ebbe a provare il suo cuore gentile nello staccarsi dal suo lindo istituto, nell'abbandonare la diletta casuccia, fu superiore ad ogni forza umana di resistenza. Di quel momento solenne disse il suo baldo Successore nella commemorazione pel *Nuovo Cimento*: « Lo vedo ancora var-
« care la porta della palazzetta di Piazza San Simone, curvo come sotto il
« peso di una grande sventura, e salire in carrozza nascondendo la faccia
« per non mostrare la commozione ».

Dopo il colpo tremendo, la mente così limpida e sicura cominciò a velarsi ed a vacillare davvero, e negli anni che seguirono il 1892 il Felici, l'uomo grande, non fu più che un povero vecchio vagante nella nebbia, rischiarata soltanto da qualche pallido lampo al ricordo delle sue macchine, de' suoi apparecchi, delle indagini cui essi potevano servire.

Lo vidi una volta alla stazione che aspettava il treno per andare in villa presso Lucca: e procedeva incerto guidato, sorretto quasi, dall'attento amore della sua inseparabile consorte. Ma la guida fedele, vigile, assidua doveva mancargli: l'ottima signora Elisa spirò il 28 marzo 1897, e lo spirito del Felici la seguì. Da quel giorno rimase di lui un simulacro venerando che non valevano a rianimare le cure pietose della figlia Isabella e dei nipoti, nè le infantili carezze dei pronipoti.

Verso quel simulacro convergevano ogni anno i voti della Società fisica adunata, e nell'ottantesimo anniversario della nascita tutti fummo orgogliosi, colleghi, discepoli, ammiratori, d'inviargli in omaggio la prima copia della sua *Teoria dell'induzione*, che era stata pubblicata in tedesco fra le opere classiche delle scienze esatte.

Il 20 luglio di quest'anno, a Sant'Alessio di Lucca, il venerato simu-

lacro s'infranse, e Pisa adempiè tosto all'obbligo suo di richiamarne gli avanzi perchè fossero accolti nel monumentale Camposanto urbano, ed il 22 luglio là si celebrarono sul feretro i funerali. Ma le reliquie a noi sacre giacciono ancora senza tomba perchè « nuova legge impone oggi i sepolcri fuor » de' monumenti nazionali.

Deh! fate ogni vostra possa, illustri Colleghi, affinchè gli ostacoli siano superati senz'altro indugio: e la figlia desolata, co' suoi figli ed i figli dei figli, e gli amici ed i concittadini possano recare i tributi del loro affetto sopra un'urna decorosa, ed i cultori della Scienza, cercanti ispirazione in quell'incantevole tempio dell'Arte, non cerchino invano fra i sepolcri del Mossotti, del Montanelli, dei Savi, del Matteucci, dell'Orosi, del Cuppari, del Meneghini, del Betti il sepolcro di Riccardo Felici.

Risovvengavi che

> « .... sugli estinti
> « Non sorge fiore, ove non sia d'umane
> « Lodi onorato e d'amoroso pianto ».

SCRITTI DI RICCARDO FELICI

1844. *Alcune osservazioni intorno alle nuove ricerche del sig. Dutrochet sulla forza epipolica.* Il Cimento, p. 134.
1846. *Nota sulla termoelettricità del mercurio.* Il Cimento, p. 165.
1847. *Sulla teoria del circuito galvanico.* Il Cimento, p. 289.
1850. *Sulla propagazione della corrente elettrica nell'interno di una sfera.* Annali di Tortolini, T. I, p. 312.
1851. *Sulle polarità galvaniche secondarie e sull'influenza del calore nella propagazione della corrente elettrica nei liquidi.* Annali delle Università toscane, T. II, P. II, p. 173.
— *Saggio di una spiegazione dei fenomeni di induzione elettrodinamica.* Annali di Tortolini, T. II, p. 65, 306.
— *Saggio teorico-sperimentale sulla legge secondo cui varia l'azione inducente di un circuito voltaico.* Id. p. 361.
— *Nota sulla teoria dei fenomeni di induzione elettrodinamica.* Id. p. 503.
1852. *Mémoire sur l'induction électrodynamique.* Annales de Chimie et de Physique. S. III, T. 34, p. 64.
1853. *Note sur les phénomènes d'induction.* Id. T. 39, p. 222.
— *Saggio di una applicazione del calcolo alle correnti indotte dal magnetismo in movimento.* Annali di Tortolini, T. IV, p. 173.
— *Sopra i fenomeni di induzione della bottiglia di Leida.* Id. p. 237.
1854. *Sulla teoria matematica dell'induzione elettrodinamica.* Annali delle Università toscane, T. III, P. II, p. 1.
— *Idem.* Seconda Memoria. Id. p. 99.

1854. *Nuova Nota sulla propagazione della elettricità voltaica nell'interno di una sfera.* Annali di Tortolini, T. V., p. 270.

— *Sulla teoria matematica delle correnti indotte in un corpo di forma qualunque.* Annali di Tortolini, T. V, p. 35.

— *Sur les courants d'induction dans les corps de forme quelconque.* Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 40, p. 251.

1855. *Sulla teoria matematica dell'induzione.* Terza Memoria. Annali delle Università toscane, T. IV, P. 2, p. 5.

— *Sur les courants induits par la rotation d'un conducteur autour d'un aimant.* Annales de Ch. et Ph. S. III. T. 44, p. 343.

— *Ricerche sulle leggi generali della induzione elettrodinamica.* Nuovo Cimento, T. I, p. 325.

— *Esperienze sopra un caso di correnti indotte, nel quale sarebbero nulle le forze elettrodinamiche esercitate dal conduttore inducente sopra l'indotto qualora fosse percorso da una corrente.* Id. T. II, p. 321. — Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 51, p. 501.

1856. *Sulla legge di Lenz, e sopra alcune recenti esperienze del prof. Matteucci sull'induzione elettrodinamica.* Nuovo Cimento, T. III, p. 198 — Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 51, p. 378.

— *Sulle leggi delle scariche indotte dalla bottiglia di Leida.* Nuovo Cimento, T. III, p. 208.

— *Osservazioni sopra l'interpretazione di alcune esperienze moderne di elettrostatica.* Id. T. IV, p. 266.

1859. *Sulla spiegazione del diamagnetismo, partendo dalla teoria dell'induzione elettrodinamica.* Id. T. IX, p. 16.

— *Esperienza sopra un caso singolare della induzione elettrodinamica.* Id. id. p. 75.

— *Nota sopra una osservazione del sig. De La Rive ad una delle esperienze fondamentali della teoria dell'induzione elettrodinamica.* Id. id. p. 345.

— *Esperienze che dimostrano che quando un corpo ruota sotto la influenza di una calamita, la forza che, in virtù delle correnti indotte, si sviluppa fra la calamita e il corpo indotto, è repulsiva od attrattiva a seconda della direzione del moto rotatorio, ma che la intensità della forza repulsiva è maggiore della attrattiva.* Id. T. X, p. 5.

— *Sur la cause des courants que l'on obtient dans un circuit dont les bouts immobiles s'appuient sur un conducteur tournant autour de l'axe d'un aimant cylindrique.* Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 56, p. 106.

1862. *Esperienze sulla velocità della elettricità, e sulla durata della scintilla.* Nuovo Cimento, T. XV, p. 339.

1863. Estratto in francese della Memoria precedente, fatto dall'Autore. Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 69, p. 248.

— *Nuove esperienze sopra la velocità della elettricità e sulla durata della scintilla.* Nuovo Cimento, T. XVII, p. 28. — Annali delle Università toscane, T. VIII, P. II, p. 5.

— *Rivista di lavori di fisica, pubblicati all'estero.* Nuovo Cimento, T. XIX, p. 5.

— *Rivista di lavori sulla elettrodinamica pubblicati all'estero.* Nuovo Cimento. T. XIX, pp. 202, 307; T. XX, p. 173.

— *Cenni di alcune esperienze di elettricità.* Id. T. XIX, id. p. 345.

1864. *Cenni di alcune esperienze di elettricità.* Id. T. XX, p. 73.

— *Sunto di una Memoria di T. M. Gaugain sopra la teoria dei condensatori elettrici allo stato di tensione permanente o variabile.* Id. id. p. 80.

1865. *Cenni di alcune esperienze di elettricità.* Nuovo Cimento, T. XXI-II, p. 380.
1866. *Cenni di alcune esperienze sulle superficie di capillarità.* Id. T. XXIII-XXIV, p. 151.
1867. *Esperienze per determinare la legge di oscillazione di un corpo elastico.* Id. T. XXVI, p. 255. — Annali delle Università toscane, T. IX, P. II, p. 81.
1871. *Nota ad una Memoria di Helmholtz sulla teoria matematica della elettricità dinamica.* N. Cimento, S. II, T. V-VI, p. 71.
— *Sulle azioni elettriche dei corpi non conduttori soggetti alla influenza di un corpo elettrizzato.* Id. id. id. pp. 5, 73. — Memorie della Società italiana di scienze, S. III, T. II, P. II, p. 249. — In sunto: Journal de Physique, T. III, p. 329.
1872. *Analyse du précedent Mémoire.* Archives de Genève, T. 43, p. 149.
1873. *Esperienze sulle forze elettromotrici indotte da un solenoide chiuso.* Nuovo Cimento, S. II, T. IX, p. 5.
— *Esperienze sul tempo impiegato da un coibente per ritornare allo stato naturale, cessata che sia l'azione inducente esteriore.* Id. T. X, p. 84.
1874. *Sopra un nuovo interruttore e sul suo uso in alcune esperienze di induzione.* Id. T. XII, p. 115.
1875. *Un'altra esperienza sulla rotazione del conduttore radiale.* Id. T. XIII, p. 224.
— *Di una modificazione dell'interruttore galvanico, e di alcune esperienze sull'extra-corrente, e sulla legge con cui varia la intensità del magnetismo del ferro, dall'istante in cui cessa l'azione inducente della spirale voltaica.* Id. T. XIII, p. 266.
— *Exposé de quelques expériences qui interessent la théorie de l'induction.* Journal de Physique, T. IV, p. 228.
1876. *Notizie sulla vita e sugli scritti di Carlo Matteucci.* Memorie della Società italiana delle scienze, S. III, T. II, p. LXV.
— *Alcune avvertenze sopra una Nota pubblicata nell'anno 1856 nel* Nuovo Cimento, *relativamente all'induzione elettrostatica.* Nuovo Cimento, T. XV, p. 255.
— *Esperienza sull'azione esercitata da un corpo dielettrico in movimento sopra un corpo elettrizzato.* Id. T. XVI, p. 73.
1882. *Nota ad una esperienza dell'Ampère.* Id. S. III, T. XI, p. 243.
1883. *Appunti per lezioni di fisica sperimentale* (Pisa, Tip. Pieraccini).
1884. *Una esperienzn da lezione.* Nuovo Cimento, S. III, T. XVI, p. 160.
1888. *Sul potenziale di un conduttore in movimento sotto la influenza di un magnete.* Id. id. T. XXIV, p. 32.
— *Relazione sul concorso al premio Reale per la fisica.* Atti R. Acc. dei Lincei. Rend. (4) VII, p. 526.
1899. *Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction von Riccardo Felici, uebersetzt von Dr. B. Dessau, herausgegeben von E. Wiedemann.* Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 109.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 dicembre 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Ultime osservazioni della cometa 1902 B Perrine e osservazione della nuova cometa 1902 D Giacobini.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Facendo seguito alla mia Nota del mese scorso, ho l'onore di presentare all'Accademia le ultime mie osservazioni sulla cometa 1902 B Perrine.

1902 Ottobre 30	$6^h 15^m 10^s$	R. C. R.
Ascensione retta apparente	17 21 34. 64	(9.535)
Declinazione apparente	— 4° 4′ 37″. 4	(0.787)
1902 Novembre 6	$5^h 52^m 0^s$	R. C. R.
Ascensione retta apparente	17 4 47. 15	(9.570)
Declinazione apparente	— 9° 11′ 54″. 7	(0.802)
1902 Novembre 15	$5^h 38^m 16^s$	R. C. R.
Ascensione retta apparente	16 41 51. 13	(9.621)
Declinazione apparente	— 14° 4′ 52″. 0	(0.797)

Immersa nel crepuscolo serotino, la cometa fu da me riveduta ancora per qualche dì, ma, quantunque lucentissima, non era possibile fare posizioni rigorose per l'invisibilità delle stelle in crepuscolo e nell'estrema vicinanza dell'orizzonte.

La nuova cometa, 1902 D, scoperta a Nizza dall'astronomo Giacobini, 5 giorni or sono, soltanto ieri sera potei trovare, e ciò in causa del cielo

nuvoloso. La cometa si presenta debolissima; il nucleo è stellare di 12ma grandezza, e la nebulosità abbraccia un diametro di circa 15″.

Il luogo rigoroso, ottenuto al grande equatoriale di 39 cm., è il seguente:

1902 Dicembre 6		$10^h\,14^m\,24^s$ R. C. R.
Ascensione retta apparente		7 16 38. 30 (9^n.582)
Declinazione apparente	—	1° 27′ 21″. 5 (0. 673)

Matematica. — *Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche.* Nota I di ONORATO NICCOLETTI, presentata dal Socio DINI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Intorno ad un modo per agitare un liquido in un recipiente chiuso e ad una modificazione del termocalorimetro* (¹). Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

Vari modi noti per rimescolare un liquido in un recipiente chiuso. Nello studio dei fenomeni termici occorre spessissimo di dover rendere uniforme la temperatura d'un liquido il quale perciò dev' essere rimescolato. Avviene però spesso che il liquido trovasi rinchiuso in un recipiente, senza altra apertura all'infuori di quella di un tubo capillare, ed i mezzi soliti per agitare un liquido non sono applicabili. In questo caso il mezzo più ovvio è quello di rinchiudere nel recipiente assieme al liquido un molinello o un conveniente sistema mobile contenenti ferro o piccoli magneti e far ruotare il molinello o muovere in su e in giù il sistema mobile mediante una azione magnetica o elettromagnetica.

Per quanto questo modo sia ovvio, credo opportuno rammentare che io sono stato il primo ad usarlo (Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 1892, 1° sem., pag. 242 e 2° sem., pag. 210), che la disposizione da me usata è semplicissima e che con una piccola forza magnetica ottenevo nel liquido una viva agitazione. A tal uopo in questo liquido (una miscela di due liquidi o una soluzione di cui volevo determinare la tensione di vapore) si trovava un tubo di vetro a pareti sottili, chiuso alla lampada e contenente parecchi aghi fortemente magnetizzati, di peso tale che il tubo galleggiasse (o in generale che l'azione risultante della gravità fosse nulla). In tal modo questo tubo obbediva anche ad una piccola forza magnetica, e potevo farlo urtare violentemente e successivamente contro le pareti opposte del recipiente, ser-

(¹) Lavoro eseguito nel Gabinetto fisico della R. Università di Cagliari.

vendomi d' una piccola calamita a ferro di cavallo collocata fuori del bagno o del ghiaccio che circondava il recipiente.

Kohlrausch nel suo ottimo *Lehrbuch der praktischen Physik*, attribuisce questo modo di agitare un liquido rinchiuso in un recipiente al Forch (Wied. Ann., 1895, t. 55, pag. 105) il quale l' ha usato assai dopo di me, servendosi d' una disposizione molto più complicata. Siccome egli usava un molinello con ferro dolce anzichè con magneti, doveva servirsi d' un campo magnetico intenso, prodotto da 4 elettrocalamite immerse nel bagno, per poter indurre nel ferro una magnetizzazione abbastanza intensa.

Attualmente la rotazione d' un molinello contenente ferro o magneti, o anche semplicemente metallico potrebbe prodursi più comodamente colle note disposizioni che producono un campo magnetico rotante mediante correnti polifasi.

Nuovo modo per rimescolare il liquido. L' uso dei metodi precedenti richiede una costruzione ed una preparazione più o meno complicata; non è esclusa la possibilità di un guasto che renda il meccanismo inattivo senza che ciò apparisca al di fuori; e finalmente essi non sono bene applicabili se le dimensioni del recipiente che contiene il liquido sono piccole.

Si può in tutti i casi e con sicurezza completa produrre facilmente nel liquido una viva agitazione, se prima di chiudere il recipiente si fissano sulle sue pareti interne alcune laminette di numero, posizione e inclinazione convenienti, e se dopo al recipiente chiuso, che già contiene il liquido che si vuole agitare, s' imprime un movimento di rotazione alternativamente in sensi opposti attorno all'asse di figura o ad un altro asse qualsiasi.

Se il recipiente, p. es. cilindrico, avesse le pareti interne lisce e fosse fatto ruotare attorno al suo asse, il liquido nei primi momenti rimarrebbe per inerzia quasi completamente immobile e solo in seguito per effetto dell'attrito interno il movimento rotatorio si propagherebbe dalle pareti verso l'asse; comunque, questo movimento del liquido sarebbe regolare e non produrrebbe quasi nessun rimescolamento delle varie parti.

Se invece le pareti interne del recipiente son provviste di palette, queste al principio della rotazione vanno ad urtare nel liquido ancora immobile e comunicano ad alcune parti di esso velocità e pressioni svariate in grandezza e direzione, per effetto delle quali e della forza centrifuga avviene il rimescolamento colle parti ancora immobili o con diverso moto. L'effetto è quasi lo stesso come se le palette si trovassero in un recipiente immobile e fossero fissate ad un asse uscente all' esterno.

Se la rotazione continuasse indefinitamente, tutte le parti del liquido finirebbero per acquistare la stessa velocità angolare, quella del recipiente, e si muoverebbero come un solido senza scambio apprezzabile fra le varie parti; se però improvvisamente fermiamo il recipiente, il liquido per inerzia continua a ruotare, alcune parti di esso passano senza ostacolo fra le pa-

lette, altre vi urtano, cambiano direzione e vanno fra mezzo alle prime producendo così la mescolanza desiderata. Producendo quindi una rotazione in senso inverso, si riproduce il fenomeno già considerato e così di seguito.

Riguardo alla forma, al numero, alla posizione, ed inclinazione delle palette mi pare evidentemente utile che esse siano piccole e numerose, che si estendano o siano collocate sin presso l'asse di rotazione, e fors' anche che siano bucherellate. Inoltre mi pare utile che esse siano inclinate p. es. di 45° sull'asse e sulla direzione del moto, affinchè esse imprimano al liquido anche un movimento parallello all'asse; talora ho usato due sistemi di palette in ciascuno dei quali l'inclinazione delle palette era dalla stessa parte, mentre era in senso opposto nei due sistemi, in modo che il liquido spinto da questi in sensi opposti prendesse anche un movimento circolatorio perpendicolare al movimento rotatorio del recipiente.

Del resto le varie disposizioni suddette sono quasi ugualmente efficaci, tanto che sarebbe difficile stabilire sperimentalmente quale sia la migliore; inoltre anche con una disposizione non perfetta si può ottenere un' efficace agitazione per mezzo d' una opportuna velocità ed ampiezza delle rotazioni; così pure si ottiene una efficace agitazione usando, invece di palette, aste o tubi chiusi e vuoti fissati al fondo del recipiente parallellamente all'asse di rotazione. Potrebbe credersi che fosse possibile ottenere una viva agitazione del liquido anche con un recipiente a pareti lisce facendolo ruotare attorno ad un asse diverso da quello di figura, e che in questo caso le pareti agiscano come una grande paletta, però l'esperienza dimostra che così s'ottiene un rimescolamento piccolo o nullo, perchè in questa rotazione, che può considerarsi come la risultante di una serie di traslazioni e rotazioni attorno all'asse di figura, niente tende a produrre una mutua compenetrazione delle varie parti del liquido.

Si può rendere evidente l'efficacia del modo suddetto di agitazione, collocando un grosso bicchiere o una bottiglia pieni d'acqua sopra un tavolo qualsiasi o meglio sopra un sostegno che si possa facilmente far ruotare, e versando nell'acqua alcune goccie di una soluzione diluita di fucsina o fluoresceina. Se le goccie cadono da piccola altezza e da un tubo capillare, esse prendono nell'acqua la forma (che non è essenziale per lo scopo presente) di anelli, probabilmente simili a quelli vorticosi di fumo, ma che prontamente perdono la loro velocità di caduta e rimangono sospesi nell'acqua, allargandosi e ingrossandosi molto lentamente, e diventando in proporzione più sbaditi, ma tuttavia persistendo per un tempo molto lungo. In un recipiente nel quale avevo versato goccie di fucsina e fluoresceina dopo molti giorni le colorazioni apparivano ancora separate (per effetto della piccolezza della pressione interna delle sostanze coloranti) l'una in basso l'altra in alto nel liquido.

Se si fa ruotare senza scosse il recipiente che contiene gli anelli o le colorazioni suddette attorno ad un asse verticale che sia o no quello di figura,

gli anelli partecipano al movimento di rotazione del liquido che si propaga man mano verso l'asse, ma pur tuttavia continuano a persistere per molto tempo. Se invece nel bicchiere si colloca una ruota a palette coll'asse verticale fissa su di un piede di piombo, oppure se nella bottiglia s'introducono alcuni tubi o aste un po' distanti dall'asse e dopo prodotti gli anelli si fa ruotare il recipiente alternativamente in sensi opposti, la perturbazione nella massa del liquido è così viva che gli anelli sono distrutti quasi istantaneamente e la colorazione prestissimo diviene ripartita uniformemente.

Questo effetto che è più visibile nei grandi recipienti si produce anche entro tubetti di pochi millimetri di diametro; invece in recipienti privi di palette o di aste che si fanno ruotare attorno ad un asse diverso da quello di figura, gli anelli non subiscono che una perturbazione relativamente leggera. Il caso comune d'un sale che si fa sciogliere in un bicchiere con un solvente, muovendo circolarmente il bicchiere, è un po' diverso, ma tuttavia il rimescolamento è minore di quello che si otterrebbe con una spatola, mossa in giro o fissa alle pareti.

Questo modo di agitare un liquido, che finora non ho visto applicato, si può usare facilmente ed utilmente in un gran numero di casi che sarebbe lungo enumerare; io l'ho usato nel termocalorimetro (calorimetro per dilatazione), nel calorimetro solare, nel dilatometro e nei termometri.

Termocalorimetro. Quando si misura una quantità di calore coll'aumento di temperatura che essa produce nell'acqua o in un altro liquido, e si misura quest'aumento di temperatura con un termometro, solo una piccola parte del calore che si vuol misurare è impiegata a produrre l'effetto che serve di misura, mentre l'altra parte di gran lunga maggiore è impiegata a riscaldare il liquido e a produrvi una dilatazione di cui non si tien conto. Ne risulta che la sensibilità massima di cui il metodo è suscettibile è piccola e tanto minore quanto minore è la capacità calorifica del termometro rispetto a quella totale del termometro e del liquido. Si può bensì aumentare la sensibilità del termometro e così quella della determinazione, aumentando la capacità del bulbo e diminuendo la sezione del tubo del termometro; ma con ciò si va incontro a gravi inconvenienti, quali la lentezza colla quale il termometro si mette in equilibrio di temperatura, e le irregolarità del movimento della colonna causate dalla dilatabilità del bulbo e dalla notevole pressione capillare del menisco.

La sensibilità che si può ottenere è grandemente aumentata quando tutto il calore che si vuol misurare è impiegato a produrre l'effetto che si misura, come avviene nel termocalorimetro di Favre e Silbermann, nel quale tutto il calore viene comunicato ad un grande termoscopio a mercurio e la dilatazione complessiva del mercurio serve di misura al calore suddetto. Tuttavia, nè questo calorimetro, nè le modificazioni che sono state proposte successivamente da varî fisici non incontrarono molto favore ed esso viene conside-

rato come capace di dare risultati soddisfacenti solo con molte precauzioni che ne scemano i pregi. Molti anni fa feci anch' io delle determinazioni con un calorimetro fondato su questo principio, per incarico del prof. Naccari del quale ero assistente, ma il poco accordo dei risultati rese necessario l'uso d' un altro metodo.

Credo che la ragione principale della poco buona riuscita di questo metodo consista nella mancanza di agitazione nel liquido. Si può credere a prima vista che essa non sia necessaria, perchè a differenza di ciò che avviene nel metodo delle mescolanze, non è necessario che il calore sia ripartito uniformemente, poichè la maggior dilatazione delle parti più riscaldate compensa quasi esattamente la minor dilatazione delle altre, e la dilatazione complessiva che si osserva da ciò non riceve mutamento apprezzabile. Però è da notare anzitutto che a causa della mancanza di agitazione la penetrazione del calore, dal tubo ove viene generato o introdotto, nel termoscopio nel quale questo tubo è quasi totalmente compreso, è molto lenta. Difatti essa si effettua per conduzione attraverso le pareti sottili e buone conduttrici del tubo suddetto, e poi in parte per conduzione nel liquido ed in parte per la convezione causata dalla diminuita densità del liquido riscaldato; ora entrambi questi due ultimi effetti sono deboli e lo divengono sempre più, a misura che diminuisce la differenza di temperatura.

Questa lentezza della penetrazione del calore da misurare è così grande, che in esperienze recenti mi riusciva quasi impossibile stabilire quando la suddetta penetrazione poteva considerarsi come ultimata; quindi la correzione per l'effetto della temperatura esterna era notevole e l'errore per l'incompleta penetrazione era probabilmente non trascurabile.

Inoltre la mancanza di agitazione nel liquido di questo calorimetro può dar luogo ad un altro errore, perchè per effetto della convezione il liquido più caldo va in alto, quindi le pareti del recipiente si riscaldano e si dilatano disugualmente, più in alto che in basso, ciò che può dar luogo a curvature o deformazioni che causino una variazione anormale della capacità. Finalmente la ripartizione non uniforme del calore rende quasi impossibile lo stabilire esattamente qual' è l'azione della temperatura ambiente in tutto il tempo non breve nel quale avviene la penetrazione del calore.

Questi inconvenienti si evitano del tutto o in massima parte, quando il liquido venga agitato; ed a tale scopo mi pare che la disposizione meccanica sopra descritta sia per moltissime ragioni e senza confronto più adatta di quelle fondate sulle azioni magnetiche o elettromagnetiche. Così, se si ha cura di saldare il tubo ricevitore del calore (nel quale il calore da misurare viene generato o introdotto) un po' lontano dall'asse di figura del calorimetro, e se inoltre si sono fissate alle pareti interne del calorimetro alcune palette e durante la determinazione s' imprime al calorimetro un movimento alternativo di rotazione in sensi opposti, anzitutto il tubo ricevitore viene con-

dotto in giro per il liquido ancora immobile o diretto in senso contrario e quindi viene a contatto successivamente con diverse parti di questo e loro cede il calore da misurare con tanta rapidità quanto è possibile date le dimensioni, lo spessore e la natura delle pareti del tubo; inoltre, per effetto del tubo stesso e delle palette, il liquido viene rimescolato e la temperatura del liquido e delle palette diviene uniforme.

Sarà evidentemente utile anche di facilitare il passaggio del calore fin sulle pareti del tubo ricevitore, quindi questo dovrà contenere un liquido che faciliti questo passaggio e perciò venga anch' esso rimescolato, ciò che si ottiene facilmente fissando al coperchio del tubo una o più astine che peschino fino al fondo del liquido, e che siano un po' distanti dall'asse del tubo; esse, partecipando al movimento di rotazione del calorimetro, agitano il liquido nel quale sono immerse.

Un effetto che può assere nocivo, deriva dall' agitazione suddetta, comunque essa si produca; esso consiste in ciò che gli scambi di temperatura coll' esterno e quindi la correzione relativa vengono aumentati, anzi nelle mie esperienze talvolta m' è occorso che essi cambiassero di segno, cioè che il calorimetro perdesse lentissimamente calore se lasciato in quiete e invece ne acquistasse con mediocre rapidità se fatto ruotare, senza che l' effetto potesse essere attribuito ad una trasformazione di movimento in calore, poichè era minima la quantità di energia dinamica impiegata. Quest' effetto è certo dovuto alle condizioni ambienti poco propizie nelle quali operavo, appare tuttavia evidente la necessità che la temperatura ambiente sia pochissimo diversa da quella del calorimetro e che varii poco e regolamente; in tali condizioni l'agitazione, rendendo regolare lo scambio di calore coll'ambiente, non può che essere utile. A causa delle suddette condizioni poco propizie, non ho potuto osservare una relazione decisa fra la dilatazione o contrazione del liquido in un minuto per effetto della temperatura esterna ed il modo col quale veniva effettuata l'agitazione, cioè secondo il numero di rotazioni alternative per minuto e secondo che queste si succedevano continuamente o ad intervalli; risultò solo, ciò che è evidente, che l'agitazione faceva aumentare le suddette variazioni tanto più quanto maggiori esse erano.

Gli scambi di calore coll'ambiente si potrebbero diminuire grandemente tanto da renderli praticamente nulli o innocui usando recipienti a doppia parete, inargentati nelle faccie prospicienti e col massimo vuoto framezzo, quali si usano per la conservazione dell'aria liquida ecc.

La sensibilità che si può ottenere con questo metodo è certo superiore a quella che si ottiene col calorimetro di Bunsen; in questo una caloria fa fondere circa gr. 0,0125 di ghiaccio producendo una contrazione di circa 1,4 mm^3, mentre nel termocalorimetro con benzina di petrolio si ottiene una dilatazione di circa 3 mm^3 per caloria, ed una maggior dilatazione potrebbe ottenersi con liquidi più dilatabili e di minor capacità calorifica per centimetro

cubo. Anche nel calorimetro Bunsen sarebbe possibile usare il suddetto modo di agitazione diminuendo così la durata della preparazione.

Riguardo al liquido più opportuno, è da notare che il mercurio ha il pregio che la sua dilatazione ed il suo calore specifico sono ben noti e costanti nei limiti della temperatura ambiente, però la sua grande densità, il suo prezzo, la proprietà di disciogliere molti metalli, ne rendono l'uso incomodo e la piccola dilatabilità termica e la grande tensione superficiale, che impedisce l'uso di tubi troppo capillari, diminuiscono la sensibilità. La conducibilità termica del mercurio non presenta tanta utilità, poichè la trasmissione del calore è agevolata dall'agitazione. L'acqua ha pure il vantaggio della dilatabilità e capacità termica ben note, e l'inconveniente della piccola dilatabilità che inoltre varia molto colla temperatura. Perciò feci uso di alcool del commercio e di benzina di petrolio, e questa mi parve preferibile.

Sperimentai con parecchi calorimetri che avevano tutti la forma cilindrica coll'asse verticale e che avevano pure verticale il tubo ricevitore del calore ed il tubo graduato sul quale si osservava la dilatazione del liquido. Sebbene le condizioni di temperatura dell'ambiente fossero molto sfavorevoli, siccome si trattava di esperienze di orientamento non presi molte cure per rimediarvi e mi contentai di circondare il calorimetro con un altro recipiente a parete semplice, di dimensioni poco maggiori per difenderlo alquanto dalle correnti d'aria e dalle irradiazioni.

I modi per produrre la rotazione sono svariati e facilmente immaginabili; io mi servii sempre dei comuni sostegni a tavolino nei quali un piatto orizzontale di ghisa è sostenuto da un'asta verticale centrata che può ruotare ed esser sollevata e abbassata entro un tubo verticale sostenuto da tre piedi. Per rendere il movimento più dolce e regolare avevo turato in fondo questo tubo con un piuoletto di legno sormontato da un chiodo a testa rotonda la quale faceva da pernio sul quale riposava e ruotava l'asta suddetta; inoltre alla parte superiore del tubo sostegno avevo collocato internamente alcuni giri sovrapposti di lamina sottile di packfong, che facevan da cuscinetto entro il quale l'asta un po' unta girava con pochissimo attrito e senza tentennare. Sul piatto era fissato con morsette un disco di legno nel quale erano impiantati tre aghi saldati al calorimetro e che gli servivano da piedi. Più semplicemente questo disco avrebbe potuto ruotare attorno ad un grosso chiodo sporgente da un piano orizzontale e penetrante in un tubetto d'ottone piantato nel centro del disco secondo l'asse.

Per produrre la rotazione avvolsi e legai solidamente al piatto e al disco suddetti una larga striscia di cartone che formava un tamburo, sul quale si avvolgeva per uno o due giri lo spago motore orizzontale i cui estremi passavano su due rulli orizzontali e terminavano con due pesi uguali; tirando questo spago in un senso o nell'altro, il tamburo ed il calorimetro ruotavano attorno ad un asse verticale. Per far sì che il calorimetro all'estremità della

corsa prenda sempre una stessa orientazione tale che la scala del tubo graduato sia ben visibile dall'osservatore, è bene che lo spago sia fissato solidamente in un punto al tamburo; allora la corsa dello spago in un senso è invariabilmente terminata quando il punto d'attacco trovasi sulla retta che congiunge l'asse di rotazione ed uno dei rulli.

In un'altra Nota descriverò alcune esperienze eseguite con questi calorimetri ed altre applicazioni dello stesso modo di agitare il liquido.

Fisica — *Sull'uso del reticolo di diffrazione nello studio dello spettro ultravioletto* [1]. Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente Battelli.

1. In un lungo lavoro che ho ancora in corso sul campo spettrale ultravioletto, ho avuto occasione di portare delle modificazioni all'ordinario metodo di uso del reticolo di Rowland per lo studio dei raggi più refrangibili.

Credo utile pertanto darne una breve relazione, in attesa della pubblicazione dell'intero lavoro.

Io avevo bisogno di uno spettro molto intenso e molto ricco di righe e di bande.

La prima di queste necessità si presenta nella maggior parte dei lavori con lo spettro ultravioletto, perchè soltanto allora riesce facile e rapido l'esame dei raggi d'onda più corta, quasi sempre deboli e facilmente assorbibili dai mezzi interposti.

La seconda condizione, cui non è possibile soddisfare se non osservando sovrapposti gli spettri emessi contemporaneamente da varî corpi, conduce ad una grande complessità di righe e di bande e richiede quindi una grande dispersione affinchè riesca poi possibile distinguere e misurare gli elementi di quei complessi che differiscono per frazioni piccolissime di lunghezza d'onda. Per questa ragione non è allora possibile adoperare lo spettro ultravioletto del primo ordine che, pur essendo sufficientemente luminoso, possiede una dispersione troppo debole.

Lo spettro del secondo ordine, cui bisognerebbe allora ricorrere, presenta altri difetti: è poco luminoso e gli si sovrappongono spettri di altri ordini; cioè da una parte lo spettro luminoso del primo ordine a cominciare dal violetto e dall'altra l'estremo ultravioletto del terzo.

La presenza di questi spettri rende penosa l'interpretazione delle osservazioni e ne maschera i risultati; bisognerebbe allora procedere alla separazione per mezzo dei prismi di quarzo. In tal modo però può venire a man-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.

care la ragione che indusse ad adoperare il reticolo di diffrazione, cioè quella di eliminare ogni mezzo assorbente.

Tali essendo i termini del problema, espongo subito il modo come l'ho risoluto.

2. Il reticolo da me adoperato ha un raggio di curvatura di 3 metri e 14438 linee per pollice.

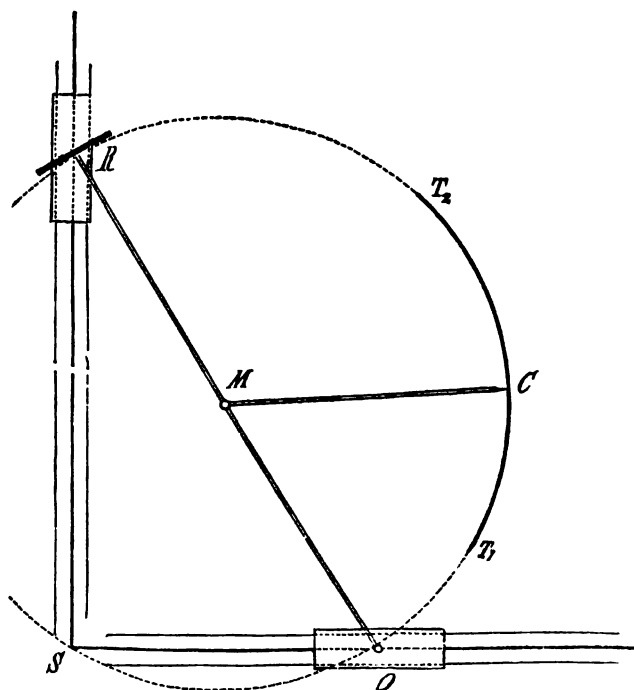



Fig. 1.

La sua installazione è semplice e non differisce sostanzialmente dalle ordinarie. Due doppie guide costituite da grosse lastre di vetro da specchi lunghe oltre 3 metri, spianate accuratamente sui bordi, sono poste ad angolo retto in un piano rigorosamente orizzontale. Su ciascuna doppia guida scorre una slitta metallica, portante una doppia piattaforma munita di viti micrometriche, di registro e di livello. Su una delle doppie piattaforme riposa il reticolo R, sull'altra il sistema oculare O (fig. 1). Un tirante di ottone RO riunisce le slitte; nel suo punto medio M è attaccata in modo da essere facilmente registrata, una seconda asta MC rigida e leggiera che può scorrere colla sua estremità, provvista di una punta, dinanzi ad un lungo telaio T_1 T_2, incurvato come la circonferenza di diametro RO e poggiato su un cavalletto da fotografia.

Su una delle lastre di vetro è attaccata una scala graduata, sulla quale sono notate le lunghezze d'onda corrispondenti alle posizioni del reticolo e le

sue distanze dalla fenditura, posta nel punto di incontro S delle linee mediane delle doppie guide.

3. Dalla teoria del reticolo è noto che con una tale disposizione si possono, al solo scorrere delle slitte, osservare gli spettri normali dei primi tre ordini, i quali si trovano ad ogni istante situati sulla circonferenza di diametro RO. Ma poichè esiste luminosità in tutti quei punti per i quali si verifichi la relazione

$$e\,(\mathrm{sen}\; i + \mathrm{sen}\; \vartheta) = N\lambda, \tag{1}$$

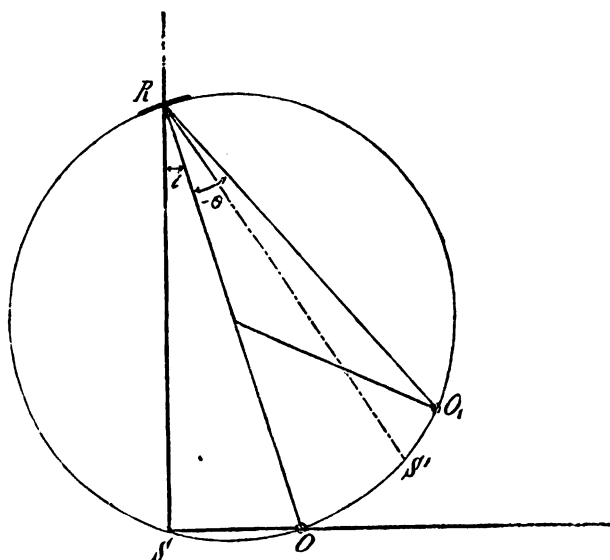



Fig. 2.

fra la costante e, gli angoli i e ϑ di incidenza e di diffrazione, l'ordine N e la lunghezza d'onda λ, così gli spettri ora rammentati non sono i soli forniti dal reticolo. Altri se ne formano infatti dalla parte opposta, a destra — cioè — di chi guardi il reticolo, e precisamente fra questo e la imagine S' della fenditura regolarmente riflessa (fig. 2).

La stessa relazione, presupponendo fissato il senso positivo dell'angolo ϑ di diffrazione come quello che partendo dalla normale RO va al raggio diffratto per l'angolo acuto situato dalla parte del raggio incidente, permette di distinguere in altro modo gli spettri normali dagli altri di destra: infatti, mentre sen ϑ può prendere nei primi dei valori positivi e negativi, assume nei secondi dei valori costantemente negativi.

Per le proprietà fisiche, gli spettri situati a destra differiscono da quelli situati a sinistra per essere più alti, più luminosi e più dispersi di questi,

come ha anche notato il prof. Rizzo descrivendo una disposizione (1) da lui creduta vantaggiosa per il loro studio.

Per *ogni valore* dell'angolo i, egli dice, oltre all'imagine formantesi in O (fig. 2), se ne forma un'altra sulla circonferenza di diametro RO in quel punto O′ per cui

$$\operatorname{sen} \vartheta = -2 \operatorname{sen} i.$$

Data allora questa rispondenza di imagini spettrali, si attacchi nel punto medio dell'asta RO una seconda asta mobile in un piano orizzontale e portante nell'estremità O_1 un secondo oculare o una lastrina fotografica incurvata come la circonferenza di diametro RO, si otterranno così anche queste seconde imagini.

Questo metodo presenta realmente qualche vantaggio. Però non è vero che per *ogni valore* dell'angolo i si abbia una imagine O_1 corrispondente alla imagine O di sinistra, perchè proprio in grazia della citata relazione

$$\operatorname{sen} \vartheta = -2 \operatorname{sen} i, \tag{2}$$

non è più possibile alcun valore reale per l'angolo ϑ al di là del valore dell'angolo i eguale a 30°. In tal caso $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ ed il raggio diffratto è sul reticolo. Nei reticoli adoperati dal prof. Rizzo e da me, per cui $e =$ mm. 0,0017592, la lunghezza d'onda delle linee che si dovrebbero corrispondere per il valore $i = 30°$ è la $\lambda = 879,6\ \mu\mu$ dell'ultrarosso del primo ordine od anche la $\lambda = 437,8\ \mu\mu$ dell'indaco del secondo.

Ma vi è di più. Nelle vicinanze del valore massimo dell'angolo ϑ la dispersione che, come è noto, viene espressa in funzione di ϑ e di λ mediante la formola

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{N}{e \cos \vartheta}, \tag{3}$$

assume valori grandissimi per la regione dello spettro più prossima al reticolo, e rende impossibile ogni osservazione, diretta o fotografica. D'altra parte la possibilità di osservazione viene ulteriormente limitata dalla eccessiva inclinazione dei raggi diffratti sulla circonferenza di diametro RO, sempre nelle vicinanze del reticolo R.

Per tutte queste ragioni il metodo del prof. Rizzo non è generale e si restringe ad un piccolo campo spettrale.

(1) G. Rizzo, Atti Acc. di Torino, vol. 34.

4. In questo rientrerebbe, è vero, lo spettro ultravioletto del primo ordine; ma, come apparirà subito da quello che andrò dimostrando, sarebbe stato scarsissimo il vantaggio che avrei potuto ricavare dalla disposizione suddetta, poichè lo spettro ultravioletto presenterebbe in tal caso una dispersione poco differente da quella del corrispondente spettro di sinistra.

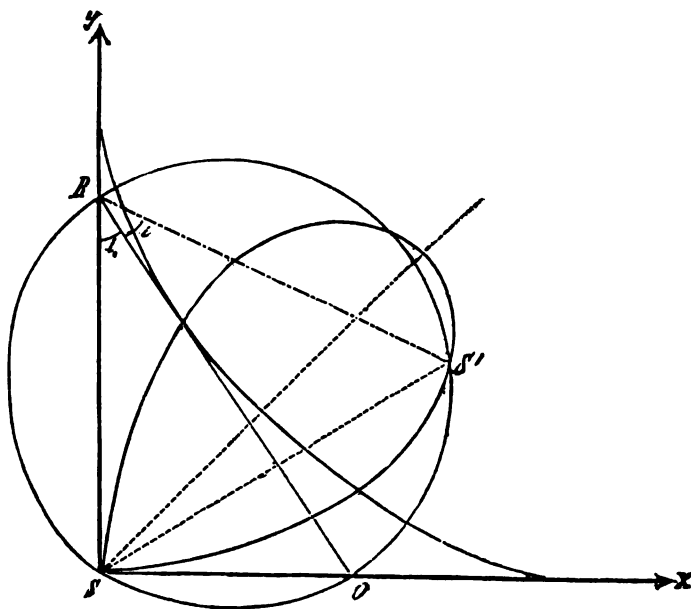



Fig. 3.

È necessario ora vedere dove questi spettri sono situati, come dipendono dall' angolo d' incidenza, come si differenziano fra loro, e quale è la loro dispersione; solo allora sarà possibile sciegliere lo spettro che apparirà più vantaggioso.

Gli spettri situati a destra, al pari di tutti gli altri forniti dal reticolo di diffrazione, occupano sulla circonferenza mobile di diametro RO delle posizioni che dipendono dall' angolo d' incidenza o, ciò che è lo è stesso, dalla posizione dell'asta RO relativamente agli assi coordinati S x, S y, che essa percorre coi suoi punti estremi (fig. 3).

Intanto è noto che la giacitura di questi spettri è fra il reticolo R e la imagine S′ della fenditura, regolarmente riflessa.

Ora, quando l' angolo d' incidenza, partendo da zero, varia per i suoi valori crescenti, l' asta RO viene ad inviluppare una curva nota sotto il nome di astroide e l' imagine S′, venendo volta per volta a formarsi in quel punto che

è il simmetrico di S rispetto alle singole posizioni dell'asta RO, descrive una curva nella quale $SS' = \varrho = RO \text{ sen } 2i$.

Mentre al crescere di i l'apice R del reticolo scorre lungo l'asse RS nel senso RS ed il punto S' va avvicinandosi al reticolo descrivendo la suddetta curva, l'ultravioletto del primo ordine, che è situato dalla parte del punto S', è l'unica regione dello spettro di destra che per grandi valori dell'angolo di incidenza può rimanere discosto dal reticolo.

Ciò posto, si scorge subito dalla formola

$$\lambda = e\,(\text{sen } i + \text{sen } \vartheta)$$

che i successivi valori ϑ corrispondenti ad una lunghezza d'onda fissa vanno algebricamente decrescendo col crescere dell'angolo i, ossia — tenendo presente che ϑ nel caso in discorso è sempre negativo — vanno aumentando in valore assoluto.

Dalla formula (3) che esprime la dispersione in funzione di ϑ, si ricava infine che anche la dispersione cresce con i.

Spostando quindi il reticolo da una posizione R_1 ad un' altra R_2 per modo che sia $i_2 > i_1$, si otterrà uno spettro ultravioletto del primo ordine I_2 più disperso per tutta la sua estensione e a parità di lunghezza d'onda, dello spettro I_1 corrispondente alla prima posizione. Aumentando notevolmente il valore dell'angolo d' incidenza, si potrà far raggiungere a tale spettro di destra del primo ordine una dispersione che si avvicini o superi quella posseduta dallo spettro normale del secondo ordine.

In ciò consiste appunto il metodo che ho seguito.

Non mi sono curato di mantenere alcun legame fra le imagini di sinistra e quelle di destra ed ho potuto così trasportare l'oculare dove meglio mi conveniva, riserbando ad esso solamente l' ufficio di indicare il valore dell' angolo di incidenza mediante la scala delle distanze intercedenti fra la fenditura e lo stesso oculare e che, come ho già detto, è unita all'apparecchio. Se poi nell'oculare comparisce una riga la cui lunghezza d'onda sia conosciuta, allora l'angolo di incidenza sarà noto senz'altro e con maggiore precisione per mezzo della formola

$$\text{sen } i = \frac{N\lambda}{e}.$$

Quando tutta la montatura del reticolo è esatta e quando questo è perfettamente a foco in ogni sua posizione, una pellicola stesa sul telaietto rigorosamente incurvato come la circonferenza di diametro RO corrispondente alla assunta posizione del reticolo è, diciamo così, anch' essa a foco e può ricevere l' impressione delle imagini spettrali. In un tale spettro, è vero, la dispersione non è costante, poichè essa cresce con λ; però in molti casi ciò

non costituisce un inconveniente. In queste fotografie riesce semplice anche il calcolo ed il riconoscimento delle lunghezze d'onda; raccogliendo sempre sulla stessa pellicola l' imagine regolarmente riflessa e lo spettro, se s è la distanza fra una riga qualsiasi e quella imagine, si ricava, fatto $N = 1$, da una nota relazione la formula:

$$\lambda = 2e \operatorname{sen} \frac{s}{4r} \cos\left(i - \frac{s}{4r}\right),$$

dove λ è espresso per i valori di s e di i e $2r = RO$.

Con questo metodo ho ottenuto delle fotografie di una nitidezza, di una intensità e di una dispersione inaspettate e sono stato in grado di compiere degli studî, nei quali avrei dovuto necessariamente valermi dello spettro normale del secondo ordine.

Ho potuto così evitare gli inconvenienti presentati da quest'ultimo ed approfittare al tempo stesso di quella singolare luminosità che distingue lo spettro di destra del primo ordine.

Chimica — *Azione dell' ozono sulla ipoazotide.* Nota preliminare di Demetrio Helbig, presentata dal Socio Cannizzaro.

Nel proseguire i miei studî sul prodotto verdastro ottenuto col far passare una serie di scariche elettriche attraverso l' aria liquida, ho accertato contenere quel prodotto in gran parte *anidride nitrosa* $N^2 O^3$. Sono poi riuscito a determinare le condizioni in cui questa sostanza si ottiene pura, e riferirò fra breve in esteso il risultato delle mie indagini.

In una Nota precedente accennai alla esplosività del composto verdastro. Ho osservato che questo carattere è inerente alla sostanza quando insieme ad essa, nell' aria liquida, si genora ozono: essendo riuscito ad evitare la formazione di quest' ultimo corpo, il carattere esplosivo del composto verdastro è completamente scomparso. Questo fatto m' indusse a studiare l' azione dell' ozono sui diversi ossidi dell' azoto.

L' ozono, fatto passare sulla ipoazotide raffreddata, dà luogo alla formazione d' una sostanza assai volatile, per condensare la quale bisogna ricorrere a temperature vicine a quella dell' aria liquida. Si ottiene allora un corpo solido, bianco, fioccoso, il quale a pressione ordinaria volatilizza senza fondere: il suo vapore, venendo in contatto dell' aria umida, produce abbondanti fumi bianchi. La sostanza non sembra esplosiva.

Io sto continuando gli studî su questo corpo, e sui prodotti che l' ozono potrà dare con altri ossidi dell' azoto.

Mineralogia. — *La bournonite nella miniera della Argentiera della Nurra (Portotorres, Sardegna).* Nota del prof. Domenico Lovisato, presentata dal Socio Struever.

Mineralogia. — *Osservazioni sopra alcuni minerali del granito di Baveno.* Nota di Ettore Artini, presentata dal Socio Strüver.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Rocce a glaucofane di Val d'Ala nelle Alpi occidentali* (1). Nota del dott. A. Rosati, presentata dal Socio Strüver.

I due campioni di rocce, di cui riporto la descrizione petrografica, mi furono cortesemente affidati per lo studio dall' illustre prof. G. Strüver, dal quale ebbi pure la seguente comunicazione circa la loro provenienza:

« La prima roccia (campione 1°) fu da me trovata in poche lastre erra-« tiche al piede della Testa Ciarva in mezzo ad altre svariatissime roccie « che rappresentano il residuo della morena laterale sinistra dell'antico ghiac-« ciaio, e quindi essa proviene con certezza dalle scoscese balze della Cia-« marella rivolte verso il piano della Mussa.

« Trovai la seconda roccia (campione 2°) in più bocchi non molto grossi « nel cono di dejezione del vallone di Arnas, a qualche centinaio di metri « sopra il piano della Mussa.

« I ciottoli trovati da Williams a Germagnano possono provenire da « tutte e tre le valli della Stura le cui acque ivi sono già tutte riunite. « Certo è ora che rocce ad anfibolo azzurro (glaucofane o gastaldite) si tro-« vano in posto nelle due valli di Ala e di Chialamberto ».

Campione 1°.

Roccia grigio-azzurrognola, compatta, ma a tessitura manifestamente scistosa. In piani paralleli alla scistosità lascia osservare numerose lamelle azzurre di *amfibolo*, e altre lamelle, piccole, splendenti di *muscovite*, distribuite sopra un fondo color grigio-cenere; solo in alcuni punti sono delle macchiette rossicce dovute a *granato*.

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Roma.

Al microscopio i costituenti essenziali si mostrano *amfibolo azzurro, epidoto e zoisite;* inoltre si osservano *granato, smaragdite, magnetite, clorite* di seconda formazione, *muscovite, rutilo* e *quarzo.*

L'*amfibolo azzurro*, che costituisce circa la metà della roccia, si sviluppa per lo più in grandi cristalli, a contorni mal definiti, allungati secondo l'asse *z*.

Il pleocroismo, alquanto debole, è quello comunemente osservato:

a giallo-chiarissimo, quasi incoloro;

b violetto;

c azzurro-celeste.

Le sezioni orizzontali e quelle parallele a }100{ sono rare; sono invece frequenti le sezioni verticali presso a poco parallele a }010{. Le inclusioni son date da *granato*, *rutilo* e *magnetite*. Caratteristico di questi cristalli è che spesso i loro contorni appaiono come frangiati da una sostanza fibrosa pleocroica, e allora nelle sezioni prossime a }010{ l'angolo d'estinzione contorto sulle tracce della sfaldatura, mentre è molto piccolo (6°-7°) per l'*amfibolo azzurro*, può anche raggiungere i 18° per il materiale fibroso, e il pleocroismo varia in modo, che, orientando opportunamente la sezione, si ha o un nucleo di color azzurro-celeste frangiato di verde intenso, o un nucleo giallo-chiaro che agli orli diviene verde-chiarissimo. Trattasi evidentemente di una trasformazione dell'*amfibolo azzurro* in *smaragdite*, e l'alterazione talvolta non si limita alla parte periferica del cristallo, ma procede verso l'interno seguendo specialmente le linee di frattura o di sfaldatura. Alterazioni simili furono osservate dal prof. Bucca [1] nella gastaldite dell'eclogite di Uja di Bellavarda. *Smaragdite* originaria è poi discretamente diffusa nella roccia sotto forma di aggregati fibrosi di color verde intenso interposti tra i maggiori cristalli di *amfibolo azzurro, epidoto, zoisite* e *granato*. Quanto alla distinzione dell'*amfibolo azzurro* in *glaucofane* e *gastaldite* questa non può farsi colla sola analisi microscopica differendo la *gastaldite* dal *glaucofane* per un maggior tenore in $Al_2 O_3$.

L'*epidoto* forma cristalli imperfetti o granuli, di colore giallo pallidissimo, quasi incolori; è frammisto a *zoisite*, da cui distinguesi principalmente a nicol incrociati per maggior vivacità dei colori d' interferenza. È notevole la presenza di geminati secondo la legge: piano di geminazione e di congiunzione }100{, e con i caratteri già descritti da Hans Reusch [2] per alcune rocce della Norvegia. *Epidoto* e *zoisite* distribuiti in parti quasi uguali sono abbondantissimi e presentano incluse rare granulazioni principalmente dovute a *rutilo*.

(1) L. Bucca, *Appunti petrografici sul gruppo del Gran Paradiso nelle Alpi occidentali*. Bull. R. Com. Geolog. Ital., 1886, pag. 460.

(2) Hans Reusch, *Mikroskopische Studien an norwegischen Gesteinen*. N. Jahrb. f. Min., Geol. u. s. w. 1883, 2, pag. 178.

Il *granato* è piuttosto raro. Ordinariamente ha colore rossastro, ma talvolta è affatto incoloro, e prende forma di granuli o aggregati di granuli. Presenta inclusioni di *magnetite* e di *rutilo*, e in qualche cristallo incoloro molto deformato apparisce birefrangente per anomalia ottica.

Il *rutilo* in granuli gialli forma insieme alla *magnetite* inclusioni nei cristalli maggiori sopradescritti, e rappresenta indubbiamente la parte più antica della roccia. Qualche granulo è parzialmente o completamente trasformato in una sostanza nera opaca probabilmente riferibile all'*ilmenite*.

La *clorite* secondaria è in piccola quantità; e così pure il *quarzo*, che in forma di granuli è interposto come minerale di ultima formazione fra i cristalli più antichi.

Sono invece abbondanti le lamelle allungate, intrecciate, e con sfaldature fini e diritte di *muscovite*.

Il fatto che tutti i cristalli sono più o meno frantumati, il *quarzo* con estinzione alquanto ondulosa, il *granato* che non di rado presenta doppia rifrazione, la *mica* con i foglietti talvolta ricurvi, accennano evidentemente alle potenti azioni dinamiche subite dalla roccia.

Secondo la classificazione data dal Rosenbusch (1) la nostra roccia è una *glaucofanite* (2) *scistosa*, cioè una roccia essenzialmente costituita di *amfibolo azzurro, epidoto* e *zoisite*, paragonabile ad un'*amfibolite*, in cui il *feldspato* sia stato sostituito da *epidoto* e *zoisite*.

Campione 2°.

Roccia di color grigio-azzurrognolo cupo, a tessitura finamente scistosa. La colorazione azzurra è conferita da numerosissimi cristallini di *amfibolo*, che costituisce la parte principale della roccia e si associa a numerosi cristalli rossicci granulari di *granato*.

L'osservazione macroscopica rivela anche la presenza della *pirite* in granuli sparsi, e del *quarzo*, specialmente raccolto in determinate direzioni sotto forma di venule a tessitura granulare e mescolato al granato, che al suo contatto mostrasi in piccoli, ma regolarissimi cristalli rombododecaedrici. Al microscopio appare distintamente che gli elementi essenziali della roccia sono l'*amfibolo azzurro*, il *granato* e l'*epidoto*.

L'*amfibolo azzurro* ha gli stessi caratteri studiati nella roccia precedente, ma il suo pleocroismo è più accentuato, ed è molto più rara la sua alterazione in *smaragdite*.

Il *granato* forma preferibilmente grandi cristalli rossastri, da cui risultano sezioni esagonali o pentagonali, attraversate in vario senso da profonde

(1) H. Rosenbusch, *Elemente der Gesteinslehre*, pag. 523.

(2) N. B. Il Rosenbusch (loc. cit., pag. 522) chiama « Glaukophangesteine » tutte quelle rocce di cui l'amfibolo azzurro (glaucofane o gastaldite) è parte essenziale.

incisure, e con abbondanti inclusioni di *magnetite*, *rutilo* e *zircone*. Talvolta gli orli della sezione e le linee di frattura sono colorati in verde per alterazione in materiale *cloritico*. Esso non è uniformemente distribuito nella roccia, giacchè alcune sezioni sottili lo mostrano in grande abbondanza, mentre altre ne difettano in modo da farlo sembrare elemento accessorio. È notevole che alcune sezioni con forme allungate, irregolarissime, sono incolore, non danno mai prodotti d'alterazione, e spesso si dimostrano birefrangenti.

L'*epidoto* è quasi sempre granulare, ed ha colore giallo pallidissimo, come nella roccia precedente; per quantità è inferiore al *granato*.

Fra gli accessorî notiamo:

zoisite in lunghi prismi,

pirite spesso fortemente limonitizzata,

clorite di seconda formazione,

mica bianca o *talco* in fibre ondulate, alquanto intrecciate, spesso radiate,

zircone granulare, ma spesso anche in forma di prismi allungati terminati da ambo i lati dalla piramide }111{,

magnetite, *rutilo* e *quarzo* con i caratteri osservati nella roccia precedente, salvo che il *quarzo* è molto più abbondante, e nel *rutilo* è più diffusa l'alterazione in *ilmenite* (?).

La distinzione tra *zircone* e *rutilo* è in questo caso nettissima, poichè il *rutilo* apparisce sempre in granuli gialli più o meno alterati in *ilmenite* e con deboli colori d'interferenza, mentre lo *zircone* è affatto incoloro, non presenta traccia di alterazione, e a nicol incrociati da' vivacissimi colori d'interferenza più o meno iridati.

Anche in questa roccia sono evidenti, come risulta specialmente dai molti cristalli frantumati e dal *granato*, che non di rado è birefrangente, le forti azioni dinamiche da essa subite.

Seguendo sempre la classificazione tedesca del Rosenbusch per la relativa abbondanza del granato crediamo di dover classificare la presente roccia come una *eclogite* a *glaucofane*.

Le nostre rocce differiscono notevolmente dalle *eclogiti* a *glaucofane* di Germagnano descritte dal Williams ([1]), nelle quali non trovasi traccia di *epidoto*, che al contrario è elemento essenziale della *glaucofanite*, e della *eclogite* a *glaucofane* sopradescritte. Esse sono invece simili, almeno per la concordanza negli elementi costitutivi, alle *eclogiti* a *gastaldite* di Uja di Bellavarda e di Val Tournanche (gruppo del Gran Paradiso) descritte dal Bucca ([2]).

Quanto alla loro età geologica debbono riferirsi alla « zona delle pietre verdi » del Gastaldi, che molti geologi ritengono essere arcaica.

([1]) G. H. Williams, *Glaukophangesteine aus Nord-Italien*. N. Jahrb. f. Min. Geol. u. s. w., 1882, 2, pag. 201.

([2]) L. Bucca, *Appunti petrografici sul gruppo del Gran Paradiso nelle Alpi occidentali*. Bull. R. Com. Geolog. Ital., 1886, pag. 459.

Geologia. — *Sul rinvenimento del calcare a Fusuline presso Forni Avoltri, nell'alta Carnia occidentale.* Nota preventiva di MICHELE GORTANI, presentata dal Socio CAPELLINI.

Sono trascorsi ormai quasi ventidue anni da quando il prof. Taramelli pubblicava la sua *Carta geologica del Friuli* (1) e l'annessa monografia illustrativa, che troppo modestamente egli volle chiamare *Spiegazione*, e che segna una data così importante nella storia geologica di tutta la regione friulana.

Se da allora la conoscenza della bella serie paleozoica dell'alta Carnia fece progressi molto notevoli, conviene però osservare che questi si riferiscono in massima parte alla catena principale delle Alpi Carniche, dalle enormi masse, oggi ritenute devoniane, del gruppo del Coglians, alla splendida formazione carbonifera e permocarbonifera che occupa il lembo più orientale delle nostre Alpi, perdendosi nei contrafforti delle contigue Alpi Giulie e delle Karavanche.

Invece assai poco si sono accresciute le nostre cognizioni geologiche sui terreni paleozoici che si estendono a mezzogiorno di tale catena, scomparendo da un lato sotto le masse più recenti del Tuglia, del Siera, del Pleros, e dall'altro passando gradualmente alle formazioni permiane e triassiche della Carnia meridionale. Tale regione è costituita quasi per intero da scisti più o meno argillosi di varia natura, spesso fortemente talcosi o micacei, e interrotti qua e là da grovacche, da arcosi, e da masse calcaree più o meno cristalline e di vario colore.

Nell'agosto scorso, perlustrando diligentemente la parte più occidentale di questa formazione, trovai sopra Forni Avoltri un deposito di calcare a Fusuline. La località precisa si trova sul fianco nord-est del Colle di Mezzodì, alle falde del monte Tuglia (2). Nella carta geologica del prof. Taramelli è segnata anche in questo punto la zona a « scisti micacei o talcosi, ricchi di quarzo, siluriani e più antichi ». Benchè la falda in questione del Colle di Mezzodì si estenda lungo la riva destra del torrente Degano parallelamente alla strada provinciale che va serpeggiando sulla riva sinistra, l'errore della carta si spiega assai facilmente, in quanto che il pendio è ripidissimo e completamente rivestito da un fitto bosco di abeti e di faggi, che ostacola molto ogni esatta osservazione. Fortunatamente questa è ora meno ardua, perchè l'anno scorso, dovendosi fare un taglio nel bosco, vi si praticarono quelli che in Carnia son chiamati *martôrs*, furon cioè messe a nudo delle strisce di terreno per farvi scivolare al basso i tronchi recisi.

(1) Pavia, luglio 1881.

(2) V. la tavoletta « Prato Carnico » dell'Istit. geogr. militare.

Pur troppo la grande difficoltà di accesso e l'imperversare del tempo burrascoso non mi permisero quest'anno che di raccogliere uno scarso materiale, senza poter determinare alcuna condizione di giacitura, nè alcun rapporto stratigrafico.

Sembra, a ogni modo, che tutta la falda orientale e settentrionale del Colle di Mezzodì sia costituita di calcare, qua e là fossilifero. Il calcare è per lo più compatto, molto duro, spesso a tipo di breccia, di colore grigio o più spesso rossastro, con frequenti vene di calcite. Dove meglio si manifesta la facies del calcare a Fusuline, queste son tanto numerose, che spesso la loro massa apparisce maggiore di quella della roccia includente. L'erosione le fa spiccare molto nette e quasi sempre in sezione trasversale; se non che la durezza della roccia fa sì che il guscio delle Fusuline venga intaccato assai più facilmente di essa, e quindi la sua superficie erosa non presenta che il modello, per quanto esatto, del Foraminifero in sezione. Per lo stesso motivo i fossili non si lasciano isolare che con estrema difficoltà; anzi le vere Fusuline si possono studiare soltanto sulle sezioni sottili della roccia.

La specie che ho potuto determinare sono le seguenti:

Fusulina alpina communis Schellw.
» aff. *alpina fragilis* Schellw.
» *regularis* Schellw.
» cfr. *complicata* Schellw.
» n. f.
Schwagerina princeps Ehrb.
» *fusulinoides* Schellw.
Bigenerina sp.
Productus cfr. *semireticulatus* Mart.
? *Reticularia lineata* Mart.
Rhynchonella Sosiensis Gemm.
Spirifer sp.
Terebratula sp.
Chrysostoma tornatum Gemm.
Loxonema sp.
Aviculopecten cfr. *Sedgwickii* M.' Coy. sp.
Cyclolobus cfr. *Stachei* Gemm.

oltre a frammenti di Crinoidi e ad un corallario che sembra affine ai Favositidi.

Tutti questi fossili verranno prossimamente descritti in una Memoria che sarà pubblicata nella Rivista italiana di Paleontologia.

Per quanto sia limitato il numero delle forme trovate in questa prima e affrettata raccolta, esse permettano tuttavia, mercè i risultati cui è giunto lo Schellwien ([1]) nelle Alpi Carniche più orientali, di fissare con esattezza l'età precisa del giacimento in questione.

Infatti, da un lato per la frequenza delle *Schwagerina princeps* e *S. fusulinoides*, e dall'altro per la mancanza delle *Fusulina alpina antiqua* e *F. tenuissima*, il nostro calcare non può appartenere nè al 1° nè al 2° dei quattro piani in cui Frech ([2]), seguendo lo Schellwien, divide il Carbo-

([1]) E. Schellwien, *Die verticale Verbreitung der Foraminiferen im Karnischen Obercarbon* (aus *Die Fauna des Karnischen Fusulinenkalks*, in « Palaeontographica », XLIV, 1898, pag. 276).

([2]) F. Frech, *Das Obercarbon der Karnischen Alpen* (*Lethaea paleozoica*, vol. II, pag. 354).

nifero superiore carnico. Inoltre, se la *Schwagerina princeps* e la *Fusulina alpina communis* si trovano entrambe nel 3° piano (piano a Schwagerine) di Frech, non compariscono in esso nè la *Schwagerina fusulinoides* nè la *Fusulina regularis*, che si trovano invece nel 4° e che la nostra roccia contiene. Questo fatto, insieme con la concordanza dei pochi Molluschi e della *Rhynconella* con quelli del Permocarbonifero siciliano, mi conducono a riferire la parte nord-est del Colle di Mezzodì al piano più alto del Carbonifero superiore carnico, al livello cioè degli strati di calcare rossastro del Trogkofel, di Neumarktl e di Goggau.

L'attuale ritrovamento ha quindi una speciale importanza perchè, oltre all'estendere notevolmente la zona della formazione carbonifera delle Carniche, è la prima località italiana in cui si trovi rappresentato il Permocarbonifero alpino.

Patologia. — *Contribuzione alla sistematica dei Culicidi con speciale riguardo alla diffusione della malaria umana.* Nota di Alfredo Bordi, presentata del Socio Grassi [1].

Intorno ai *Culicidi*, che hanno acquistato tanta importanza, dopochè si scoprì in essi gli ospitatori definitivi dei parassiti malarici, in questi ultimi tempi uscirono parecchi lavori, alcuni dei quali sono anche molto estesi. Spiccano tra questi le due Monografie del Ficalbi (*Revisione sistematica della famiglia delle Culicidae europee*, Firenze 1896, e *Venti specie di zanzare italiane*, Firenze 1899); quella del Giles (*A handbook of Gnats or Mosquitoes*, London 1900 e 1901); e quella del Theobald (*A Monograph of the Culicidae or Mosquitoes*, London 1901, in 3 vol.).

Vi sono poi parecchie Memorie assai più brevi, ma non meno importanti (Grassi, Noè, Tsuzuki, Dönitz ecc.).

In complesso oramai si conoscono *Culicidi* delle più svariate parti del mondo, ma la sistematica di questi ditteri è ancora non poco imperfetta, sia perchè molte forme, estesamente diffuse, differiscono tra loro così poco da non poter determinare con facilità se si tratti di specie o di varietà; sia perchè le antiche raccolte lasciano molto a desiderare quanto alla buona conservazione, e quindi rendono difficile l'identificazione delle specie degli autori precedenti; sia perchè non tutti gli autori vanno d'accordo nella scelta dei caratteri distintivi dei generi e delle specie; sia perchè non si è tornato ad esplorare certe regioni donde provenivano alcune specie incompletamente descritte da autori non recenti, per es. la costa dell'Asia minore, di fronte all'isola di Rodi, dove nel 1846 fu trovato per la prima volta l'*A. pictus* da Loew in soli esemplari maschili.

Gli antichi, come Meigen (1818), Macquart (1854) e Rondani (1856), si servirono unicamente dei caratteri offerti dalle ornamentazioni colorite. In

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Anatomia Comparata di Roma.

seguito Arribàlzaga mise a profitto specialmente il modo di unghiatura nei due sessi. Questa prima tendenza verso caratteri anatomici fu seguita e coronata dal recente lavoro di Ficalbi (1899), nel quale si dà grande valore sistematico al numero degli articoli costituenti i palpi femminili, alla forma dei femori, dalle appendici sessuali maschili ecc. Contemporaneamente e dopo di lui si occuparono dello stesso argomento il Grassi e il Noè, per modo che si può dire che conosciamo le zanzare d'Italia, meglio di quelle di qualunque altro paese.

Una grande raccolta di *Culicidi* di tutto il mondo si trova nel *British Museum* di Londra. Molto materiale è stato raccolto anche dal Koch *nelle sue spedizioni per studiare la malaria, materiale che viene illustrando il Dönitz.*

La collezione del *British Museum* fu studiata estesamente dal Theobald. La sua Monografia, sopra citata, completata da una Nota del 1902 (*Journal of Trop. Med.* 16 giugno) ha grande valore come lavoro molto paziente, accurato e minuzioso, ma presenta il difetto di dare un apprezzamento esagerato a caratteri di troppo secondaria importanza, per cui furono create senza necessità moltissime specie nuove e vennero proposti parecchi generi nuovi, basati in parte su caratteri di discutibile valore (V. più avanti).

Esatto contributo è quello del Dönitz (*Beiträge zur Kenntniss der Anopheles*, Leipzig 1902), per quanto limitato a poche forme di *Anopheles*; ma poi scende anch'egli a differenze specifiche, che, come diremo tra poco, mancano di una costanza assoluta.

Quindi è che la sistematica dei *Culicidi*, se si eccettuano le forme italiane, è ancora così imperfetta, da augurarsi che si rifaccia quasi tutta, usufruendo come confronto il materiale accumulato nei Musei e negli Istituti di igiene di tutto il mondo. Io non ho potuto imprendere questo lavoro per mancanza di tempo e di mezzi, e mi son limitato ad un *Contributo*, servendomi del materiale pervenuto al prof. Grassi dai più lontani paesi e della coadiuvazione del medesimo nell'indirizzo del mio lavoro. Di questo Contributo do qui un breve sunto.

Devo premettere che il Grassi e il Noè ritennero opportuno suddividere la famiglia delle *Culicidae* nelle due sottofamiglie delle *Anophelinae* e delle *Culicinae*, sottofamiglie accettate anche da Theobald e da Giles. Tanto nella sottofamiglia delle *Anophelinae*, quanto in quella delle *Culicinae*, va notato che gli autori recenti testè citati, cioè Theobald e Giles, propongono, come ho già detto, parecchi generi e molte specie nuove. Questa grande moltiplicazione di generi e di specie, è dovuta al fatto che i due autori dànno troppa importanza a caratteri del tutto secondari. Così ad es. il Theobald considera come essenziali i seguenti, cioè: 1) i caratteri delle squamme; 2) il rapporto tra l'intera prima forchetta delle ali ed il suo scapo; 3) la distanza che nelle ali separa la venatura trasversa distale posteriore (posterior transverse vein) della media (middle ecc.); 4) il rapporto tra la lunghezza della prima e della seconda forchetta alare. L'autore in discorso si serve anche

di qualche altro carattere di minore importanza, come il numero delle setole del lobo medio dello scutello ecc.

I caratteri delle squamme si riferiscono alla loro forma e alle loro dimensioni. Alla forma vien dato valore generico, alle dimensioni specifico. Ebbene, da quel poco che io ho potuto osservare nel gen. *Culex* con esemplari di *pipiens*, nel gen. nuovo *Stegomyia* con esemplari di *C. elegans*, e nel gen. nuovo *Taeniorhynchus* con esemplari di *C. Richiardii*, sembra che la forma delle squamme sia un carattere costante; ma dopo i dubbi sollevati in proposito dal Dönitz (op. cit. pag. 37 e 38), non oso pronunciarmi in proposito.

Il carattere delle dimensioni delle squamme viene considerato come di valore specifico, ma dalle mie osservazioni risulta che esso è incostante, come sono incostanti gli altri tre caratteri suddetti, cioè 2) ,3) e 4).

I caratteri specifici del Theobald non possono pertanto condurci che ad una classificazione imperfetta.

***

Per ciò che riguarda la sottofamiglia delle *Culicinae*, ho preso in esame specialmente il *C. pipiens* e le specie e le varietà ad esso affini secondo il Theobald. Io non posso approvare la creazione della specie nuova *C. quasipipiens* Th. perchè fondata sui caratteri incostanti sopra esposti. Del pari non ho potuto approvare la ripristinazione della specie *C. fatigans* Wie. *con le sue cinque sottospecie e quindici varietà*, per la ragione che anch'essa è fondata su caratteri che io stesso ho trovato variabili. Già prima che io controllassi i caratteri differenziali tra *pipiens* e *fatigans*, il prof. Grassi, dopo avere esaminato alcuni esemplari del *Mosquito grigio* di Ross, che secondo Giles è il *C. fatigans* Wie., asseriva trattarsi di nient' altro che del *C. pipiens*, e che nessuna delle differenze stabilite da Giles aveva valore, perchè esse rappresentavano variazioni facili a riscontrarsi anche nei nostri *C. pipiens*, eccetto la differenza delle venature delle ali, che era un' illusione dovuta ad osservazione inesatta (Cfr. *Studi di uno zoologo sulla malaria*, Roma 1901, pag. 10). Il fatto che il *C. Skusii*, il quale secondo Theobald è sottospecie del *C. fatigans*, si presta insufficientemente a far da ospitatore intermedio della *Filaria immitis*, precisamente come è insufficiente il *C. pipiens*, deponeva già in favore della identità dei due *Culicidi* in discorso, da me riconosciuta in base ai loro caratteri.

L'identificazione del *C. fatigans* col *C. pipiens*, in sostanza viene ad essere ammessa anche dal Giles, che dopo avere esaminato esemplari italiani di *C. pipiens*, pubblicò che il *fatigans* si trova anche in Italia. Posso aggiungere che in Italia si trovano anche tutte le forme distinte, come ho detto, da Theobald in 3 specie, cioè *C. pipiens*, *C. quasipipiens* e *C. fatigans*; quest'ultimo in 5 sottospecie e 15 varietà. Nè hanno una speciale distribuzione geografica, trovandosi svariate forme in una medesima località. Aggiungasi che esistono già in Italia forme intermedie tra tutte le forme in discorso.

Questa identificazione è della massima importanza, inquantochè elimina definitivamente l'errore di Ross, il quale aveva creduto di riscontrare nel *C. fatigans* (*mosquito grigio* di Ross) stadi di sviluppo del parassita della terzana, mentre il Grassi con molti argomenti ha dimostrato che il *C. pipiens* non può propagare nessun parassita malarico umano, come non possono propagarli le altre specie di *Culex* (Cfr. *Studi* ecc., Cap. VI, n. 2). Quanto agli sporozoiti trovati da Koch e Gosio nelle ghiandole salivali del *C. pipiens* a Grosseto, e attribuiti ai parassiti della malaria umana anzichè al *Proteosoma*, per il semplice fatto che i passeri dei dintorni non erano infetti di questo sporozoo (Dönitz 1902, op. cit., pag. 15 e 16), c'è da osservare che appena il Koch fece la sua pubblicazione, il prof. Grassi andò a Grosseto per ripetere le osservazioni di Koch, e trovò che i passeri infetti erano relativamente frequenti, anzi con essi infettò i *C. pipiens* di *Proteosoma* (Grassi, 1901, op. cit., pag. 139).

In breve tanto il *C. quasipipiens*, quanto il *C. fatigans* con le sue *5 sottospecie* e *15 varietà*, devono considerarsi come semplici variazioni dell'unica specie *C. pipiens*, e questi *Culex* non propagano la malaria.

***

Per ciò che si riferisce alla sottofamiglia delle *Anophelinae*, Theobald ha proposto di dividerle in otto generi. Essi vengono distinti dalla forma diversa delle squamme che ricoprono il torace, l'addome e le ali. Ma questa divisione non è ammissibile, perchè, volendo distinguere dei generi, dovrebbe venire elevata a questo grado ciascuna delle quattro forme italiane, cioè l'*A. pseudopictus* Gr., l'*A. superpictus* Gr., l'*A. claviger* F. e l'*A. bifurcatus* L., i quali si distinguono spiccatamente l'uno dall'altro. Invece, volendosi servire del criterio di Theobald, le quattro forme in discorso non vengono ad essere distinte in generi, nonostante che i generi nuovi da lui ammessi siano otto invece di quattro. Vero è che Theobald stacca l'*A. superpictus* Gr. dal gen. *Anopheles* (che per lui comprende il *claviger* e il *bifurcatus*) perchè crede che abbia le squamme alari diverse, ma questa differenza in realtà non esiste.

Nel gen. *Laverania* l'A. comprende forme che dovrebbero ripartirsi nel genere a cui apparterrebbe il *superpictus* e in quello a cui apparterrebbe lo *pseudopictus*.

L'*A. maculatus* Th., secondo la nuova classificazione di Theobald, va a trovarsi sotto il genere nuovo *Laverania* (già menzionato), che è caratterizzato specialmente dall'avere l'addome con squamme sul ventre e sul dorso e con ciuffi laterali di squamme, mentre sappiamo dalla monografia dello stesso autore (I, pag. 121), che l'*A. maculatus* Th. ha l'addome senza squamme. Non so se si tratti di una svista o di un mutamento dovuto ad ulteriori osservazioni.

Dopo Theobald, Dönitz (quando già il mio lavoro era compiuto), ha proposto un nuovo raggruppamento delle *Anophelinae* (op. cit.). Egli divide tutti gli *Anopheles* da lui studiati, in due gruppi fondamentali servendosi dei caratteri offerti dalle macchie della costa alare. Il primo gruppo ha per specie tipica l'*A. plumiger* Dö., il quale corrisponde perfettamente al nostro *A. pseudopictus* Gr. Il secondo gruppo ha per specie tipica l'*A. maculatus* Th., che in gran parte corrisponde all'*A. superpictus* Gr. Aggiunge che il *claviger* F. (o *maculipennis* Mei.), da lui non studiato, potrebbe formare un altro gruppo, ma non tiene conto del *bifurcatus* L., perchè non è del tutto persuaso trattarsi di una specie a sè.

Il raggruppamento di Dönitz è veramente esatto, ma va notato che non è nuovo. Il Grassi nel suo lavoro del 1901 (*Studi* ecc.) (citato dal Dönitz), dopo aver esaminato molto materiale speditogli da differenti parti del mondo, aveva espresso l'opinione che tutti gli *Anopheles* potevano raggrupparsi nelle quattro specie tipiche da lui trovate in Italia. Due di queste, cioè l'*A. pseudopictus* e l'*A. superpictus*, sono caratteristiche per le macchie della costa alare, sulle quali presentano rispettivamente gli stessi caratteri, di cui si è servito il Dönitz per la formazione dei suoi due gruppi fondamentali. Le altre due specie sono appunto l'*A. claviger* F. (o *maculipennis* Mei.) e l'*A. bifurcatus* L. di cui sopra ho fatto cenno. Fin qui dunque nulla di nuovo oltre ciò che è stato pensato dal Grassi (op. cit., pag. 114) e da me estesamente e minuziosamente dimostrato.

Quanto alla distinzione delle specie, Dönitz si serve del numero delle macchioline scure che si trovano sulla sesta venatura longitudinale delle ali; ma avendo io esaminato molti esemplari in proposito, posso assicurare che il carattere offerto dalle macchie scure della sesta venatura longitudinale è molto variabile, e quindi non può avere valore specifico. Per es. l'*A. superpictus* viene collocato tra le specie che hanno una sola macchia scura sulla sesta venatura longitudinale. Senonchè io stesso ne ho veduti con una, con due e anche con tre macchioline sulla venatura suddetta; alle volte queste differenze si riscontrano tra le due ali dello stesso individuo.

Nello stato attuale delle cose mi sembra dunque opportuno dividere tutte le *Anophelinae* nelle quattro specie proposte dal Grassi. Queste specie sarebbero quelle trovate in Italia dal Ficalbi e dal Grassi e cioè

A. pseudopictus Gr.	*A. claviger* F.
» *superpictus* Gr.	» *bifurcatus* L.

Questi nomi però sono provvisori e dovranno in parte essere cambiati, quando verrà stabilita bene la priorità nella denominazione delle specie suddette.

Le altre specie o almeno grandissima parte di esse, dovrebbero in parte diventar sinonimi, in parte venir abbassate al grado di sottospecie. Questa distinzione di sottospecie viene fino ad un certo punto giustificata anche dai dati corologici, così dal fatto che il *C. pipiens* è specie estesissima (Europa, America,

India ecc.), e l'*A. pseudopictus* oltrechè in Italia si trova anche nel Giappone, e secondo la descrizione di Dönitz, molto precisa, anche in Cina (op. cit. pag. 86; cfr. anche pag. 46 dove l'A. descrive come *A. plumiger* un *Anopheles* indistinguibile dall'*A. pseudopictus* Gr.). Le sottospecie in discorso verrebbero ad essere differenti l'una dall'altra in piccolissimo grado per colore, forma e proporzioni, ossia verrebbero a comprendere quelle forme che gli autori di solito descrivono come sottospecie in altri gruppi di animali.

La nomenclatura proposta dal Grassi e da me ha un grandissimo valore dal punto di vista pratico per i medici, permettendo loro facilmente di orientarsi nella determinazione delle specie.

Essendo in Italia rappresentate tutte e quattro le specie di *Anopheles* ed essendo dimostrato che ciascuna di esse propaga le tre forme di malaria, diventa oltremodo verosimile che tutti gli *Anopheles* di tutto il mondo propaghino anch'essi la malaria (Grassi, giugno 1899. Cfr. op. cit., pag. 28). Le osservazioni fatte finora in tutti i paesi tendono a dimostrare con sicurezza questa induzione del Grassi. A questo riguardo non dobbiamo dar troppa importanza ad esperimenti negativi, come tende a far Dönitz. È noto che Koch stesso sperimentò a lungo e sempre invano coll'*A. claviger* F., come è noto che Ross e Daniels sperimentarono in India con un *Anopheles superpictus* (secondo la nostra nomenclatura) ugualmente con risultati negativi. Gli stessi Koch e Ross hanno poi dovuto ammettere che questi esperimenti non erano concludenti (Grassi) [1].

[1] Del resto sembra che Dönitz non abbia letto i lavori del Grassi, poichè parlando della propagazione della malaria, asserisce che le ricerche fatte contemporaneamente a Koch dagli Italiani, avevano condotto alla conclusione erronea che certe specie di *Culex propagassero la malaria*. Da prima, egli scrive, sembrò sospetta una zanzara a cui il Grassi affrettatamente diede il nome di *C. malariae* e che adesso si ritiene identica al *C. vexans* Mei; poi si accusò il *C. penicillaris* R. e l'*A. claviger* F.; più tardi il *C. Richiardii* Fic. e il *C. hortensis*, il quale non appare nelle nostre case e punge di giorno (cfr. Dönitz, op. cit., pag. 15).

Il Grassi invece, partendo dall'osservazione che vi sono luoghi non malarici con molte zanzare, dopo confronti fatti nelle più svariate parti d'Italia, fin dalla sua prima Nota, da lui pubblicata sull'argomento (alla fine di settembre 1898), conchiuse che dovevano ritenersi sospetti l'*A. claviger* F. e due *Culex*, cioè il *C. penicillaris* e il *C. malariae*, senza escludere del tutto il *C. Richiardii* e l'*hortensis*. Fin d'allora però ritenne del tutto innocente il *C. pipiens* e riguardo all'*A. claviger* dichiarò che questo « può definirsi vero indice, vera spia della malaria e che questa e quello sono intimamente connessi ». Quanto al *C. malariae* aggiunge (sempre nella Nota in discorso) che così lo denomina non perchè propaghi l'infezione, ma per le condizioni del luogo in cui vive. Siccome poi dal 20 al 30 ottobre nei dintorni di Roma i *C. penicillaris* e *malariae* andarono diradandosi e dal 10 novembre in poi quasi non punsero più; non potendosi ammettere che *tutti* i moltissimi casi di malaria sviluppatisi dopo il 10 novembre, fossero già in incubazione, il Grassi fu inclinato a concedere grande importanza all'*A. claviger*. Questi sospetti crebbero per il fatto che a Lentini (Sicilia) nell'ottobre e nel novembre dello stesso anno, pur infierendo la malaria, non si trovarono nè *C. penicillaris*, nè *C. malariae*; gli *A. claviger* invece erano straordinariamente ab-

Dopo quanto è stato detto e confermato dai fatti (tenuto anche conto degli studi del Theobald, Giles, Tsuzuk, Dönitz ed altri), resta assodato che la malaria è propagata nella maggior parte d' Europa dall'*A. claviger* F. (o *maculipennis* Mei.) e poco dall'*A. bifurcatus* L., perchè vive all' aperto. Nell' Europa meridionale entrano in scena, sebbene per poco l'*A. pseudopictus* Gr., e l'*A. superpictus* Gr. Nei paesi tropicali delle più differenti regioni, la malaria viene propagata essenzialmente dall'*A. pseudopictus* Gr., e dall' *A. superpictus* Gr.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Colombo, relatore, a nome anche dei Soci Cerruti e Favero, legge una relazione sulla Memoria dell' ing. R. Menochio, intitolata: *Rientramento dei panni (Décatissage)*, concludendo per l' inserzione del lavoro nei volumi delle Memorie.

Le proposte della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Pio Foà legge la seguente Commemorazione del Socio straniero Rodolfo Virchow:

Rodolfo Lodovico Carlo Virchow nacque il 13 ottobre 1821 nella piccola città di Pomerania, Schivelbein, da Carlo, mercante e da Johanna Hesse. La storia della famiglia è sconosciuta: Rodolfo fu il primo ad esserne segnalato. Fino a 13 anni rimase al luogo natìo percorrendo gli studî primarî; fu poscia preparato al ginnasio, e frequentò appunto quello di Coslin ove entrò a 14 anni. Il prof. Müller vi era latinista distinto che aveva scritto su Cicerone e su Sallustio, e prese subito una grande simpatia per Virchow per la sua singolare coltura della lingua latina, in rapporto alla sua giovine età. Invece Virchow non potè mai godere la simpatia del suo professore di greco, il teologo Grieben a cagione della sua poca perizia grammaticale.

---

bondanti (op. cit., pag. 46). Questi fatti guidarono gli esperimenti e condussero ad escludere la possibilità che la malaria potesse essere propagata dai *Culex* e ad accertare che essa viene propagata dagli *Anopheles*. Anche l' asserzione che gli Italiani dimostrarono che l'*A. claviger* F. era colpevole, soltanto dopochè Ross aveva mostrato che entrava in questione anche il gen. *Anopheles*, è inesatta.

Il greco, Virchow lo aveva imparato dal predicatore del suo paese, con metodo diretto della lettura e della traduzione, e con pochissimo studio di grammatica. Il giovine allievo sapeva scrivere il greco sotto dettatura, anche senza errori, e lo traduceva, ma non ripeteva a memoria le regole grammaticali.

Quando Virchow nel marzo 1839 ebbe a sostenere l'esame di maturità, il suo teologo professore di greco lo sottopose alla traduzione di un passo difficile del Nuovo Testamento in lingua greca, e sebbene il giovine allievo si traesse egregiamente d'impaccio, non potè avere il voto favorevole dal suo professore, il quale sostenne che il giovine Virchow non aveva la maturità morale necessaria per essere ammesso all'università. Ma non furono dello stesso parere gli altri professori, i quali posero il nome di Virchow primo in lista degli otto allievi che hanno lasciato il ginnasio di Coslin nella primavera del 1839. In questa lista è scritto: Rodolfo Virchow figlio di un mercante in Schivelbein dell'età di anni 17 e mezzo. Già da tempo Virchow aveva stabilito di studiare la medicina, e fu accolto nell'autunno 1839 come allievo all'istituto militare Federico Guglielmo. Frattanto passò a casa sua il semestre d'estate e lo impiegò a studiare da solo l'italiano. Era così vivo l'interesse che Virchow annetteva alla conoscenza delle lingue, che volle anche studiare in seminario l'ebraico, e sostenerne l'esame, il che per solito era fatto solo da coloro che s'avviavano alla Facoltà teologica.

Sull'istituto Federico Guglielmo detto « la Pepinière » e destinato sopratutto a fare dei medici militari, fu detto molto pro e contro, ma nessuno poteva negare che per esso, i poco abbienti potevano compire integralmente i loro studî. Ricche collezioni, e una delle più ricche biblioteche di medicina soccorrevano gli studiosi; i quali ricevevano da medici militari la ripetizione delle materie d'insegnamento. Non può essere senza significato il fatto che da quell'istituto sono usciti Helmholtz, Virchow, Leyden, Fischer, Nothnagel, Fraentzel, Schmidt, Loeffler, Gaffky, Gaertner, Hueppe. Uno dei medici militari che insegnavano nell'istituto era Gustavo Adolfo Lauer che fu poscia medico della persona dell'imperatore Guglielmo I, e che era in particolar modo apprezzato dagli allievi per le sue ottime cognizioni dei classici greci e romani. Fra i compagni di scuola di Virchow era Helmholtz venuto all'istituto un anno prima di lui dal ginnasio di Potsdam. L'istruzione nell'istituto seguiva con metodo particolare; così si seppe da Helmholtz che vi era coltivata moltissimo la lettura dei classici della medicina; e alcune ore dell'insegnamento erano destinate alla traduzione di Celso e d'Ippocrate. Virchow rimase all'istituto quattro anni, e il suo libretto d'iscrizione ai corsi ne contiene due degni di rilievo; cioè uno di storia e un altro sui poeti arabi. Il docente che faceva quest'ultimo corso era Rückert, il poeta della sapienza di Brahma, il quale fra i suoi pochissimi uditori ebbe solo Virchow fra i medici.

Al corso di storia erano obbligati tutti gli allievi dell'istituto, i quali non erano tanto liberi di scegliere le iscrizioni; onde si comprende che malgrado Virchow avesse già da tempo appreso ad amare l'uso del microscopio, pure non lo vediamo iscritto ai corsi di Istologia di Henle, e di Reichert.

Nell'autunno del 1843 Virchow ebbe il titolo di dottore; e la solennità di laurea fu tenuta il 21 ottobre sotto la presidenza di Giovanni Müller.

La dissertazione di laurea ebbe per titolo: *De rheumate praesertim corneae*. Fra le tesi di dottorato trovansi le seguenti:

1.° Nisi qui liberalibus rebus favent, veram medicinae indolem non cognoscunt.

2.° Animus non aegrotat.

3.° Inflammatio, febris localis.

4.° Morbo endemio, endemium medicamen.

5.° Morbus cardiacus neuroplogosis cordis.

Se questi temi possono contribuire a darci un'idea dello stato della coltura medica di quei tempi, non è però senza un grande significato personale il primo che ho accennato, come quello in cui si presentano le tendenze del grande uomo futuro.

Fra i maestri di Virchow è da ricordare in primo luogo Giovanni Müller, senza del quale non si può esattamente apprezzare la educazione scientifica di Virchow. Egli fu accanto a Schönlein e a Romberg colui che emerse di più nella Facoltà medica di Berlino intorno al 1830. Figlio di un calzolaio di Coblenza e di fede cattolica, egli voleva divenir prete; e solo pochi giorni prima dell'immatricolazione si decise per la Medicina. Studente del quarto semestre, vinse il premio dell'Università di Bonn nel 1821 col lavoro sperimentale: *De respiratione foetus*. Divenne presto naturalista, anatomico e fisiologo e da Waldeyer fu detto uno dei più grandi biologi di ogni tempo, ma se la sua scienza lo rese grandissimo, non minore importanza ebbe la sua qualità di maestro. Egli tenne lontano da sè la folla degli studenti comuni; attrasse a sè invece coloro che erano animati da un vivo desiderio di apprendere e che offrivano attitudine alla ricerca scientifica. Ebbe a scolari: Schwann, Henle, Remak, Reichert, Helmholtz, Du Bois Reymond, Briche, Virchow, von Graefe, Claparède, Haeckel, Lieberhun, Max Schultze ecc. dedicati alle più disparate branche della Medicina, tutti eminenti, e taluno divenuto capo scuola. Questa illustre congrega di sapienti creatori della medicina contemporanea, e la cui opera estende il suo significato in ogni branca dello scibile, non era una scuola nel senso stretto della parola; essa non ripeteva una dottrina unica ricevuta dal maestro. Virchow disse che non vi fu nessuna scuola di Müller nel senso dogmatico della parola, ma solo nel senso del « metodo della ricerca »; metodo esatto, sperimentale che respinge la credenza e la supposizione, e solo ammette una ricerca e un'osservazione precisa, e ha per fine la conoscenza dei fatti.

Virchow ci dà questo saggio del suo maestro:

Nel 1846 egli aveva veduto per la prima volta quell'alterazione della milza che più tardi definì come degenerazione amiloide. Invano egli aveva fino allora fatto ricerche per comprendere la natura di quel processo morboso: alla fine si recò da Müller che aveva studiato molto l'istologia della milza, e questi gli disse: Ciò è molto singolare, voi dovete farvi sopra delle ricerche. Al che Virchow rispose che già da tempo le aveva fatte senza concludere, e Müller gli rispose: Voi dovete proseguire la ricerca, ciò sarà certo molto interessante. Virchow scoperse solo sette anni dopo la natura di quella malattia.

Du Bois Reymond dice di J. Müller che egli come aveva fatto per sè stesso, così s'attendeva che anche i suoi allievi si aiutassero da sè, egli assegnava il còmpito e stimolava; nel resto si accontentava per usare un paragone tratto dalla chimica, di esercitare un'azione catalitica.

« Agiva, come Goethe dice della bellezza, colla sua sola presenza; dai suoi occhi emanava un fascino sui suoi allievi, come da quelli di Napoleone sui suoi soldati, e il detto: « Soldati, l'imperatore ha l'occhio sopra di voi », bastava anche a noi, per eccitarci al più strenuo lavoro. La ragione del fascino era nell'instancabile attività del maestro, il quale senza alcun sottinteso, senza fine utilitario qualsiasi, senza agiatezza, proseguiva con grande fervore un fine ideale ».

Virchow ebbe anche Schönlein a maestro efficace, benchè non fosse la di lui azione paragonabile a quella di Müller, col quale era in continui rapporti personali. Schönlein, lo scopritore del fungo che produce la tigna, era maestro nel vero senso della parola, e Virchow ancora in questi ultimi anni conservava il suo libretto di iscrizione in cui accanto alla materia insegnata da Schönlein che era la Medicina interna, aveva scritto: « Riconosco con animo grato che io ebbi da lui uno stimolo efficace ». Virchow aveva terminato il corso di J. Müller ed era entrato nella Clinica di un uomo che aveva per programma: pochi sistemi e molti fatti. Quivi si faceva uso di microscopio e di reagenti in casi in cui la grande folla dei medici, si accontentava di ragionamenti e di osservazioni superficiali.

Forse il principale fattore di tutti quelli che hanno agito sulla educazione scientifica di Virchow, è stata la pubblicazione avvenuta all'incirca negli anni in cui egli lasciava il ginnasio, dell'opera di Schleiden: *Beiträge zur Phytogenese*, in cui era fondata la dottrina della struttura cellulare delle piante; e nel 1839 proprio quando egli entrava nell'Università comparve l'opera di Schwann: *Mikroscopische Untersuchungen über die Uebereinstimmung in der Structur und dem Wachstum der Thiere und Pflanzen.* Schleiden nativo di Hamburg si era fatto dottore in Giurisprudenza e avvocato, Ma si disgustò dell'esercizio della professione, e in uno stato d'animo penosissimo attentò alla propria esistenza con un colpo di pistola alla testa.

Guarito, lasciò l'avvocatura e divenne naturalista. Trovò a Berlino in suo zio Horkel un eccellente maestro e consigliere negli studî botanici, e molti fatti citati da Schleiden nella sua opera, erano stati raccolti da Horkel. Schleiden contrasse amicizia coi giovani anatomici e in particolar modo con Teodoro Schwann, preparatore del Museo anatomico diretto da J. Müller. Schwann era uno dei più esercitati microscopisti del suo tempo e poteva fare dei confronti fra ciò che egli aveva osservato nel mondo animale, e quello che gli veniva narrato del mondo vegetale dal suo amico Schleiden.

J. Müller aveva veduto che la corda dorsale dei pesci cartilaginei era costituita di cellule contigue le une alle altre, e Schwann vi aveva trovato il nucleo. Giusto allora Purkinje aveva dimostrato che gli strati superficiali dell'epidermide ritenuti come costituiti da un intonaco indurito, erano invece fatti di cellule. Egli ed Henle avevano già studiato la struttura delle ghiandole e del fegato, ed Henle aveva ricercato gli epitelî cilindrici e pavimentosi. In possesso di tali fatti, Schwann sotto lo stimolo di Schleiden venne alla conclusione che il regno animale, nella sua costituzione organica, si diportava come il regno vegetale, cioè che le cellule erano il fondamento di ogni essere vivente. A confortare la sua ipotesi rilevò la struttura cellulare dei foglietti primitivi di cui consta l'embrione di pollo, e più tardi la confermò per l'embrione degli animali superiori; trovò che i tessuti cornei, i peli e le penne sono costituiti da cellule addensate insieme; nella lente dell'embrione trovò l'allungamento delle cellule in fibre. L'opera di Schwann oggidì antiquata pel suo contenuto tecnico, rimane tuttavia a titolo d'onore il codice della dottrina da cui ebbe origine la biologia moderna. L'influenza esercitata da Schleiden e da Schwann sullo spirito dei giovani studiosi del loro tempo fu straordinaria, e Virchow lo ricordava nel 1882, in un discorso su quei due fondatori della biologia contemporanea. Egli scrive: « A quel tempo in cui io ed i miei compagni cominciammo le nostre ricerche, consultavamo ugualmente il libro di Schleiden e quello di Schwann, e il pensiero dell'unità della natura organica agì sopra di noi potentemente ». Il mondo medico berlinese tra il terzo e il quarto decennio del secolo XIX, era interamente penetrato dalle nuove idee desunte dalla dottrina cellulare. Uno dei primi a fare uso larghissimo della nuova dottrina fu J. Müller; nè meno efficace fu Henle colla sua Anatomia generale. Qual meraviglia, esclama Virchow in un suo ricordo di quei tempi, se noi giovani abbiamo fin da principio imparato a pensare istologicamente?

Su proposta del Generale medico Grimm, vice direttore dell'Istituto Federico Guglielmo, dove Virchow era stato allevato durante i suoi studî universitarî, questi fu nominato assistente alla prosettura del « Charité » e in pari tempo venne incaricato delle ricerche microscopiche e chimiche nella Clinica di Schönlein. Era allora Settore dell'Ospitale Charité il Froriep,

il quale era tanto poco produttore per conto proprio, quanto era, invece, diligente raccoglitore e divulgatore della scienza altrui.

Egli ebbe il merito di essere stato il primo ad avviare alla carriera pratica Virchow e siccome egli aveva fatto delle ricerche sul tema allora di moda della *Flebite* senza venire ad alcun risultato originale, così offerse a Virchow di studiare egli l'argomento. Le due scuole di Anatomia patologica, che dominavano a quel tempo erano, la scuola Francese rappresentata da Crouveilhier e la scuola di Vienna rappresentata da Rokitanski. Era opinione del primo che la *Flebite* fosse a base di qualunque processo morboso, e tale dottrina aveva trovato molti seguaci. Virchow riconobbe che a risolvere il problema fossero necessarie molte ricerche preliminari. Fin allora si era considerato solo lo stato della parete vascolare; invece si doveva ricercare l'origine delle sostanze che si trovavano nel lume del vaso, cioè il coagulo sanguigno, o la massa purolenta. Virchow negò la preesistenza della fibrina come tale allo stato disciolto nel sangue; ammise invece l'esistenza della fibrina solo in forma di coagulo. Non ad essa è dovuta la nutrizione degli elementi e la produzione dei tessuti; sibbene essa è il prodotto della distruzione degli elementi stessi. Lo studio del cadavere diede a Virchow occasione di fermare la sua attenzione sopra i coaguli che chiudono l'arteria polmonare, e che egli allora chiamava, « calcoli patologici », e fece la scoperta che essi non derivano dal luogo ove si trovano, ma sibbene che vi erano trasportati da un punto periferico qualunque ove erasi formato un coagulo primitivo nelle vene, oppure dal cuor destro. A tale conclusione Virchow era venuto dalla considerazione dei fatti anatomici da cui ricostruì logicamente tutto il processo. Nè si fermò al reperto cadaverico, ma bensì volle confortare le sue conclusioni con la riprova sperimentale, e da questa trasse non solo la conferma delle sue vedute, ma anche la importante conclusione che gli effetti derivanti dall'occlusione dei vasi erano assai meno dipendenti dall'occlusione stessa, che non dalla qualità della sostanza che aveva cagionato l'occlusione. Con questi lavori Virchow fondò la dottrina della trombosi e dell'embolia, nomi e fatti da lui stesso introdotti nella medicina scientifica. Un altro frutto dei suoi studî sul sangue e sui vasi, fu la conoscenza della *Leucemia* come affezione indipendente. Al suo esatto spirito d'osservazione, alla sua cultura preliminare, alla logica consuetudine della sua mente fu dovuta la prevalenza del giusto concetto di quella malattia del sangue, come effetto di alterata produzione sanguigna da parte degli organi ematopoetici, e non come risultato di una supposta penetrazione nel sangue di elementi eterogenei. Un'esagerata produzione di globuli bianchi, un difetto di produzione di globuli rossi, per alterazione primitiva degli organi sanguigni: tale era la natura del morbo, e non la supposta penetrazione di pus nel sangue, o la suppurazione del sangue stesso. Il concetto Virchowiano ha

trionfato definitivamente nella Medicina scientifica, e oggi nuovi fatti hanno certamente esteso il concetto della *Leucemia*, ma non l'hanno mutato sostanzialmente nella sua base dottrinale. Questi classici lavori che noi tutti ripetiamo o riassumiamo nelle nostre scuole, sono la principale parte positiva dell'opera del giovine Settore del « Charité », ma di questa epoca è pure un'opera critica che forse ha valso più ancora delle due prime a richiamare l'attenzione del mondo scientifico sul patologo di Berlino. Alludo alla storica e classica discussione di Virchow sulla teoria della « Crasi sanguigna » e in genere sul Manuale di Anatomia patologica di Rokitanski. Era questi in allora l'anatomo-patologo più grande del secolo, e godeva una grandissima autorità in tutto il mondo, superiore a quella stessa di Crouveilhier, capo della Scuola francese.

Un giovine Patologo non ancora molto conosciuto spingendosi all'attacco della teoria fondamentale del colosso di Vienna, sembrò peccare d'audacia e destò la meraviglia dei sapienti del suo tempo. Virchow premise la dichiarazione che egli non criticava il Rokitanski come anatomo-patologo, ma solo nella parte sua dottrinale sulla Patologia; cioè in quella parte che oltrepassava le semplice raccolta dei fatti anatomici, e che alla base solida dei fatti sostituiva l'ipotesi mal sicura. Rokitanski aveva tentato di rimettere in vigore la patologia umorale, sostenendo l'esistenza di una fibrina e di un'albumina nel plasma del sangue, alla cui alterazione primitiva (discrasia) erano dovuti tutti o quasi i mali del corpo umano. Virchow gli oppose che ogni variazione del sangue era un effetto secondario delle alterazioni locali degli organi. Rokitanski aveva introdotto nella parte generale del suo celebre trattato una quantità di asserzioni fantastiche, senza alcuna prova di fatti, e vi aveva fatto la esposizione di una istologia imperfettissima e tutta sciupata da ipotesi illogiche. Virchow reclamò l'applicazione del metodo naturalistico esatto, e respinse la falsa filosofia che esce dalla testa dell'autore, senza la prova necessaria dei fatti. La critica di Virchow ebbe un trionfo; la dottrina della « crasi » fu abbandonata in seguito dallo stesso Rokitanski, che riconobbe l'importanza della Patologia cellulare. Questa vittoria scientifica universalmente riconosciuta della scuola di Berlino sulle Scuole di Vienna e di Parigi, parla ora alla nostra fantasia come fosse premonitrice di vittorie future su altri campi.

Virchow quale Settore al « Charité » ebbe una quantità notevole di materiale a sua disposizione e fece del suo laboratorio un centro di studî per molti volenterosi. Nell'estate del 1847, Virchow sostenne le prove per l'abilitazione ad insegnare, ed il tema della sua prima lezione fu quello della infiammazione dei muscoli. Alle prove presiedeva J. Müller che nel 1843 aveva anche presieduto ai suoi esami di dottorato; così per la seconda volta era dato all'allievo prediletto di congiungere la memoria dei fatti principali della sua carriera al nome amato del suo grande maestro. Virchow appar-

tenne alla schiera di giovani valorosi che si erano prefissi il rinnovamento degli studî di medicina, e formavano la così detta Scuola di Berlino. Di questa fu prima a capo Ludwig Traube; più tardi lo divenne Rodolfo Virchow, e in prima linea erano Arturo Mendelsohn, e Benno Reinhardt. Il primo partecipò col Traube a quegli studî di Patologia sperimentale che resero tanto celebre il nome di quest'ultimo, e che erano un'assoluta novità per la Germania, e scrisse sulla meccanica dei movimenti respiratori; indi si divise da Traube e finì ignorato a Parigi dopo essere stato implicato in affari politici. Reinhardt fu presto intimo amico di Virchow col quale ebbe comuni gli intenti ed il metodo; egli era già provetto nell'istologia, e lottava forte contro le tendenze dominanti delle scuole mediche del suo tempo. Altro compagno fu Rodolfo Leubuscher che si era occupato di Psichiatria e volle fare studî di Anatomia patologica. A lui è dovuta la riforma del trattamento degli alienati in Prussia, i quali erano a quei tempi tenuti in così barbaro modo, da ricordare le descrizioni di ciò che avveniva nel Medio Evo. La casa di lavoro di Berlino raccoglieva i delinquenti e i miserabili, i ragazzi abbandonati da genitori delinquenti, i ladri e gli omicidi tutti insieme, e fra essi nello stesso fabbricato, in un altro piano, ma non senza rapporto col resto dell'edificio, erano i pazzi dementi, senza separazione di sesso, raccolti in sale ove erano persino 90 letti. Così erano le cose in Berlino nel 1847.

Traube era il più anziano della nuova Società; egli aveva già un nome nella scienza, s'accontentava del lavoro scientifico, e non affrontava le quistioni di interesse pubblico; aveva per il primo introdotto il metodo dell'ascoltazione e della percussione, che aveva appreso nelle sue frequenti escursioni a Vienna, ed aveva introdotto il metodo degli esperimenti di patologia sugli animali. I giovani patologi berlinesi sentirono il bisogno di un proprio giornale per pubblicare i proprî lavori e per combattere in favore delle loro idee.

Virchow racconta che un Giornale di medicina di quei tempi respinse il suo classico lavoro sulla « Trombosi » affermando che vi era dentro troppa chimica; un altro giornale lo voleva raccorciato notevolmente, ed un terzo glielo rinviò coll'aggiunta di amichevoli osservazioni e di consigli. Traube fondò i suoi « Beiträge zur experimentelle Pathologie und Physiologie », e sul primo numero si trovava fra gli altri il celebre lavoro sugli effetti del taglio dei vaghi, di Traube stesso. Nel secondo fascicolo era pubblicato il lavoro del Virchow sull'occlusione dell'arteria polmonare, e uno di Reinhardt della genesi degli elementi microscopici nell'infiammazione. Sfortunatamente a questo punto il periodico dovette cessare le sue pubblicazioni per difficoltà insorte coll'editore, e per un anno la giovine Scuola di Berlino rimase senza il proprio organo di pubblicazione; poscia Virchow e Reinhardt trovarono in Reimer l'editore di un nuovo giornale che fu il famoso « Archivio » inin-

terrottamente pubblicato sino ai nostri giorni, e arrivato oramai al 170° volume. I patologi di Berlino fondarono pure a quei tempi la « Gesellschaft für wissenschaftliche Medizin », dove sorsero discussioni celebri, e d'onde uscirono lavori e concetti che trionfarono in tutte il mondo scientifico. Di quella Società fu benemerito il professore di Zooiatria Federico Gurlt, il quale fornì il locale e gli animali da esperimento ai giovani Patologi. A quei tempi, gl'Istituti di Fisiologia e di Patologia quali oggi si trovano anche nelle più piccole Università, erano dichiarati un lusso, e quando Purkinje chiese a Breslavia che gli venisse concesso un laboratorio, il Curatore di quella Università gli chiese spaventato, dove si sarebbe andati a finire, se ogni professore avesse preteso un proprio laboratorio.

Ed eccoci all'anno critico 1848. Fino a questo anno Virchow si occupò solo di lavoro scientifico, e il suo nome era conosciuto appena nel circolo ristretto dei suoi colleghi. Gli avvenimenti del '48 lo portarono sull'arena politica. Nella Slesia superiore inferiva sino dall'estate del '47 il tifo esantematico. Il Governo prussiano scosso dai clamori della stampa, designò il medico capo Barez con a fianco, quale aiuto per la parte scientifica il Virchow, affinchè riferissero sullo stato delle cose e indicassero i provvedimenti necessarî. I due delegati partirono il 20 febbraio e Virchow ritornò dal suo viaggio il 10 marzo, e comunicò alla Società per la Medicina scientifica i risultati delle sue indagini. Egli vide ammalati, egli fece autopsie, egli diede consigli terapeutici, egli svolse insomma la questione dal lato medico. ma egli non si arrestò qui; egli volle fare il processo al sistema dominante in Prussia.

Egli trattò dei fatti storici, economico-sociali, e dei rapporti igienici della Slesia, e spiegò perchè una volta scoppiato il tifo in quel paese, dovesse estendervisi rapidamente e mantenervisi a lungo coi caratteri di una grave epidemia.

L'abitante della Slesia, narrava Virchow, non si lavava affatto e lasciava il suo corpo alla cura del cielo. In generale lo Slesiano era ignorante, ma non incapace di coltura. Solo è che si inviavano colà dei maestri tedeschi con iscarsa sapienza, in paese polacco, e si concedeva al maestro e agli scolari di parlare ciascuno la propria lingua, col risultato che il maestro imparava il polacco, e gli scolari non imparavano il tedesco. Gli Slesiani erano staccati dalla loro terra originaria, la Polonia, già da 700 anni, e coi Polacchi propriamente detti non avevano nulla in comune; essi erano fuori di qualunque circolo di coltura. Solo il libro delle preghiere arrivava nelle mani del popolo, onde Virchow accusava apertamente la gerarchia cattolica che lo teneva ignorante, la burocrazia indolente che fingeva di ignorare i bisogni della popolazione, e i grossi possidenti del luogo che di solito vivevano nelle grandi città tedesche, e in paese straniero spendendovi il loro denaro. Pare di leggere una pagina di Taine sui tempi che precedettero la rivoluzione

francese. Virchow giudicò l'epidemia di carattere endemico e ne dà un'esatta descrizione, attribuendola all'azione di miasmi che si svolgevano sotto l'azione di vicende atmosferiche, e aggravavano lo stato miserando che i cittadini presentavano nelle loro pessime abitazioni; perciò quando il freddo li costringeva a rimanervi rinchiusi, l'epidemia acquistava il suo carattere più grave. Dalla misera gente l'epidemia si andava propagando per contagio anche alle classi agiate. La carestia dominante e il tifo erano coeffetti di una stessa causa; cioè le gravi vicende meteoriche di quell'anno. Dai medicamenti, il Virchow si attendeva poco o nulla; invece invocava una riforma sociale da cui solo poteva la Slesia liberarsi dalle sue miserie. Virchow scrisse allora questa ricetta: *Piena e illimitata democrazia — Coltura colle sue due figlie: la libertà e il benessere.* Si trattava di elevare mezzo milione di abitanti che erano agli infimi gradi della salute fisica e morale. Quella era la parola di combattimento: nel resto, riconobbe Virchow che gli abitanti della Slesia erano dei Polacchi per l'origine, per la lingua e per le abitudini, e questa cognizione doveva guidare nelle riforme da introdursi in quel paese. Si erigano scuole polacche che non sieno asservite alla gerarchia ecclesiastica, e si lasci l'uso della lingua materna che meglio si adatta al modo di pensare degli abitanti. Apransi scuole agrarie e professionali, l'indirizzo della educazione sia liberale e abbia per fondamento il naturalismo scientifico. Il momento era opportuno per allevare dei giovani che l'epidemia aveva staccato dagli oppressori antichi capi spirituali. Nei giovani, che sono capaci di coltura, si depongano i germi di un nuovo indirizzo che muti lo spirito e la morale degli abitanti.

Inoltre, reclamava Virchow l'abolizione dei diritti feudali, il progresso dell'agricoltura, l'apertura delle vie di comunicazione, la organizzazione del lavoro nelle mani dello Stato, coll'obbligo allo stesso di assicurare a ciascun operaio il minimo necessario per l'esistenza. Proseguiva Virchow in altre anche più esplicite dichiarazioni di carattere democratico-sociale, secondo lo spirito dominante della rivoluzione di quel celebre anno nella storia d'Europa. Già Virchow in Berlino si era aggregato al partito democratico, e dell'amico suo Franzius riferiva essere cosa che si comprendeva benissimo che egli avesse aiutato a fare le barricate. Egli scrisse: « Io ero preparato dopo il mio ritorno dalla Slesia ad aiutare una scossa contro il nostro antico regime, ed esposi pubblicamente il mio sentimento in tre parole: Piena, illimitata democrazia ». Attese allora allo studio d'una riforma del corpo sanitario, dell'istruzione superiore, del servizio d'assistenza, delle questioni ospitaliere. Fondò nel 1848 col suo amico Leubuscher, « La Riforma medica », e in un primo articolo scrisse: « I medici sono i naturali avvocati dei poveri, e la questione sociale entra per una parte considerevole nella loro giurisdizione ». Tracciò i doveri dello Stato nel provvedere alla salute dei cittadini; combattè il principio esclusivo della carità privata, e affermò che

accanto al diritto di tutti per la garanzia della proprietà da parte dello Stato, doveva sorgere il diritto alla stessa garanzia per la salute del corpo, che è la prima e la più naturale delle proprietà. Propugnava pertanto la formazione di un ministero della sanità pubblica, e innanzi a tutto delle leggi sulla medicina, valevoli per tutta la Germania, e la costituzione di un consiglio sanitario per la direzione tecnica del governo. Propugnava l'assicurazione dell'operaio in caso di malattia e la limitazione delle ore di lavoro. Nell'insegnamento reclamava il pubblico concorso per la nomina degli insegnanti da affidarsi ad un giurì di professori; voleva abolito il « Collegien-Geld » levati i privilegi degli allievi al « Charité » e libera a tutti l'ammissione agli istituti militari. L'insieme dell'opera di Virchow come pubblicista e come cittadino lo avevano segnalato così al partito democratico, che un circolo elettorale lo avrebbe nominato deputato se egli avesse avuto l'età voluta dalla legge.

Nelle sfere superiori la sua attività politica era però severamente giudicata. Quanto più egli colpiva giusto e tanto più peggiorava la sua posizione. Già nel marzo 1848 quando ancora sanguinavano i feriti, era stato a torto accusato di aver fatto della politica nel recinto dell'ospedale « Charité », ma poi gli era stato perdonato.

Nel febbraio del 1849 si rinnovarono le elezioni e la bizzarra geometria elettorale, aveva proprio fatto un circolo elettorale dell'ospedale « Charité » e dintorni. Predominava in quel circolo il partito democratico, ma ciò non ha impedito a Virchow di pubblicare queste parole: « Noi non vogliamo che l'ospedale diventi un istituto politico, così come non ammettiamo che esso sia un focolaio per la progaganda religiosa ». Malgrado ciò, si è fatto un processo a Virchow, e si voleva togliergli il posto di Settore. Alcuni amici che egli si era acquistato col lavoro scientifico perorarono per la sua causa, e qualche concessione stentatamente fu fatta, ma Virchow rimase in circostanze difficili. Il posto gli era provvisoriamente serbato, ma gli fu tolto lo stipendio.

Per fortuna la cosa non è durata a lungo, chè al 1° di maggio Virchow abbandonò il « Charité » e alla fine dello stesso mese, fu chiamato professore ordinario all'Università di Würzburg. Le ostilità del Governo prussiano gli avevano favorito il collocamento in Baviera, e quando Virchow si presentò a prendere congedo dal Ministro dei Culti prussiano, questi gli fece un'allocuzione diplomatica in cui gli diceva: « Riconosco che l'invito che le fu fatto dimostra la stima che Ella si è meritata col suo lavoro scientifico; tanto più deploro che le circostanze non mi permettano di pregarla a voler declinare l'onorevole invito che le fu fatto ». Virchow si congedò dai lettori della « Riforma medica » in cui scrisse fra l'altro: « La riforma della medicina che noi abbiamo proposto era una riforma della scienza e della società. Ogni istante ci troverà pronti a lavorare e a combattere; noi non cambiamo

le cose, ma solo la località. Sarebbe da pazzi il voler penetrare nel terreno durante l'inverno; ogni cosa ha il suo tempo e ogni impresa sotto il cielo ha la sua ora ».

La Facoltà medica di Würzburg, era da tempo in istato di grande depressione. Cominciò a rialzarsi colla chiamata di Kiwisch, che insieme con Carlo Mayer istituì nel 1845 lo studio della Ginecologia. Ancora più ha guadagnato la Facoltà due anni dopo colla chiamata a professore di Anatomia e Fisiologia di Rodolfo Alberto Kölliker, già Settore presso Jacob Henle e allievo di J. Müller, e che tutt'ora offre il confortante spettacolo di una lucida e vigorosa senilità. Questi in poco tempo esercitò una grande influenza sulla giovane generazione degli studenti, avendo tra essi portato lo spirito nuovo. A completare la eletta compagnia degli uomini nuovi, giunse finalmente Rodolfo Virchow, invano combattuto ad oltranza dal partito ultramontano che gli rinfacciava la relazione sul tifo nella Slesia.

Bentosto fu creata la « Physicalische-medizinische Gesellschaft », di cui furono presidente il Kölliker, vice presidente Kiwisch e segretario Virchow, e questa ebbe il proprio organo ufficiale nei « Würzburger-Verhandlungen ». L'unione dei medici coi chimici e coi fisici ha portato i suoi buoni frutti, e basta ricordare a tale proposito il rapporto fra gli studî di Schenks, altro dei membri di quella società, sullo sviluppo dei granuli d'amido, e il lavoro di Virchow sulla degenerazione amiloide, fatto appunto a quel tempo. L'attività scientifica di Virchow era straordinaria; quasi ad ogni seduta portava qualche nota originale. Egli si occupava di lavori analitici di Anatomia patologica, quasi a raccogliere un'ingente copia di materiali per le future costruzioni sintetiche. Trattò della rigenerazione del mascellare inferiore dopo la carie da fosforo, dei rapporti fra tubercolosi e scrofola; trovò che il tubercolo proviene da metamorfosi di elementi organizzati e non da un'essudazione libera come pretendeva Rokitanski. Studiò l'ematoidina e la bilifulvina, il cancroide, l'echinococco, il lytopedion e la gravidanza tubaria. Nel 1851 pubblicò Virchow il suo fondamentale lavoro sull'identità fra le cellule cartilaginee, ossee e connettive e i *Beiträge zur Kenntniss der Gewebe der Bindsubstanz*, che furono uno dei fondamenti della sua grande opera futura. Molte altre contribuzioni furono pubblicate da Virchow a quel tempo, e fra le altre va segnalata per la grande maestria dimostrata dall'autore, e perchè segna la prima tendenza di Virchow a studî di Antropologia, il lavoro sul cretinismo nella Franconia inferiore. Egli ebbe di nuovo occasione di fare un altro studio epidemiologico sul tifo in un paese vicino, e trovò come in Slesia che l'infezione si stabiliva in una data abitazione dove nessuno era risparmiato, e non aveva tendenza a propagarsi al di fuori. Un'altra quantità straordinaria di lavori analitici di Anatomia patologica pubblicò Virchow nel 1852 e 53. A questi aggiungeva una folla di recensioni e di trattazione di problemi generali. Il suo nome era divenuto popolare, e dalla Germania

del nord venivano studenti a Würzburg per frequentare il suo corso. Molti suoi allievi di Würzburg toccarono un alto posto nella scienza; fra questi Friedreich che confessò anche negli anni più maturi la grande influenza esercitata sopra di lui dall'insegnamento di Virchow. Altri nomi come quello di Ernesto Heckel, Carlo Hoffmann, Rindfleisch, Grohe, Beckmann, Gegenbaur, Czermack, Kussmaul, furono legati alla scuola di Virchow. È di quegli anni l'entrata di Virchow nella redazione dei famosi « Iahresberichte ». fondati da Canstatt, e proseguiti da Eisenmann, da Virchow e da Hirsch, che tuttora si pubblicano, e hanno diffuso in tutto il mondo la moderna Medicina scientifica.

Virchow, inoltre, diresse a quel tempo la pubblicazione dell' « Handbuch der speziellen Pathologie » in cui scrisse tanti capitoli che costituiscono un breve trattato di Patologia generale, nel quale per la prima volta appaiono riunite e fuse tante osservazioni che fino allora erano state separatamente pubblicate. Il manuale predetto fu il primo del genere, in quanto constava di capitoli scritti da diversi autori secondo gli studî speciali che ciascuno di essi aveva prediletto; esso fu il modello di moltissimi altri che si pubblicarono negli anni successivi. Chi osserva l'attività di Virchow a Würzburg, scrive il Becher, e la paragona con quella esercitata a Berlino nei primi anni della sua carriera, scorge facilmente che la prima si distingue dalla seconda per un cambiamento di temperamento. In Berlino era l'uomo di combattimento, che affrontava con impeto e sincerità la lotta contro le idee dominanti e contro le autorità dogmaticamente imposte del suo tempo; a Würzburg stesso intento, cioè la riforma della Medicina è proseguito da Virchow con calma e tranquillità. Solo una volta riapparve l'antico fuoco negli scritti di Virchow, e fu in una polemica con Ringseis, un campione dell'ultramontanismo. Questi combatteva in Baviera per la gerarchia cattolica, quegli per la scienza libera indipendente. Virchow scriveva: Accanto allo Stato cattolico il Ringseis vuole anche la scienza e la Medicina cattolica, per creare alla fine una Teocrazia, di cui il sig. Ringseis sarebbe non solo il Prete, ma il Re. Noi pure cerchiamo la pubblicità e la diffusa conoscenza, non per la nostra persona, ma per le nostre dottrine. Sia la nostra casa aperta a tutti, siano le nostre massime chiaramente riconosciute; noi non temiamo la luce! Parole severe non meno che coraggiose a quei tempi, e in quello Stato: parole che ricordano certe osservazioni fatte già da Virchow sulla coltura nella Slesia l'anno 1847; parole che fanno presentire il creatore di un grido di guerra che suonerà alto in tutto il mondo in uno dei momenti psicologici più ardui della storia moderna, quello del « Culturkampf ».

L'anno 1856, J. Müller propose al Ministro la creazione di una cattedra di Anatomia patologica al posto del Settore del « Charité » H. Meckel, allora defunto. Fin'allora Müller insegnava ad un tempo l'Anatomia normale, la Fisiologia e l'Anatomia patologica: ma egli riconobbe che questa

era di tanto accresciuta che doveva essere insegnata separatamente, e propose a titolare R. Virchow.

La proposta fu accolta all' unanimità nella primavera del 1856, e così il destino ha voluto che il più grande maestro di Virchow legasse per la terza volta il suo nome alla carriera scientifica del suo allievo prediletto.

Virchow divenne professore ordinario in quello stesso posto ove era stato Settore, e strinse rapporti tali col « Charité » che l' Istituto divenne ad un tempo cosa dello Stato per l' insegnamento, e cosa dell' Ospedale per il materiale che questo inviava interamente all' Istituto, e che era utilizzato da Virchow come Settore dell' Ospedale stesso. Dopo la partenza di Virchow per Würzburg nel 1849, fu Settore il Reinardt che morì giovane di tubercolosi nel 1852, e il medesimo destino è toccato al di lui successore Enrico Meckel, di famiglia illustre nella scienza, ma in cui pure la disposizione alla tubercolosi era ereditaria. Virchow occupò quel posto e lo tenne per 46 anni, ma egli era tale anche fisicamente che all' epoca della sua accettazione come allievo nell' Istituto Federico Guglielmo, il Medico militare che lo ha visitato, ha scritto sul certificato di accettazione: Egli è dotato di tutte le disposizioni, eccetto quella di ammalare. L' Istituto patologico di Berlino fu il primo del genere e divenne il modello di tutti quelli che furono poscia istituiti per tutta la Germania. Lo studio dell'Anatomia patologica era ricercatissimo da tutti quelli che volevano darsi alle Cliniche, e a poco a poco anche dalla grande massa dei medici nostrali e forestieri. Furono suoi diretti allievi e assistenti, Grohe, v. Recklinghausen, Klebs, Hüeter, Cohnheim, Roth, Wegner, Ponfick, Orth, divenuto ora il suo successore, Jurgens, Grawitz, Jsrael: un' accolta di nomi, di cui parecchi divennero celebri in tutto il mondo scientifico, e lasciarono un' impronta incancellabile nella storia della Medicina. Quando si leggono insieme i nomi di coloro che hanno figurato in un dato tempo, come quelli di J. Müller, J. Henle, Schleiden e Schwann, Helmholtz, Virchow, Du Bois-Reymond, o come quelli che ho più sopra indicati, si è tentati di chiedere se essi appartengano tutti ad uno stesso periodo storico, e tutti ad un paese, o se non sieno avvicinati dalla fantasia dei tempi posteriori, come gli eroi delle leggende antiche. Virchow a Berlino attese all' incremento di quella collezione di Anatomia patologica che oggi comprende 23,000 preparati, e che per lungo tempo fu accatastata senza ordine apparente in tal guisa che solo il professore sapeva mettere la mano sopra i tesori che possedeva, e di cui si valeva con gelosissima cura nelle sue lezioni. Egli ebbe la felicità di vedere quella sua creazione prediletta raccolta nel nuovo Museo, e da lui con ogni diligenza ordinata, e con infaticabile pazienza dimostrata ai dotti che la visitavano per lunghe ore di seguito senza affaticarsi, anche quando stava per compiere l' 80° anno della sua vita.

Nel suo nuovo soggiorno a Berlino, Virchow ha pubblicato il suo ma-

nualetto di Tecnica delle autopsie, che insegnò il metodo seguito oramai da tutto il mondo.

Nel 1858 Virchow tenne per desiderio dei medici venti conferenze sui fatti e sulla dottrina che egli aveva raccolto e creata negli ultimi anni della sua straordinaria attività scientifica, a Würzburg, e che pubblicate in un volumetto col titolo di *Patologia cellulare*, si diffusero ben presto in tutto il mondo, divenendo il testo fondamentale della Medicina scientifica contemporanea. Durante i suoi anni di Würzburg, Virchow aveva maturato a poco a poco la convinzione dell'origine esclusiva delle cellule da cellule preesistenti. È nella natura delle cose che una conoscenza fondamentale la quale stia in contraddizione con tutto ciò che era nell'opinione scientifica accreditata da lungo tempo, non abbia a sorgere tutta all'' improvviso. Così è che nel 1847 Virchow ammetteva che ogni organizzazione derivasse da una blastema amorfo. La prima scossa alla teoria dominante fu data da Kölliker che ha dimostrato l'origine di tutte le cellule dell'organismo da un'unica cellula, l'uovo. Remack descrisse il processo di scissione del nucleo e del protoplasma cellulare, e pose in dubbio l'origine degli elementi da un blastema. Anche Virchow sopratutto dopo la scoperta delle cellule permanenti ad ogni età del tessuto connettivo non potè più riconoscere la formazione libera delle cellule, e nell'aprile del 1855, formulò il suo celebre aforisma: *Omnis cellula a cellula*. Con questo fu stabilito per sempre il principio della continuità della vita per legittima successione della produzione cellulare. La cellula fu riconosciuta l'elemento vitale la cui attività è dipendente dallo stato delle particelle che la compongono. Tutte le malattie si risolvono alla fine in alterazioni attive o passive di un gruppo più o meno grande di tali elementi. Il legame di tutte queste parti è rappresentato dai vasi, dai nervi, e dal contatto immediato; quella « irritabilità » che Haller attribuiva solo ai nervi e ai muscoli, e Glisson e Brown ritennero una proprietà generale di tutti i viventi, Virchow l'attribuì a tutte le cellule e ai loro derivati. Essa si definisce come la proprietà che gli elementi cellulari hanno di rispondere agli stimoli che vengono loro dal di fuori, o da altri elementi, o da altre parti dello stesso organismo, o da sostanze eterogenee, mediante azioni e reazioni particolari. L'attività può essere funzionale, nutritiva e formativa; un'azione più forte determinerebbe sull'elemento la perdita della sua vitalità.

Gli elementi vitali sono dotati di una certa autonomia e indipendenza, la quale, però, può essere tosto alterata dalle proprietà del materiale di nutrizione e dai rapporti cogli elementi vicini. La dipendenza tra elementi o gruppi di elementi, è quella che spiega l'unità della vita dei singoli individui. Senza di ciò, essi sarebbero, come le piante, dei semplici aggregati di cellule. Invece, dalle azioni che esercitano reciprocamente gli organismi elementari nella loro semi autonomia risulta l'insieme di quelle manifestazioni che noi indichiamo col nome generico di vita. La vecchia contesa tra le dottrine umo-

rali e solidistiche scompare, perchè i processi patologici non sono legati nè solo agli umori, nè solo alle parti solide del corpo. Ciò che rimane delle antiche teorie, è riunito nella Patologia cellulare. Un tempo la Patologia ricercava la sede dei morbi nelle singole regioni del corpo: era tutta una parte del corpo che si supponeva primitivamente ammalata; più tardi con Morgagni la sede fu localizzata a singoli organi; ancora più tardi con Bichat si ricercò la sede in alcuni tessuti; finalmente con Virchow si precisò la sede dei morbi negli elementi cellulari, quali unità elementari dell'organismo intiero.

Il grande edificio Virchowiano ha subìto col tempo alcune variazioni, ma non tali da distruggerne le linee principali; anzi queste si può dire abbiano resistito alle ingiurie del tempo. Certo, oggi più che una volta conosciamo gli stretti rapporti che esistono fra i processi della nutrizione e le influenze nervose, e sebbene noi non possediamo la conoscenza di un'unità centrale da cui emani la direzione dell'attività di tutto il corpo, pure possiamo affermare che dalla conoscenza dei suddetti rapporti, l'autonomia delle cellule e dei territorî cellulari ne esce alquanto diminuita.

La scoperta della migrazione dei globuli bianchi rimise in onore la dottrina vascolare della infiammazione colla formazione di un essudato; però gli studî successivi hanno riconosciute e confermate molte vedute di Virchow sull'importanza che hanno nel processo flogistico gli elementi dei tessuti. Anche le fantastiche supposizioni degli entusiasti, sulle cellule semoventi, alle quali venivano attribuite tutte le capacità possibili di fabbricazione dei tessuti, hanno ceduto il posto alla dottrina della continuità ininterrotta della vita degli elementi proprî di ciascun tessuto, dotati come essi sono di proprietà specifiche e costanti. Anzi, si pervenne a volere esagerare o completare il famoso principio Virchowiano, modificandolo così: « Omnis cellula a cellula ejusdem generis ». Col trionfo della batteriologia si è tentato da taluno di identificare le cause viventi delle malattie da infezione colla natura stessa della malattia, ma Virchow rivendicò con ragione alle cellule dell'organismo colpito la sede e la natura del morbo, il quale risulta da una reazione delle cellule stesse contro la causa operante. Del pari egli ha confutato efficacemente le asserzioni di chi ravvisava nei principî della sieroterapia un ritorno trionfale della patologia umorale, perchè tutte le proprietà acquisite dai sieri immunizzanti sono dovute alla fine, come oggi nessuno più nega, alla attività delle cellule stimolate delle tossine bacteriche. Virchow difese fino all'ultimo strenuamente tutto ciò che egli un tempo aveva riconosciuto come giusto, ma accoglieva ugualmente con onore i fatti nuovi veramente dimostrati. A volte forse esagerava nello scetticismo, ma egli aveva visto ridursi a nulla tante nuove scoperte, e aveva visto non migliorati dai nuovi metodi di ricerca tanti reperti che egli aveva raccolto coi procedimenti tecnici più semplici del suo tempo, che si poteva bene riconoscergli il diritto di dubi-

tare. L'attività di ricerca che Virchow aveva spiegato in modo straordinario a Würzburg, aumentò ancora più in modo meraviglioso dopo il suo ritorno a Berlino. Qui lo vediamo coltivare di pari passo la Patologia e l'Antropologia, e nel frattempo pubblicare degli studî storici di epidemiologia, degli studî sulla sifilide e sul vajuolo, sul governo degli ospedali, su questioni di igiene pubblica, intorno a cui era consultato anche da altre città, e sulla canalizzazione di Berlino in modo particolare. Due volumi su argomenti di medicina pubblica e sulle epidemie ci attestano l'attività di Virchow in questo campo. Egli trovava il tempo di pubblicare contemporaneamente delle conferenze popolari e di fare degli importanti discorsi nelle riunioni scientifiche, e di dirigere le Società di scienze, e di sopportare i disagi di lunghi viaggi per ricerche scientifiche.

In Berlino Virchow pubblicò la sua grande opera sui tumori, unica del genere, nello stesso tempo in più era impegnato in Parlamento in lotte politiche, divenute celebri, e che ritengo non sia questo il luogo di descrivere e di apprezzare (1), e mise ordine con lucida esposizione, con grande copia di fatti, e con una grande bibliografia a una materia che fino allora era molto confusa e contrastata. È un' opera classica consultata necessariamente da tutti, che rimase incompleta nel Cancro, forse perchè le scoperte che furono fatte ulteriormente avevano scosso profondamente la sua antica teoria.

Studiò la Metaplasia, ossia la mutazione del carattere di un tessuto colla persistenza delle cellule, e ne fece più tardi argomento di discorsi ai Congressi di Kopenaghen e di Londra con particolari vedute sulla trasformazione degli individui. Ricerche importanti fece il Virchow sull' Echinococo multiloculare che fu confuso da Buhl con un tumore colloide, e sulle Trichine, di cui scoperse la maturazione nell' intestino, e la migrazione degli embrioni nei sacchi sarcolemmatici, traendo da ciò importanti conclusioni per la salute pubblica. Dagli studî sulla tubercolosi, Virchow non trasse conseguenze conformi a quelle che furono dedotte dalle ultime scoperte. Egli, distinguendo la tubercolosi dall' infiammazione caseosa, e questa attribuendo alla costituzione speciale dell' individuo, allontanò le menti dal concetto unicistico e reale della tubercolosi, e dalla ricerca del momento eziologico. Non riconobbe la speci-

(1) Virchow fu uno dei membri più attivi della Società nazionale, e nel 1862 fu eletto al Parlamento prussiano, dove fu uno dei capi della « Fortschrift-Partei ». La parola celebre: « Culturkampf » è uscita dalle sue labbra in uno dei suoi discorsi elettorali. Dal 1880 al 1893, fu membro del Reichstag. Durante la guerra del 1866 e in quella del 1870-71 fu membro del Comitato berlinese della Croce Rossa, organizzò la prima squadra sanitaria della Prussia, e costrusse il Lazzaretto-baracche sul campo di Tempelhof. Poi fu Socio degl' Istituto per gli invalidi. Esercitò una grande influenza sull' opera della « Canalizzazione di Berlino ». Nel 1859 studiò per incarico del Governo locale, la lebbra lungo tutta la costa occidentale della Norvegia. Fu tra i fondatori della « Società tedesca di Antropologia » nel 1869.

ficità della tisi, e così per lo meno affievolì l'antico nostro concetto della contagiosità. Egli ha dato troppa importanza alla morfologia dei prodotti tubercolari, i quali sono i più proteiformi che si possano immaginare, pure provenendo da una unica causa, il bacillo di Koch. Virchow descrisse la tubercolosi bovina come un'affezione analoga al linfosarcoma; pose il lupus accanto alla morva e alla lepre, coi granulomi, e dimostrò che il metodo strettamente anatomico anche nelle mani di un grande maestro non era sufficiente a penetrare la natura reale di certi processi morbosi.

L'influenza Virchowiana in questo particolare ramo della medicina, non fu altrettanto benefica come in tanti altri. Io non posso trattenermi sull'opera estesa compiuta da Virchow come antropologo; mi limito per tanto ad accennare ad alcuno degli argomenti che egli ha svolto. Fu alla sua iniziativa che si dovette la statistica degli scolari della Germania, nell'Austria, nella Svizzera e nel Belgio, all'incirca 10 milioni di fanciulli, circa il colore della pelle, dell'iride e dei capelli. Da essa risultarono dei fatti interessanti circa la rigermanizzazione delle provincie orientali della Prussia, dei Vendi e dei Lituani che furono di tempo in tempo occupate dagli slavi, e sopra la colonizzazione tedesca dell'Austria inferiore, della Stiria, della Boemia, della Baviera superiore, e sopra la via sud-orientale percorsa dal ramo tedesco degli Alemanni sino al confine meridionale della Svizzera e del Tirolo.

Studiò le palafitte e le fortezze preistoriche della Pomerania, considerandone sopratutto gli oggetti ceramici e gli ornamenti, e trovò contro le opinioni del tempo, che le fortificazioni della Germania orientale non erano dovute a popolazioni germaniche, ma a slavi penetrati in quelle provincie.

È nota la parte grandissima che Virchow ebbe negli scavi operati da Schliemann ad Hissarlik. Egli difese il grande mercante, al quale i dotti prestavano poca attenzione, o poca fede, lo aiutò poderosamente, gli prestò i mezzi del suo grande sapere e prese parte anche praticamente alle opere del suo amico. Virchow prese a considerare sopratutto le scoperte osteologiche, e pubblicò i suoi: « Beiträge zur Landeskunde von Troas (1879) » e l'opera: « Trojanische Grüber und Schädel ». Fece uno studio critico del cranio famoso di Neanderthal; che fu ritenuto appartenente all'uomo del tempo diluviano. Virchow al contrario sostenne che le particolarità di quel cranio fossero dovute a dei processi patologici, principalmente la saldatura delle suture coronale e saggittale. Rilevante è pure uno studio sulla « Platyknemia », una forma particolare della tibia, che viene a rassomigliare a una guaina di sciabola. Questo fatto, oltrechè negli scheletri dei sepolcri dell'epoca della pietra, si trova anche tuttodì nelle popolazioni inferiori come ad esempio nei « Negritos », e sarebbe dovuto all'uso esagerato e unilaterale della muscolatura degli arti inferiori.

Virchow studiò la questione dell'atavismo, e trovò che alcuni fatti attribuiti all'atavismo come il carattere catarino del naso, erano da interpretarsi

come fenomeni regressivi di origine patologica; altri, invece come il processo frontale dell'osso temporale, ammise che avessero effettivamente il carattere atavistico, che egli definì come l'effetto di una eredità discontinua. Onde stabilì l'esistenza di un Pithekismo patologico e di un Pithekismo atavistico, entrambi frequenti nelle razze umane inferiori. Gli studî sul cretinismo e sulle cause dell'accorciamento del cranio rientrano in questa categoria di ricerche antroplogiche e moltissimi altri ancora che sarebbe troppo lungo ricordare. Non posso però tralasciare di rilevare il giudizio di Virchow sul carattere della microcefalia. Egli si oppose a considerarla un fenomeno atavistico, e ammise che non si tratti che di un arresto di sviluppo, ma coi caratteri sempre del cranio umano. Il microcefalo sarebbe dunque malgrado alcuni caratteri scimmieschi, un essere a caratteri umani, ma ad incompleto sviluppo. A questa opinione si è accostato anche il nostro Giacomini. Nell'indicare a me l'anno scorso un magnifico grosso cranio d'uomo preistorico nel suo Museo, Virchow mi fece rilevare la fallacia della teoria di Broca che l'incremento della civiltà abbia aumentato la capacità cranica degli uomini.

Nel complessivo ingente lavoro di Virchow spiccano gli argomenti di carattere biologico generale. La mente filosofica, la preparazione meravigliosa della sua coltura negli argomenti più disparati, la conoscenza delle lingue e della letteratura classica sopratutto riguardante la medicina, fecero di lui un soggetto eccezionale. I suoi discorsi nelle Accademie e nei Congressi generali contengono un tesoro di pensieri e di forma. Segnalati furono fra i moltissimi quelli in memoria di J. Müller e di Schönlein. Noi serbiamo il ricordo grato del discorso che pronunciava in Roma al Congresso medico internazionale del 1894 in onore del nostro Morgagni, e nel quale tracciò sinteticamente i periodi storici delle dottrine generali della medicina, per dimostrare la grande influenza che ebbero le ricerche di Morgagni sul progresso di quelle.

Virchow si è dichiarato vitalista, e ammise che i fenomeni della vita non si potessero spiegare colle sole forze fisico chimiche ordinarie, onde parlò anche dell'esistenza di una forza vitale. Lo si è perciò accusato di inconseguenza, ma a torto. Un Virchow non poteva intendere la vecchia personificata forza vitale, come uno spirito dirigente, un'anima, un quid di sovramateriale. Egli disse anche negli ultimi anni: Sono vitalista, ma niente affatto spiritualista; solo credo che dobbiamo respingere la « pruderie » naturalistica, che non ammette nei fenomeni della vita che un lavoro meccanico delle forze molecolari.

Il fatto più sensibile della vita è la continua produzione di elementi, ossia di nuclei e di protoplasma. La vita è esclusivamente legata alle cellule. Questa speciale attività si propaga continuamente da uno all'altro elemento, senza avere mai un'origine ex novo, perciò deve essere differente da quelle forze fisico-chimiche che costantemente agiscono tanto sugli elementi viventi, quanto nel mondo inorganico. La vita sarà sempre qualche cosa di

particolare, anche quando avessimo la cognizione, fino ai più minuti particolari, che essa sia meccanicamente originata, e meccanicamente si mantenga. Con questo concetto egli si distaccava da taluni neovitalisti, i quali non ammettono affatto la possibilità di una interpretazione meccanica di processi vitali, ma al pari di Du Bois Reymond, Virchow considerava il fenomeno della « Coscienza » come inesplicabile, per ora almeno, dalle scienze naturali. Virchow si oppose parzialmente alla dottrina di Weismann, sulla non ereditarietà dei caratteri acquisiti. Egli ammise l'ordine di variazione sotto l'azione di agenti esteriori, e persino la possibile formazione di razze nuove sulla base di alterazioni patologiche. Una variazione ereditaria, egli disse, deve una volta essere stata causata da agenti esterni, chè non esiste alcun altro elemento causale per una deviazione dal piano ordinario di sviluppo, diretto come esso è da leggi tanto precise e costanti.

Si accusò Virchow di essere avverso al Darvinismo, ma non interamente a ragione. Egli era un deciso difensore del principio di un progressivo sviluppo e perfezionamento del genere umano, e non escluse la discendenza di più alte forme dalle più basse. Non ammetteva che fosse provata la derivazione dell'uomo dalle scimmie e si esprimeva ultimamente nel senso che rimane un « desiderato della Scienza » il congiungimento dell'uomo cogli altri animali. Virchow introdusse nell'Antropologia la dottrina dei processi patologici, ma da ciò contrasse la tendenza ad un giudizio forse eccessivamente scettico in merito ai nuovi reperti antropologici, onde in questi ultimi anni egli ebbe l'opposizione decisa dei giovani antropologi.

Virchow fu tale un gigante; la sua produzione fu così estesa; le sue scoperte furono così numerose, che abbisognerebbe un lungo e paziente studio delle sue opere e del suo tempo, perchè si avesse a comprenderne per intiero la grande importanza. Anche la semplice sintetica indicazione della sua produzione scientifica, sembra la storia non di un uomo, ma di una intera generazione di scienziati. Comprendiamo il giusto orgoglio dei suoi connazionali, ma non possiamo trattenerci dal rilevare che Virchow appartiene a tutto il mondo. È una gloria di tutta l'umanità che lo spirito umano possa di quando in quando toccare un così alto limite. Non vi è pagina delle sue opere, non vi è momento della sua vita che non ci possa suggerire una folla di riflessioni, cosicchè si può dire che vivere alcun tempo dell'opera sua, serva non solo all'acquisto di una ingente quantità di nozioni particolari, ma ad agitare eziandio nel nostro cervello un cumulo di visioni intellettuali.

Virchow, entrato all'Università con un corredo prevalente di cognizioni filologiche e storiche (egli aveva durante il tempo dei suoi studi secondarî, scritta una cronaca della sua città natale che fu poi pubblicata nel 1846), è la personale smentita agli utilitari del nostro tempo, che vanno declamando contro la coltura classica. La sua coltura nelle lingue e nelle letterature classiche, non gli fu mai di ostacolo, nè alla ricerca scien-

tifica, nè alla visione umanitaria della società presente e futura; lo aiutarono, bensì, poderosamente nelle sue manifestazioni filosofiche, o nei suoi, studî di Antropologia e di Archeologia. Nessuno fu più di lui un uomo moderno, e spesso anche uomo dell'avvenire; evidentemente, il latino e il greco non hanno nociuto, nè al suo cervello, nè al suo sentimento. Fu questo filologo classico che volle la riforma della Medicina contro i filosofi astratti del suo tempo; e sulla base dell'osservazione e dell'esperimento. Raro assai è il trovare nella storía il contemperamento delle più alte doti intellettuali colle più squisite qualità del sentimento, e Virchow fu il freddo ricercatore, il critico audace e sottile, la mente universale, e insieme un grande umanitario e un apostolo convinto e illuminato. Non dimenticherò per tutta la vita l'applauso delirante che ricevette il saluto da lui portato a tutte le Nazioni rappresentate al Congresso di Medicina nella Berlino del 1890, tutt'ora fresca dei ricordi di Bismarck, saluto augurante il Progresso civile dell'umanità intera, senza distinzione di paesi o di razze. Con Virchow è scomparso uno di quei grandi che appariscono di raro nel corso dei secoli per lasciare nella Scienza un'impronta del loro genio. La natura gli concesse il dono eccezionale di poter continuare nel lavoro per quasi sei decenni ininterrotti. Fu dotato di ingegno chiaro, acuto e critico in alto grado col quale presto penetrava nella natura delle cose, e di una straordinaria memoria che gli faceva ritenere per sempre anche le più fugaci impressioni, e di una salda volontà che si manifestò fin da quando era bambino, e di un corpo tutt'altro che atletico, ma resistente tenacemente ad ogni causa pertubatrice, e di una forza di penetrazione e di resistenza al lavoro come a pochi uomini è concesso di avere. La sua sete inestinguibile di sapere lo elevò al disopra dei suoi simili in molte parti dello scibile, e fu nella Scienza e nella vita pubblica uno degli spiriti direttivi dell'epoca nostra.

Noi chiniamo la fronte dinnanzi a chi ebbe in sè stampata una così vasta orma dello spirito creatore della Natura!

N.B. Come fonti di questo scritto, oltre alle opere e ai discorsi di Virchow, hanno servito sopratutto la commemorazione di Virchow fatta da Orth e da Marchand, nonchè le eccellenti biografie di Wirchow scritte da W. Becher — Berlino 1891, e da Schwalbe — Berlino 1901.

Il Vicepresidente Blaserna legge la seguente Commemorazione del Corrispondente G. B. Magnaghi.

Il Vice-Ammiraglio Giovanni Battista Magnaghi, di cui deploriamo la recente e inaspettata perdita, appartenne all'Accademia, in qualità di Corrispondente nazionale per la Sezione di Geografia matematica e fisica, fino dal 31 dicembre 1883.

Egli nacque nel 1839 a Lomello presso Mortara; fu nominato guardiamarina di seconda classe nel 1855 e percorse nella Regia Marina tutti i gradi fino a quello di Vice-Ammiraglio e Comandante del I Dipartimento marittimo della Spezia, che è considerato come il posto marinaresco più elevato nel nostro paese.

Splendido è il suo stato di servizio; ma ciò che richiamò altamente su di lui l'attenzione della nostra Accademia e gli valse la sua nomina a Corrispondente, furono i suoi larghi e profondi studî di matematica applicata alla navigazione; studî che egli spese interamente in favore della Marina.

Nel 1872 il Magnaghi fondò, a Genova, l'Ufficio idrografico della Marina, oggi Istituto Idrografico, organizzando sapientemente tutti i servizi incombenti all'Ufficio e da esso dipendenti. Egli vi rimase alla Direzione per sedici anni e gli diede un impianto seriamente scientifico. Vi eresse l'Osservatorio astronomico; impiantò un'officina meccanica per riparazione e costruzione d'istrumenti nautici e geodetici; ordinò l'officina d'incisione in rame per le nuove carte idrografiche; iniziò la segnalazione del mezzogiorno medio col mezzo di un colpo di cannone sparato elettricamente; costruì un casotto magnetico, allo scopo principale di regolare le rose delle bussole costruite in officina; fondò l'officina calcografica, la litografica, la tipografica, la cronometrica, la fotografica e la galvanoplastica; e si occupò attivamente della mareografia, istituendo Osservatorî con apparecchi auto-registratori a Genova, a Venezia, alla Maddalena. La feconda iniziativa da lui spiegata in tutti questi impianti fece sì, che noi possediamo in Genova un Istituto Idrografico di primo ordine, degno di stare alla pari coi migliori Istituti di tal genere. Vi si fanno regolarmente osservazioni astronomiche per la misura esatta del tempo e per la regolazione dei pendoli e dei cronometri; si costruiscono, si riparano e si rettificano gli strumenti astronomici, geodotici e nautici; si disegnano, si incidono e si stampano le nuove carte idrografiche; si correggono le carte estere ed italiane già esistenti; si provvede infine alla compilazione di avvisi ai naviganti e di notizie idrografiche, nonchè alla stampa di libri interessanti la R. Marina ed alla distribuzione del materiale di rotta agli Osservatorî dipartimentali ed alle R. Navi.

Questa fu l'opera maggiore spiegata dal Magnaghi e che formerà sempre il maggior suo titolo di gloria. Ed egli le conservò la sua affezione e l'alto

suo interesse fino all' ultimo giorno della brillante sua carriera. Anche quando, per la sua promozione a Contrammiraglio, dovette abbandonare la Direzione dell' Istituto Idrografico, egli seguitò a interessarsene, a visitarlo e ad essere largo, verso i suoi successori, di consigli e di appoggi. Come disse l'attuale Direttore, il bravo comandante Cattolica in una sua bellissima Commemorazione: « All' opera spiegata nel campo del servizio idrografico, il Magnaghi consacrò tutte le energie del suo acuto e versatile ingegno, e tutta la sua vigorosa operosità ».

Il Magnaghi diresse, inoltre, i lavori di due campagne idrografiche, che tradotti in più di cento fra carte e piani e 130 vedute di costa, costituiscono un' illustrazione di circa tre quarti del nostro litorale, la quale per esattezza nautica e per bellezza artistica può sostenere il confronto colle migliori del genere. E con questa opera ingente non solo egli corrispose ad un imperioso bisogno della navigazione, ma creò ben anco tutta una scuola di ufficiali idrografi, di disegnatori e di incisori, in una specialità che prima non era punto coltivata fra noi.

Il Magnaghi s' interessò anche ai problemi della Fisica del mare ed alle ricerche talassografiche, che spero saranno riprese quando che sia. Rammento, a titolo d'onore, le sue ricerche negli stretti dei Dardanelli e del Bosforo, per cui si conobbero le leggi che regolano i movimenti delle loro acque.

Egli scrisse un' opera: « gli istrumenti a riflessione », libro fortemente pensato, in cui alla soda coltura scientifica va unito un forte sentimento di attuazione pratica; costruì e perfezionò varî istrumenti marini, ed ebbe anche la rara fortuna di aggiungere il suo nome a quelli, che modificarono e perfezionarono la bussola.

L'Ammiraglio Magnaghi morì il 21 giugno 1902, quasi all' improvviso, e quando la vigorosa sua natura poteva far presagire in lui una vita ben più lunga. La Marina e l'Accademia hanno perduto in lui una illustrazione ed una persona altamente benemerita della scienza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Boccardo, Foà, Pascal e Pflueger. Fa inoltre particolare menzione della *Relazione sul Congresso internazionale degli Ingegneri, tenutosi a Glasgow nel 1901*; della *Geological Map of Dominion of Canada*; e della pubblicazione del sig. M. A. Ronna: *Léonard de Vinci peintre-ingénieur-hydraulicien.*

Il Vicepresidente Blaserna presenta una copia dell' opera: *La Stella Polare nel mare Artico*, inviata in dono, con dedica autografa, da S. A.

R. il Duca degli Abruzzi; il Senatore Blaserna rileva la importanza della pubblicazione e dei risultati ottenuti dalla spedizione, e propone che l'Accademia mandi un caldo ringraziamento a S. A. R. pel cortese pensiero che ebbe d'inviare all'Accademia una delle prime copie edite dell'opera sua. La Classe approva unanime la proposta del suo Presidente.

Il Socio Capellini fa omaggio della sua pubblicazione: *Note esplicative della Caria geologica dei dintorni del golfo di Spezia e Val di Magra inferiore* e ne parla.

Il Corrispondente Cocchi offre in dono, discorrendone, la sua opera: *La Finlandia. Ricordi e studi.*

Il Socio Cerruti fa omaggio, a nome dell'autore, di una pubblicazione dell'ing. L. Allievi, avente per titolo: *Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione* (*colpo d'ariete*).

Il Socio Volterra offre la Memoria a stampa del sig. Coulon, intitolata: *Sur l'intégration des équations aux derivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques* e ne discorre.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società geologica di Sydney; il Museo di storia naturale di Amburgo.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

L'Accademia di agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio di Verona; la R. Società di scienze e belle lettere di Gothembourg; la Società di scienze naturali di Magdeburg; la Società degli ingegneri civili di Londra; la Facoltà delle scienze di Marsiglia; gl'Istituti meteorologici di Bucarest e di Budapest; l'Istituto geografico-militare di Vienna; il Corpo Reale delle Miniere di Roma; il R. Osservatorio di Greenwich; le Università di Heidelberg, di Marburg e di Tokyo: la Scuola tecnica superiore di Berna.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 dicembre 1902.

Alasia C. — H. Faye. Pavia, 1902. 8°.

Id. — Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangolo. Bergamo, 1902. 8°.

Allievi L. — Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione. Roma, 1902. 8°.

Boccardo G. — Stelle che nascono e stelle che muoiono. Roma, 1902. 8°.

Borredon G. — La luna è la sorgente fisica del freddo. Napoli, 1902. 8°.

Capellini G. — Note esplicative della Carta geologica dei dintorni del Golfo di Spezia e Val di Magra inferiore. Roma, 1902. 8°.

Cocchi I. — La Finlandia. Ricordi e Studî. Firenze, 1902. 8°.

Czapek F. — Untersuchungen ueber die Stickstoffgewinnung und Eiweissbildung der Pflanzen. Braunschweig, 1902. 8°.

Id. — Zur Kenntniss der Stickstoffversorgung und Eiweissbildung bei Aspergillus niger. Berlin, 1902. 8°.

D'Achiardi G. — Metamorfismo sul contatto fra calcare e granito al Posto dei Cavoli presso S. Piero in Campo (Elba). Pisa, 1902. 8°.

Exner S. — II. Bericht ueber den Stand der Arbeiten der Phonogramm-Archivs-Commission. Wien, 1902. 8°.

Foà P. — Sulla produzione cellulare nell'infiammazione e in altri processi analoghi con particolare riguardo alla produzione delle « plasmacellule ». Torino, 1902. 4°.

Fokker A. P. — Versuch einer neuen Bakterienlehre. Haag, 1902. 8°.

Hepites St. C. — Astronomul Căpităneanu. Bucuresci, 1902. 8°.

Id. — Cutremurele de Pamînt din România în anul 1901. st. n. Bucuresci, 1902. 4°.

Id. — Materiale pentru Climatologia României. XVI. Climatologia Jașilor. Bucuresci, 1902. 4°.

Id. — O primă încercare asupra lucrarilor astronomica din România până la finele secolului al XIX-lea. Bucuresci, 1902. 4°.

Id. — Schiță istorică a lucrărilor astronomice in România. Bucuresci, 1902. 4°.

Hellmann G. — Regenkarte der Provinzen Schleswig-Holstein und Hannover. Berlin, 1902. 8°.

International Engineering Congress (Glasgow, 1901). — Report of the Proceedings and Abstracts of the Papers read. Glasgow, 1902. 8°.

Martini T. — Fenomeni che manifestano le polveri igrofile poste in contatto con le soluzioni saline, i miscugli alcoolici e gli acidi diluiti. Pavia e Venezia, 1902. 8°.

Mattei G. E. — Areonautica vegetale. Napoli, 1902. 8°.

Memma V. — Brevi osservazioni di idrostatica ed idrodinamica e relative applicazioni. Caserta, 1902. 8°.

Murat J. St. — Istoricul lucrărilor meteorologice în România. Bucuresci, 1902. 8°.

Oddo G. — Ebullioscopia delle sostanze volatili. I-III. Risposta al prof. Ciamician. Palermo, 1902. 8°.

Pascal E. — I gruppi continui di trasformazioni. Parte generale della teoria. Milano, 1903. 16°.

Id. — Lezioni di calcolo infinitesimale. Parte I. Calcolo differenziale. Parte II. Calcolo integrale. 2ª ed. Milano, 1902-3. 16°.

Pflüger E. — Dr. Georg Lebbin's Entdeckeransprüche, betr. die Glykogenanalyse, werden widerlegt. Bonn, 1902. 8°.

Id. — Ueber die Einwirkung verdünnter Kalilauge auf Glykogen bei 100°C. Bonn, 1902. 8°.

Id. — Zur Geschichte der Glykogenanalyse. Bonn, 1902. 8°.

Piolti G. — Pirosseniti, glaucofanite, eclogiti ed anfiboliti dei dintorni di Mocchie (Val di Susa). Torino, 1902. 8°.

Ronna M. A. — Léonard de Vinci peintre-ingénieur-hydraulicien (1452-1519). Paris, 1902. 4°.

Sars G. O. — An Account of the Crustacea of Norway. Vol. IV Cepepoda, part IX & X. Bergen, 1902. 8°.

S. A. R. L. A. di Savoja Duca degli Abruzzi, U. Cagni e *P. A. Cavalli-Molinelli.* — La « Stella Polare » nel Mare Artico 1899-1900. Milano, 1903. 8°.

Verson E. — Observations on the structure of the Exuvial Glands and the formation of the Exuvial Fluid in Insects. Leipzig, 1902. 8°.

Viola C. — A proposito del calcare con pettini e piccole nummuliti di Subiaco. Roma, 1902. 8°.

Id. — I principali tipi di lave dei Vulcani Ernici (prov. di Roma). Roma, 1902. 8°.

Id. — L'augitite anfibolica di Giumarra presso Rammacca (Sicilia). Roma, 1902. 8°.

Wodecki F. — Astronomia wobec krytyki i prawo dwoistości. Warszawa, 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 dicembre 1902.

P. VILLARI, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche.* Nota I di ONORATO NICCOLETTI, presentata dal Socio DINI.

In una Memoria, collo stesso titolo di questa Nota, pubblicata nell'ultimo fascicolo degli Acta Mathematica (1), il sig. P. Stäckel con un metodo, di cui la prima idea va ricercata in una osservazione del Weierstrass (2), costruisce un esempio notevole di una funzione *analitica* e *trascendente* y di una variabile complessa x, tale che sia essa, sia la funzione inversa $x(y)$ in *tutto* il loro campo di esistenza (che può anche essere l'intero piano complesso dell'una o dell'altra variabile) assumono un valore algebrico per ogni valore algebrico di quella che si riguarda come la variabile indipendente.

Dall'esempio del sig. Stäckel risulta, come la proprietà precedente non sia caratteristica per le funzioni algebriche di una variabile complessa; ma se si osserva, insieme collo Stäckel, che per una funzione algebrica di una variabile complessa, sia la funzione inversa, sia qualsiasi loro derivata è ancora una funzione algebrica e quindi assume un valore algebrico per ogni valore algebrico di quella che si riguarda come la variabile indipendente, è da pensare se non sia questa piuttosto una proprietà caratteristica delle funzioni algebriche.

(1) Cf. Stäckel, *Aritmetische Eigenschaften analytischer Functionen* (Acta Mathematica, Tomo 25°, pag. 371-383).

(2) Idem (Math. Annalen, Bd. 46, S. 516).

Ora questo non è; è infatti possibile costruire una funzione *trascendente* di una variabile complessa che abbia la proprietà ora detta; più generalmente anzi: *è possibile costruire un'equazione trascendente* (*a coefficienti razionali*):

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

in n *variabili complesse* $x_1 \dots x_n$, *tale che in un campo conveniente* (che può essere anche tutto l'S_n complesso $(x_1 \dots x_n)$) *definisca una qualunque,* x_i, *di esse variabili come funzione analitica e trascendente delle altre* $n-1$, *ed in guisa che, ove tra le* $x_1 \dots x_n$ *si ponga un qualunque sistema di relazioni algebriche,* (*a coefficienti razionali*), *e la* x_i *e le sue derivate di un ordine qualunque si riducano a funzioni algebriche di alcune tra le* $x_1 x_2 \dots x_{i-1}\ x_{i+1} \dots x_n$.

1. Sia per questo:

$$(1)\quad f(x_1 x_2 \dots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_n \leq m)$$

una funzione razionale intera di grado m, *a coefficienti razionali interi e privi di fattori comuni* (1), delle n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, irriducibile in queste variabili nel campo assoluto di razionalità. Estendendo una definizione di Cantor (2), diremo *altezza* della funzione f, ed indicheremo col simbolo h_f il numero:

$$(2)\qquad h_f = (m-1) + \Sigma |A_{q_1 q_2 \dots q_n}|;$$

e diremo anche che h_f è l'altezza della equazione algebrica (3):

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0.$$

Quando la f abbia poi i coefficienti razionali, ma non intieri, diremo sua altezza l'altezza del prodotto kf, dove k è il minimo multiplo comune dei denominatori dei coefficienti della f.

Vi è un numero finito di funzioni f (4) *di* n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *che hanno una determinata altezza* h: assegnato infatti h, si hanno dalla (2) un numero finito di valori possibili di m e delle $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$ (5).

(1) Considerazioni affatto analoghe valgono evidentemente, con lievi modificazioni, oltrechè nel campo assoluto di razionalità, anche nel campo R(i) dei numeri *intieri* di Gauss e più generalmente in qualsiasi corpo algebrico assegnato.

(2) Cf. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs der reeller algebraischer Zahlen* (Crelle, Bd. 77, 1873, pag. 258).

(3) Ora e nel seguito, seguendo i concetti aritmetici di Kronecker, supponiamo sempre che le funzioni e le equazioni che consideriamo siano a coefficienti *razionali*.

(4) Quando non diciamo altro, intendiamo: *funzione razionale intiera irriducibile, a coefficienti razionali intieri e privi di fattori comuni.*

(5) Ne segue in particolare, per un noto teorema della teoria degli aggregati: *Le equazioni algebriche in* n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *formano un insieme numerabile.*

Chiamiamo ora $\varphi_h(x_1 x_2 \dots x_n)$ il prodotto di tutte le funzioni f di altezza h; e poniamo:

$$(3) \qquad \psi_h(x_1 x_2 \dots x_n) = \prod_1^h{}_\nu \varphi_\nu(x_1 x_2 \dots x_n) \quad ; \quad \psi_0(x_1 x_2 \dots x_n) = 1;$$

sarà ψ_h un polinomio a coefficienti razionali intieri nelle $x_1 \dots x_n$, *il cui grado diciamo* λ_h.

2. Sia ora:

$$(4) \qquad \varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_r \dots\dots$$

una successione *divergente* di numeri intieri e positivi; sia:

$$(5) \qquad \theta_0(x_1 x_2 \dots x_n), \ \theta_1(x_1 \dots x_n); \ \dots \theta_r(x_1 \dots x_n) \dots\dots$$

una successione di polinomî a coefficienti razionali intieri (i cui gradi diciamo $\sigma_0, \sigma_1 \dots \sigma_r \dots\dots$) ai quali non imponiamo per ora alcuna condizione.

Definiamo ancora n successioni *divergenti* di numeri intieri e positivi $\mu_r^{(i)}$ $(i = 1, 2 \dots n;\ r = 1, 2 \dots\dots)$ dalle relazioni ricorrenti:

$$(6) \qquad \mu_{r+1}^{(i)} \geq \mu_r^{(i)} + \varrho_r \lambda_r + \sigma_r + 1 \qquad (\mu_0^{(i)} = 0);$$

e poniamo infine, per qualunque r:

$$(7) \ \omega_r(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^{\mu_r^{(1)}} x_2^{\mu_r^{(2)}} \dots x_n^{\mu_r^{(n)}} \theta_r(x_1 x_2 \dots x_n) \{\psi_r(x_1 x_2 \dots x_n)\}^{\varrho_r} (r = 0, 1 \dots);$$

sarà ω_r un polinomio in $x_1 x_2 \dots x_n$ a coefficienti razionali intieri, di cui è opportuno notare alcune semplici proprietà.

a) Tranne al più per $r = 0$, si ha:

$$\omega_r(x_1 \dots x_{i-1}, 0, x_{i+1} \dots x_n) = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

b) Il grado di ω_r nella variabile x_i è maggiore od uguale a $\mu_r^{(i)}$, minore od uguale a $\mu_r^{(i)} + \lambda_r \varrho_r + \sigma_r = \mu_{r+1}^{(i)} - 1$. Ne segue che: *due polinomi* ω_r, ω_s (per $r \neq s$) *non hanno termini simili.*

c) *Se tra le* $x_1 x_2 \dots x_n$ *si pone un'equazione algebrica* (*irriducibile*):

$$(8) \qquad g(x_1 x_2 \dots x_n) = 0,$$

tutte le ω_r *per cui è* $r \geq h_g$, *si annullano*. Per $r \geq h_g$, il polinomio $\psi_r(x_1 \dots x_n)$ e quindi anche ω_r ha infatti il fattore $g(x_1 \dots x_n)$.

d) Una derivata qualunque del polinomio ω_r, di ordine minore di ϱ_r, contiene ancora il fattore $\psi_r(x_1 \dots x_n)$: ne segue, poichè $\lim_{r=\infty} \varrho_r = +\infty$, che: *se le* $x_1 \dots x_n$ *sono legate dalla equazione algebrica* (8), *insieme colle* ω_r *si annullano tutte le loro derivate parziali di ordine m, per cui si ha insieme:* $r \geq h_g$; $\varrho_r > m$.

3. Consideriamo ora la serie:

$$\sum_0^\infty {}_h\, u_h\, \omega_h(x_1 \ldots x_n)\,, \tag{9}$$

in cui le u_h *sono numeri razionali, che ora designeremo in modo più preciso*. Se nella (9) eseguiamo tutte le moltiplicazioni indicate, per la proprietà b) dei polinomî ω_r, non vi saranno mai termini simili provenienti da termini diversi della serie stessa; ne risulta quindi una serie *npla* di potenze:

$$\Sigma a_{q_1 q_2 \ldots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}\,, \tag{10}$$

in cui ogni coefficiente $a_{q_1 \ldots q_n}$ è il prodotto di un numero intero per *una sola* u_r; è inoltre evidente che una stessa u_r figura come fattore in un numero *finito* di coefficienti $a_{q_1 q_2 \ldots q_n}$.

Indichiamo ora con

$$\Sigma A_{q_1 q_2 \ldots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n} \tag{11}$$

una serie *npla* di potenze delle $x_1\, x_2 \ldots x_n$, la quale converga *assolutamente* ed *uniformemente* in un certo campo C ad n dimensioni (che può essere anche tutto l'S_n complesso $(x_1 \ldots x_n)$); sarà *sempre* possibile soddisfare *con valori razionali delle* u alle disuguaglianze:

$$|a_{q_1 q_2 \ldots q_n}| < |A_{q_1 q_2 \ldots q_n}|\,; \tag{12}$$

queste disuguaglianze si tradurranno infatti in altre sulle u_r della forma:

$$|u_r| < \varepsilon_r \qquad (r = 0\,, 1\,, 2 \ldots) \tag{13}$$

essendo ε_r un numero reale e positivo (e non sempre nullo), che per ogni singolo valore di r può ritenersi perfettamente determinato dalle disuguaglianze (12).

Supponiamo per semplicità che la (11) converga in tutto l'S_n complesso $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$; allora, *se almeno da un certo valore di* r *in poi, le* (13) *sono soddisfatte*, posto:

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \sum_0^\infty {}_h\, u_h\, \omega_h(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \Sigma a_{q_1 q_2 \ldots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}\,, \tag{14}$$

sarà $F(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ una *trascendente intera* nelle n variabili complesse $x_1\, x_2 \ldots x_n$; e tali saranno anche tutte le sue derivate parziali di un ordine qualunque; queste inoltre si potranno calcolare derivando termine a termine, tante volte quante si vuole, la serie (9).

Non è inutile osservare che: *entro i limiti fissati dalle disuguaglianze* (13) *i numeri razionali* u_r $(r = 0\,, 1\,, 2 \ldots)$ *possono prendersi affatto arbitrariamente.*

4. Sia ora l'equazione:

$$(15) \qquad F(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 ;$$

sotto alcune condizioni iniziali, che possiamo sempre supporre verificate in un certo punto di S_n (ad es.: l'origine, il che, per la proprietà a) dei polinomî ω_r, porta delle condizioni relative al solo polinomio $\theta_0(x_1 \dots x_n)$) essa definisce in una certa regione di S_n una varietà analitica V ad n dimensioni. In questa regione noi svolgeremo le nostre considerazioni.

A) Qualsiasi varietà algebrica di S_n sega la varietà V in una varietà algebrica.

Diciamo *varietà algebrica* in S_n la totalità dei *punti* $(x_1 \dots x_n)$ che soddisfanno ad un sistema di equazioni algebriche (che definiscono la varietà):

$$(16) \qquad g_\rho(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \qquad (\rho = 1, 2 \dots q).$$

L'eventuale sezione della varietà definita dalle equazioni (16) colla nostra varietà V si ottiene infatti considerando simultaneamente le equazioni (15) e (16). Ma, indicando con $h+1$ la *massima* altezza di un fattore irriducibile di una g_ρ $(\rho = 1, 2 \dots q)$, nella $F(x_1 \dots x_n)$, per la proprietà c) dei polinomî ω_r, si annullano allora tutte le ω_r, per cui è $r > h$; ponendo adunque, per qualunque t:

$$(17) \qquad F^{(t)}(x_1 \dots x_n) = \sum_0^t {}_h \, u_h \, \omega_h(x_1 \dots x_n),$$

alle equazioni (15) *e* (16) *può sostituirsi il sistema di* $q+1$ *equazioni algebriche*:

$$(18) \quad F^{(h)}(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \ ; \ g_\rho(x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \quad (\rho = 1, 2 \dots q),$$

il che dimostra la nostra asserzione.

Se $x_1 \dots x_n$ è un punto di V, diremo *elemento di ordine* s di V il sistema:

$$(x_1 x_2 \dots x_n ; \ dx_1, dx_2 \dots dx_n ; \dots ; \ d^s x_1, d^s x_2, \dots d^s x_n)$$

delle coordinate del punto e dei loro differenziali fino all'ordine s, *presi sulla varietà* V, in guisa cioè che la $F = 0$ e le equazioni che si hanno da essa, differenziandola fino all'ordine s, sian soddisfatte. Abbiamo allora:

B) Qualsiasi elemento di ordine finito della varietà V, relativo ad un punto della sezione di V con una varietà algebrica qualunque di S_n, è ancora algebrico.

Insieme colle equazioni (15) e (16) consideriamo infatti quelle che si hanno, differenziando la $F(x_1 \dots x_n)$ fino all'ordine s:

$$(19) \qquad d^t F = 0 \qquad (t = 1, 2 \dots s).$$

Il primo membro di ciascuna delle (19) è una funzione razionale intiera dei differenziali $d^\mu x_i$ $(i=1,2\ldots n\,,\ \mu=1,2\ldots s)$ i cui coefficienti sono derivate parziali della F di *ordine non superiore ad* s. Ove adunque si abbian le (16), saranno nulle, per la proprietà d) dei polinomî ω_r, tutti quei polinomî e le loro derivate per cui è insieme $r>h$, $\varrho_r>s$: ciascuna delle (19) si riduce cioè ad un polinomio in tutti i suoi argomenti. Ne segue appunto il teorema B).

Più generalmente si pongano tra le $x_1\,x_2\ldots x_n$ delle relazioni *algebrico-differenziali* (a coefficienti razionali):

$$(20)\quad G_\rho(x_1\,x_2\ldots x_n\,;\,dx_1\ldots dx_n\ldots\,;\,d^kx_1\ldots d^kx_n)=0\qquad(\varrho=1\,,2\ldots q)$$

di ordine *non maggiore* di k, le quali sian compatibili, e tra cui vi sia *almeno un' equazione algebrica*:

$$g\,(x_1\,x_2\ldots x_n)=0\,.$$

Lo stesso procedimento dimostra allora che:

C) Qualunque elemento della varietà V di ordine maggiore od uguale a k relativo ad un punto della sezione di V con un integrale delle equazioni (20) è ancora algebrico.

La varietà V passi per l' origine ed in questo punto *tutte* le derivate $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ sian diverse da zero, il che può farsi evidentemente in infiniti modi, prendendo convenientemente il *primo* polinomio θ_0 della successione (5); dalla $F=0$ può allora trarsi una qualunque delle x, ad es.: la x_i, in una serie di potenze delle altre $n-1$:

$$(21)\ x_i=P\,(x_1\,,\ldots x_{i-1}\,,x_{i+1}\,,\ldots x_n)\qquad(i=1\,,2\ldots n)\quad;\quad P(0)=0$$

questa serie converge allora in un certo intorno (ad $n-1$ dimensioni e di ampiezza non nulla) del punto $x_1=x_2=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_n=0$, ed in questo intorno definisce la x_i come funzione analitica e monodroma delle $x_1\ldots x_{i-1}\,x_{i+1}\ldots x_n$, che ha evidentemente le proprietà seguenti:

D) Se tra le $x_1\,x_2\ldots x_n$ si pone un sistema qualunque di relazioni algebriche, una *qualunque* di esse variabili, ad es. la x_i, e le sue derivate (rispetto alle altre) di un ordine qualunque (calcolate dalla (21)) si riducono a funzioni algebriche di alcune tra esse variabili.

5. Il risultato che precede, per quanto notevole, non basta, come osserva a ragione lo Stäckel nella Memoria citata, ad assicurare dell' esistenza di funzioni analitiche e *trascendenti* di una o più variabili complesse, che abbian le proprietà espresse dal teorema D). Si potrebbe infatti pensare che l' equazione $F(x_1\,x_2\ldots x_n)=0$, pure essendo trascendente, definisse in

qualunque punto *algebrico* $(\xi_1 \dots \xi_n)$ della varietà V soltanto degli *elementi* (nel senso di Weierstrass) di funzioni analitiche *algebriche*:

$$(22)\ x_i - \xi_i = P_i(x_1 - \xi_1; \dots x_{i-1} - \xi_{i-1}; x_{i+1} - \xi_{i+1}; \dots x_n - \xi_n)\ (P(0)=0; i=1,2 \dots n);$$

potrebbe cioè supporsi che *qualunque* elemento (22) relativo ad un punto *algebrico* (ξ) della varietà V, dedotto dalla $F = 0$, *soddisfacesse sempre ad una equazione algebrica*:

$$g_{(\xi)}\,(x_1\, x_2 \dots x_n) = 0\,,$$

variabile da punto a punto, da elemento ad elemento; per esprimerci chiaramente, se non con tutto rigore, si potrebbe pensare cioè che la varietà V risultasse costituita dalla riunione di infinite varietà algebriche, distinte o coincidenti, di S_n, in guisa da non poter più allora affermare la trascendenza di nessuno degli elementi (22) relativi ad un qualunque punto algebrico di V.

Per quanto, avendo riguardo a tutto quello che vi ha di arbitrario nella costruzione della $F(x_1 \dots x_n)$, un tale eventualità sembri estremamente improbabile, pure finchè non si riesca, magari imponendo alla F ulteriori condizioni, ad escluderla completamente, essa costituisce una grave difficoltà che può infirmare le considerazioni precedenti. Fortunatamente questa difficoltà può rimuoversi, con un metodo, a nostro credere, geniale ed elegante, sebbene un po' artificioso, che, dovuto allo Stäckel per una equazione a due variabili x ed y molto più particolare della nostra, si può estendere, convenientemente modificato, anche al problema generale che ora ci occupa. Se l'Accademia me lo permette, consacrerò a questa dimostrazione una prossima Nota.

Mineralogia. — *La bournonite nella miniera della Argentiera della Nurra (Portotorres, Sardegna).* Nota del prof. Domenico Lovisato, presentata dal Socio Struever.

Presso all'estrema parte nord-ovest dell'isola vediamo per non molto risorgere l'uronico della massa dell'Iglesiente, qui sollevato dalle granuliti, che per poco compariscono all'Asinara.

Le elevazioni, che si veggono dal Capo dell'Agentiera al Capo Falcone, sono generalmente formate da schisti quarziferi, talvolta tempestati di granati e contenenti all'Istintino, sebbene in piccolissima quantità, la *Tantalite ferrica* (1).

In questi schisti quarziferi s'annidano gli importanti filoni della miniera dell'Argentiera, costituendo un giacimento irregolare in direzione ed in ricchezza.

(1) Lovisato, *Notizia sopra alcune specie minerali nuove per la Sardegna.* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, vol. VII, primo sem., serie 5ª, fasc. 8º. Roma 1898.

Sebbene non sia scopo della presente Nota di fare la descrizione di questa miniera, sulla quale però si hanno assai scarse notizie nella letteratura mineralogica, per quanto io mi sappia avendone parlato il Barelli ([1]), il Baldracco ([2]), il Lamarmora ([3]), il Sella ([4]), il Jervis ([5]), ecc., non sarà male ricordare come da antico codice si rilevi che Gonnario da Torres nel 1131 faceva donazione della metà dell'Argentiera della Nurra alla chiesa primiziale di Santa Maria di Pisa ([6]).

Sembra però che i lavori più antichi sieno anteriori ai Pisani, e che il filone sia stato lavorato principalmente verso la sua parte sud-ovest; però dagli avanzi degli utensili in legno trovati in quelle lavorazioni è assai difficile indurne l'età.

Pel Barelli i minerali dellArgentiera sarebbero: *piombo solforato argentifero* e *zinco solforato* in una matrice di *quarzo e ferro ossidato;* pel Sella, che parla di filoni a matrice di *quarzo* con *fahlerz,* i minerali sarebbero: *blenda, galena* e *fahlerz*; pel Jervis l'Argentiera darebbe: *blenda, galena, stibina, tetraedrite, tennantite* ([7]), *pirite* colla ganga di quarzo ed in piccola quantità anche di barite. In generale l'Argentiera era ed è ritenuta come una miniera di *blenda, galena* e *fahlerz* in ganga di quarzo con pirite di ferro e con presenza qua e là di stibina.

La blenda costituisce la parte più importante del filone: raramente presentasi in cristalli perfetti, ma è varia nella sua struttura, generalmente cristallina, talvolta a larghe lamelle, talvolta compatta e friabile.

Non posso dire nulla per riguardo alla sua composizione, cioè, se colla blenda normale vi compariscano le varietà ferrifera (*Marmatite*), cadmifera (*Przibramite*), mercuriale, stannifera, ecc., perchè non ho avuto campo di occuparmi delle sue analisi, nè la blenda essendo l'obbiettivo di questa mia Nota, che ha invece per iscopo di mostrare che mentre fino ad oggi si è ritenuto da tutti il *fahlerz* come uno dei principali minerali dell'Argentiera

([1]) *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna.* Torino 1835, pag. 597-8.

([2]) *Cenni sulla costituzione metallifera della Sardegna.* Torino 1854, pag. 286-302.

([3]) *Voyage en Sardaigne.* Troisième partie, tome I, Turin 1857, pag. 91-3.

([4]) *Condizioni dell' industria mineraria nell' isola di Sardegna.* Relazione alla Camera dei Deputati per la Commissione d' inchiesta. Maggio 1871, pag. 48-9.

([5]) *I tesori sotterranei dell'Italia.* Parte terza. *Regione delle isole: Sardegna e Sicilia.* Roma 1881, pag. 139-43.

([6]) Tola, *Codex diplomaticus Sardiniae.* Tomo I, pag. 207. Vedi Jervis, op. citata, pag. 140.

([7]) Hintze, nel suo *Handbuch der Mineralogie* (Siebente Lieferung, 1902, pag. 1101) sulla fede del Jervis cita la *tennantite* per l'Argentiera della Nurra ed anche per Capo Marargiu in quel di Bosa, aggiungendo questo dato, da me non conosciuto: *in Sarrabus* (Wergl. S. 793) *bei Baccu Arrodas Kleine Tetraëder auf Kalkspath* (Traverso, N. Jahrb. 1899, 2, 220).

della Nurra, questa specie minerale manca assolutamente in quella miniera, essendo *Bournonite* il minerale finora creduto *fahlerz*.

Già fino dal 1885 io aveva sospettato trattarsi di *Bournonite* in quelle massecole splendenti, che compariscono specialmente alla dipendenza della blenda col quarzo all'Argentiera, giacchè fra il materiale del valore di lire 5029, 15, lasciato da me in dono all'Università di Sassari, quando da quella passai a questa Università, al n. 158 d'inventario si trova questo cartello: *Ventitre campioni di Tetraedrite con bournonite, galena, blenda, ecc. dell'Argentiera (Nurra).*

Non ho poi visitato più quella interessante miniera, sebbene frequenti sieno state le mie visite alla Nurra, nè mi sono arbitrato di manomettere un campione, che si conserva in questo Museo al n. 961 del vecchio inventario, compreso nel gruppo 12 (42) del nuovo, e notato come *Panabase dell'Argentiera della Nurra,* bellissimo esemplare che dopo blenda con massecole e venuzze di quarzo porta il minerale, creduto finora *fahlerz,* attraversato da vena di quarzo con moschette e secrezioni di calcopirite. Esaminai però alcuni frammenti di minerali di quella miniera, portati con me da Sassari e che avrebbero dovuto contenere anche la tetraedrite; però mi risultarono tutti di pura galena, poverissima d'argento, ed assolutamente priva di rame. Esaminai pure altri campioni, che graziosamente mi furono inviati in dono dall'egregio e carissimo sig. Antonio Mele, contabile-cassiere a quella miniera, ma anche in questi non rinvenni il rame. Il mio dubbio allora che pel *fahlerz* si trattasse di un nome usurpato si fece maggiore e l'esternai per lettera al direttore di quella miniera sig. ing. Attilio Daneri, colla preghiera mi volesse inviare alcuni campioncini del minerale più caratteristico, che passava col nome di *fahlerz* colassù.

Contemporaneamente scrivea all'on. Castoldi, direttore generale delle miniere di Montevecchio, pregandolo di mandarmi qualche esemplare del minerale, che nella concessione di Piccalina, a levante di quella ricchissima miniera, veniva indicato col nome di *fahlerz,* dubitando anche per quello dello stesso errore: tanto più m'interessava di vedere qualcuno degli esemplari di Piccalina, inquantochè mi ricordava di aver sentito una volta, che colà s'era trovato il *fahlerz* anche in cristalli, senza però ch'io l'avessi mai potuto vedere, per quante volte avessi manifestato la mia curiosità di esaminarli, giacchè un solo cristallo per Piccalina avrebbe risolta la questione. Sgraziatamente la mia lettera trovò il Castoldi malfermo in salute ed in tali condizioni da non saper dove mettere mano per rintracciare qualcuno degli esemplari da me richiesti. Però esaminati dei frammenti, che a Piccalina mi furono dati come *fahlerz,* si capisce amorfi, a grana finissima, d'un colorito grigio di piombo non brillante e dalla lucentezza ben diversa dalla *bournonite,* mi risultarono tutti come quelli dell'Argentiera di pura galena, poverissima d'argento, ma senza traccia di rame.

Il Daneri invece con sua gentilissima lettera mi accompagnava in pacchetto quattro campioncini del minerale desiderato ed un quinto diverso, dall'egregio direttore in modo speciale racoomandatomi, e del quale dirò in appresso in altra Nota.

I quattro esemplarini, si capisce dei più caratteristici, erano ben diversi dai frammenti dei minerali, da me portati da Sassari come ricordo di quella miniera, e differenti anche dai campioni, che poco tempo prima m'erano stati gentilmente inviati dal sig. Mele, cui vado riconoscente specialmente per due bellissimi esemplari di *blenda* cristallizzata e per qualche bel campione di galena, coperta da un po' di stibina, in qualche punto decomposta in probabile *cervantite.*

Il nuovo minerale, che trovasi particolarmente alla dipendenza della blenda, presentasi sempre massiccio, allo stato compatto, più o meno finamente granuloso, talvolta anche fibroso, in taluni punti pure lamellare e quindi con sfaldatura netta, che manca assolutamente nel *fahlerz:* la frattura è un po' concoidale od ineguale, fragile. La durezza va da 2,5 a 3, anzichè da 3 a 4,5 come nella tetraedrite e nella tennantite; il peso specifico colla bilancia del Mohr mi risultò di 5,78, corrispondente ad una normale bournonite, per la quale la densità va da 5,7 a 5,9: il mio assistente alla temperatura di 28,6° avrebbe ottenuto per un frammento solo 5,35, dovendosi probabilmente questa forte differenza in meno alla mescolanza intima col quarzo in venuzze, in particelle ed anche in cristallini. La lucentezza è metallica, brillantissima: colore grigio d'acciaio al grigio di piombo nerastro, opaco.

Nel tubo chiuso decrepita e dà un sublimato oscuro rossastro d'ossido di ferro e d'antimonio e fonde quasi subito incrostando il tubo. Nel tubo aperto da vapori solforosi ed un sublimato bianco d'acido antimonioso. Al cannello sul carbone fonde facilmente, dando dapprima un'aureola bianca d'acido antimonioso, poi un'aureola marcatissima gialla d'ossido di piombo: il residuo trattato con soda alla fiamma di riduzione dà un globulo di rame. Il minerale non si scioglie completamente nell'acido cloridrico, ma lascia indietro un piccolo residuo quarzoso ed a questo dobbiamo certamente la deficienza che si appalesa nell'analisi: è decomposto dall'acido nitrico, prendendo la soluzione una bella colorazione verde con tendenza al bleu; la soluzione allungata prende una tinta azzurrastra. Oltre la soluzione si ha un residuo di zolfo ed un residuo biancastro contenente antimonio e piombo. Oltre Pb, Sb, S, Cu ed Fe altre reazioni m'avrebbero dato per la nostra sostanza quantità sensibile di Mn con traccie di As, Ag, Mg e Ca.

Non presentando il nostro minerale mai cristalli non era difficile, senza ricorrere ad un'analisi quantitativa confonderlo colle varietà *piombifere di panabase,* giacchè solo quella può mettere in evidenza la quantità grande di piombo esistente, come risulta appunto dall'analisi quantitativa, eseguita

sopra gr. 1,1156 dal mio assistente dott. Carlo Rimatori:

S	19,14
Sb	20,70
As	traccie
Pb	40,73
Cu	12,22
Fe	4,59
Mn	1,35
CaO } MgO }	traccie
	98,73

Evidentemente trattasi di una *bournonite* nel supposto *fahlerz* della miniera dell'Argentiera della Nurra.

Prima ancora che avessi trasmesso i risultati dell'analisi all' ing. Daneri, egli per lettera gentile m'aveva comunicato che essendosi interessato di studiare il supposto *fahlerz* aveva ottenuto coll'analisi Pb = 38,5, Cu = 7,3, Al = 0,07, Au = 2g. per tonnellata, Sb non determinato quantitativamente, dati che suggerivano anche al distinto direttore di quella miniera di considerare il minerale creduto *fahlerz* come una *bournonite,* indotto a ciò anche dalla sfaldatura e dalla durezza.

Dai dati del sig. ing. Daneri si vede che la *bournonite* dell'Argentiera della Nurra contiene, sebbene in piccolissima quantità, anche dell'oro, due grammi per ogni tonnellata di minerale. Sarebbe questo il secondo minerale della Sardegna contenente oro, essendosi rinvenuta da alcuni anni una pirite arsenicale (Mispikel) nella località Conca Sa Pivera (Gonos Pranaceddu) in territorio di Gonosfanadiga verso i limiti di Fluminimaggiore, contenente quattro grammi d'oro per tonnellata.

Prima di chiudere questa Nota dirò che in uno dei quattro campioncini, inviatimi dal sig. Daneri, ho potuto osservare che dopo il quarzo, che separa in quell' esemplare nettamente la blenda dalla bournonite, v' è un'altra sostanza brillante in fiocchetti, in aghetti alla guisa quasi della meneghinite, che un saggio qualitativo sopra un piccolissimo frammento m'avrebbe appalesato per un altro *solfo antimoniuro di piombo* senza *rame,* che potrebbe avere qualche analogia colla jamesonite, più che colla boulangerite. Se potrò avere materiale sufficiente per un'analisi quantitativa, cercherò di determinare anche questa sostanza, ed in pari tempo mi sarà caro di dire una parola sopra l'altro minerale, già accennato, come quello che particolarmente mi fu raccomandato dall'egregio ing. Daneri, e che fin d'ora dirò che, pur avendo l'aspetto d'un minerale d'antimonio, fibroso, impregnato di pirite di ferro, è una curiosa mescolanza di diverse sostanze.

Mineralogia. — *Osservazioni sopra alcuni minerali del granito di Baveno* (1). Nota di ETTORE ARTINI, presentata dal Socio STRÜVER.

Da varî anni procuro di completare la serie dei minerali di Baveno posseduti dal Museo, allo scopo di contribuire in quanto possibile alla maggior conoscenza di tale veramente classica località mineralogica. Di prezioso aiuto in tali ricerche mi riesce particolarmente l'opera dell'ing. E. Bazzi, intelligente collezionista, raccoglitore acuto e diligente: all'ottimo amico, tanto benemerito del Museo, mi è grato porgere qui una sincera parola di lode e un vivo ringraziamento.

È noto come nelle ricche druse del nostro granito, oltre ad un certo numero di minerali comunissimi, quali il *quarzo*, l'*ortoclasio*, l'*albite*, le *miche*, la *fluorite*, la *calcite*, l'*epidoto*, la *laumontite*, la *jalite*, altri se ne trovino assai meno comuni, come la *babingtonite*, l'*axinite*, la *datolite*, la *chabasite*, la *stilbite*, la *gadolinite* alterata; ed alcuni altri finalmente non vi si incontrino se non con estrema rarità, e quasi soltanto in via eccezionale.

Tra questi va noverata anzitutto, per la sua importanza, l'*apatite*, trovata dallo Strüver nel 1871 (2), e poi, per quanto si sa, non più osservata da altri; così che questo autore in un più recente lavoro scriveva: *L'apatite del granito bianco di Baveno fu da me descritta nel 1871; ma pare quasi che quell'esemplare allora da me trovato fra le tante migliaia di campioni minerali di Baveno che passarono in quei tempi per le mie mani, sia rimasto sino ad ora unico*, ecc. ecc. (3).

Un secondo esemplare venne in luce appunto in questi giorni; e credo perciò non inutile darne alcune parole di descrizione, tanto più che proviene dal granito roseo. È tale campione formato da un gruppetto dei soliti ben noti cristalli di ortoclasio roseo, geminati secondo la legge detta di Baveno; sul maggiore di essi, coperto in parte da una patina di epidoto e da poca jalite, stanno piantati alcuni cristalli di babingtonite della solita forma, e cinque cristalletti di apatite, incolora e abbastanza limpida. Questi cristalli, a differenza di quelli descritti dallo Strüver, sono prismatici, allungati secondo l'asse verticale: il maggiore tra essi misura 3 mm. nel senso dell'asse stesso,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Civico Museo di Milano.

(2) Strüver G., *Note mineralogiche*. — 4. *Apatite e arsenopirite del granito di Baveno e Montorfano*. Atti R. Acc. d. Sc. di Torino, vol. VI, 1871.

(3) Id., *Sui minerali del granito di Alzo*. Rend. R. Acc. d. Lincei, sed. 4. dicembre 1892.

e circa 1 mm. in senso trasversale. Ne staccai due, per sottoporli a misure goniometriche. La forma presentata da tutti indistintamente i cinque cristallini, riferita alla orientazione proposta dal Naumann, risulta dalla seguente combinazione:

$$\}111\{\ \}2\bar{1}\bar{1}\{\ \}5\bar{1}\bar{1}\,.\,11\bar{1}\{\ \}100\,.\,22\bar{1}\{\ \}411\,.\,110\{\ \}41\bar{2}\{.$$

Le facce della base, del prisma e della piramide di 2° ordine sono abbastanza piane, ma non perfette; anche meno adatte a misure precise son quelle delle tre piramidi di 1° ordine, sempre alquanto striate parallelamente alla loro intersezione con la base e col prisma. Dovetti perciò rinunciare a calcolare la costante cristallina di questa apatite, ciò che pur sarebbe stato mio desiderio; e limitarmi a riportare qui gli angoli misurati, confrontandoli coi rispettivi calcolati dal valore fondamentale

$$(100)\,.\,(010) = 68^\circ.\,9'.\,6''$$

altra volta da me determinato per l'apatite del granito elbano (¹).

Spigoli misurati	N.	Limiti delle osservazioni	Angoli osservati. Medie	Angoli calcolati
$(5\bar{1}\bar{1})\,.\,(2\bar{1}\bar{1})$	3	30°.26′ — 30°.48′	30°.34′	30°.31′
$(5\bar{1}\bar{1})\,.\,(111)$	5	59. 5 — 59. 51	59. 26	59. 29
$(100)\,.\,(2\bar{1}\bar{1})$	2	49. 58 — 50. 00	49. 59	49. 41
$(100)\,.\,(111)$	7	39. 50 — 40. 35	40. 5	40. 19
$(411)\,.\,(111)$	6	22. 22 — 23. 9	22. 43	22. 59
$(41\bar{2})\,.\,(111)$	3	55. 29 — 55. 41	55. 34	55. 48
$(41\bar{2})\,.\,(5\bar{1}\bar{1})$	5	25. 17 — 25. 41	25. 27	25. 31
$(5\bar{1}\bar{1})\,.\,(1\bar{2}1)$	5	64. 20 — 64. 33	64. 25	64. 29

Anche della *scheelite*, la quale riguardo alla rarità si trova nelle stesse condizioni del precedente minerale, il nostro Museo possiede da poco tempo uno splendido esemplare, dono dell'ing. Bazzi. È una drusa ricca di quarzo, nel granito rosso; oltre alla solita jalite, all'albite e a poco ortoclasio roseo, vi si osservano una diecina di cristalli di scheelite, di color giallo chiaro, cristallograficamente identici a quelli descritti dallo Strüver, ma con facce assai meno perfette, e invece alquanto più grossetti: il maggiore di essi misura circa 5 mm. nel senso dell'asse quaternario.

Alla già non breve lista dei minerali descritti da varî autori posso inoltre aggiungerne due altri, la cui presenza nel granito di Baveno non fu

(¹) Artini E., *Apatite dell'Elba*. Rendic. R. Acc. d. Lincei, sed. 24 novembre 1895.

prima d'ora osservata, o almeno scientificamente documentata: la *heulandite* cioè e la *tormalina*.

Della prima si trova solo un cenno affatto vago ed incerto in una Nota del Leuze ([1]). Io potei studiarne due esemplari: nell'uno è in cristallini limpidi, grossetti (2-3 mm) piantati sul quarzo e sull'ortoclasio roseo, insieme a uno di quei gruppi raggiati di stilbite giallognola già descritti dallo Strüver ([2]); nell'altro i cristallini, più numerosi e più piccoli, spalmano come una crostina un cristallo di ortoclasio. La forma e le proprietà del minerale nei due esemplari sono identiche. Essi presentano sempre la combinazione:

$$\{010\} \; \{001\} \; \{110\} \; \{201\} \; \{\bar{2}01\}.$$

Le facce di {010} sono piane e hanno la caratteristica lucentezza madreperlacea, più viva sulle facce di sfaldatura fresca, le quali si producono, al solito, con estrema facilità e perfezione; {001} e {$\bar{2}$01} sono mediocremente sviluppate, ma abbastanza piane; più ampie e brillanti, ma smosse e ondulate sono quelle di {201}; quelle del prisma verticale sono pure brillanti e ondulate. Riporto qui alcuni degli angoli misurati, facendoli seguire dai valori calcolati partendo dalle costanti determinate da Des Cloizeaux ([3]):

$$a : b : c = 0.40347 : 1 : 0.42929$$
$$\beta = 88^\circ . 34' . 30''$$

Spigoli misurati	N.	Limiti delle osservazioni	Angoli osservati. Medie	Angoli calcolati
(110) . (010)	4	68°.23′ — 69°.21′	68°.57′	68°. 2′
(201) . (001)	4	63. 19 — 64. 38	63. 50	63. 40
($\bar{2}$01) . (001)	5	66. 23 — 66. 47	66. 35	66. 00
(201) . (20$\bar{1}$)	3	49. 26 — 49. 37	49. 31	50. 20

La forte divergenza fra misura e calcolo non può maravigliare chi pensi alla imperfezione delle forme più sopra lamentata, e conosca le forti oscillazioni nei valori angolari che si osservano nella heulandite.

La perfetta e facile sfaldatura secondo {010} che presenta il minerale, mi permise di studiarne abbastanza completamente le proprietà ottiche non

([1]) Leuze A., *Mineralogische Notizen*. Ber. 25 Versamml. Oberrhein. geolog. Ver. Basel, 1892. (In questo lavoro non si capisce bene quando si accenni alla stilbite e quando alla heulandite; infatti vi è ricordata la heulandite (*Stilbit*) come già nota e trovata dallo Strüver, mentre questo Autore descrisse la stilbite (*Desmin*); viceversa quest'ultima, tutt'altro che rara a Baveno, è data dal Leuze soltanto come incerta!).

([2]) Strüver G., *Minerali del granito di Baveno e Montorfano*. Atti R. Acc. d. Sc. di Torino, I. 1866.

([3]) Des Cloizeaux A., *Manuel de minéralogie*. 1862.

ostante la scarsità del materiale. In tutti i cristalli i piani degli assi ottici sono perpendicolari a }010{, e la bisettrice acuta per tutti i colori, positiva, coincide con l'asse y. Già nelle lamine di sfaldatura vicine alla superficie si osserva perifericamente la caratteristica divisione in settori, aventi per base le tracce delle facce della zona [010], ed estendentisi verso l'interno, limitati da linee irregolari e sinuose. Questa divisione è più accentuata e completa nelle lamine più interne: dove esiste un campo centrale indiviso, questo sembra quasi confondersi coi due settori }201{, i quali sono sempre i più estesi. L'estinzione è varia nei diversi settori, e talvolta varia alquanto anche nelle diverse parti di uno stesso settore, per una struttura zonale abbastanza evidente. In tre lamine trovai che la traccia del piano degli assi ottici per la luce gialla (*Na*) su (010) faceva con $+x$ (considerando come positivi i valori della inclinazione verso $+z$, cioè nell'angolo β ottuso, e negativi quelli verso $-z$, cioè nell'angolo β acuto) angoli di:

	Settori }201{	Settori }001{	Settori }$\bar{2}$01}
I. Lam.	+ 8°.30′	0	— 7°
II. »	+ 10°.30′	0	— 18°
III. »	+ 2°.30′	0	— 13°.30′

La dispersione delle bisettrici è abbastanza forte, e già riconoscibile all'esame della figura d'interferenza; nella lamina I. che presentava il campo centrale abbastanza largo, l'inclinazione dell'estinzione (α) su $+x$ fu trovata avere, per i varî colori, nel campo centrale stesso, i valori seguenti:

Luce azzurra:	+ 6°
» gialla	+ 8°.30′
» rossa	+ 10.

La dispersione degli assi ottici è pure sensibile: $\rho > v$.

Il valore dell'angolo apparente degli assi ottici, misurato sulla lamina anzidetta, campo centrale, fu determinato:

$$2E_a = 77°.53' \qquad (Na)$$

La *tormalina* si trova, a dir vero, citata fra i minerali di Baveno nell'opera dello Jervis [1]; ma tale attestazione perde ogni valore scientifico per il fatto che non è citata la fonte della notizia, e che in realtà nessuno dei mineralogisti che si occuparono dei minerali di Baveno in modo particolare, a cominciare dal Padre Pini [2], dal Borson [3], dal Barelli [4], e venendo

(1) Jervis G., *I tesori sotterranei dell'Italia*, vol. I, Torino, 1873.

(2) Pini E., *Mémoire sur les nouvelles cristallisations* etc. Milan, 1779.

(3) Borson E., *Catalogue raisonné de la collection minéralogique* etc. Turin, 1830.

(4) Barelli V., *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna.* Torino, 1835.

fino ai moderni osservatori, come lo Strüver (1), lo Streng (2), il Leuze (3), il Gonnard (4) per non citare che i principali, nessuno, dico, ricorda la tormalina tra i minerali delle druse del nostro granito. L'origine di tale notizia è forse questa: che nei *Cenni sui graniti massicci delle Alpi piemontesi*, pubblicati come appendice alla Memoria del Gastaldi: *Studi geologici sulle Alpi occidentali* (5), lo Strüver ricorda come componente accessorio *della roccia* la tormalina; ma egli si riferisce ai graniti piemontesi in genere, e a quello di Quarona in Valsesia in particolare.

Comunque, il minerale è, nelle druse di Baveno, assai raro ed eccezionale. Si tratta di ciuffetti di aghi sottilissimi, azzurrastri, di aspetto analogo a quello della bissolite, e che con estrema facilità si staccano dalla matrice. Questo fatto, più ancora forse che la rarità, può spiegare come il minerale sia sfuggito all'attenzione dei precedenti osservatori; l'esame accurato di alcuni esemplari di fluorite e quarzo contenenti inclusioni aghiformi esilissime mi ha dimostrato spettar queste appunto alla tormalina, di cui le sottili estremità libere furono asportate, secondo ogni probabilità, durante la sommaria operazione di lavatura cui usano i cavatori stessi sottomettere gli esemplari, per renderli più puliti e più appariscenti.

I cristallini, dei quali la massima grossezza raggiunge 0,2 mm. mentre la lunghezza arriva a più di un centimetro, sono formati quasi esclusivamente dal prisma di 2° ordine $\}\bar{1}01\{$, con facce così brillanti e piane, benchè alcun poco striate, che un cristallino sottoposto a misura goniometrica mi diede, per i sei spigoli della zona verticale, i valori angolari seguenti:

$$60°.3' \; ; \; 60°.0 \; ; \; 59°.56' \; ; \; 60°.1' \; ; \; 59°.58' \; ; \; 60°.2',$$

assai bene concordanti, come ognun vede, col rispondente calcolato, di 60°.

Al microscopio è facile constatare il carattere otticamente negativo della direzione d'allungamento dei sottili cristallini, e il caratteristico intensissimo pleocroismo:

$\varepsilon =$ bruniccio chiarissimo
$\omega =$ azzurro-verdastro carico.

Un minerale invece la cui presenza nelle druse del granito di Baveno

(1) Vedi, oltre alle due Note più sopra citate dello stesso autore, anche: Strüver G., *Sopra alcuni minerali italiani. 4. Axinite di Baveno.* Atti d. R. Acc. d. Sc. di Torino III. 1867.

(2) Streng A., *Ueber die in den Graniten von Baveno vorkommenden Mineralien.* Neues Jahrb. für Miner. etc. 1887. I.

(3) Loc. cit. e inoltre: Leuze A., *Mineralogische Notizen.* Ber. über die 26 Versamml. d. Oberrh. geol. Ver. 1893.

(4) Gonnard F., *Notes crystallographiques.* Bull. d. la Soc. Fr. de Minéralogie, XXV, n. 4-5. 1902 (veramente l'elenco dato dal Gonnard non è completo nè esatto; la stessa citaz. del lavoro di Streng vi è errata).

(5) Mem. d. R. Com. geol. d'Italia. 1871.

meriterebbe, a parer mio, di essere ulteriormente documentata, è l'*anfibolo*, e particolarmente l'*orneblenda nera cristallizzata*. Questa vien ricordata soltanto dal Molinari, come formante « *piccoli cristalli neri, lucenti, opachi, impiantati sui cristalli di quarzo e di feldspato ortosio* » [1]; dopo d'allora non fu più trovata da altri, nè io potei mai osservare nè questa nè altre varietà d'anfibolo. L'esemplare originale determinato dal Molinari, e da lui stesso registrato sotto il nome di *orneblenda* al n. 4922 del vecchio catalogo, trovasi ancora sotto lo stesso numero nella raccolta del Museo: ma i cristalli sono di *babingtonite*.

Paleontologia. — *Il Castoro quaternario del Maspino*. Nota del dott. CAMILLO BOSCO, presentata dal Corrisp. CARLO DE STEFANI.

Nel museo paleontologico dell'Istituto di studî superiori di Firenze trovasi un cranio di castoro scavato dalle ghiaie quaternarie delle vicinanze del Maspino, piccolo torrente che sbocca nella Chiana presso Arezzo.

Fu già citato dal Forsyth-Major [2] e dal Rütimeyer [3] che lo riferirono al *Castor fiber* Linn. Esso manca di tutta la porzione occipitale, asportata forse da un colpo di zappa, e dell'osso malare sinistro; tutto il resto è in ottimo stato di conservazione e non presenta nessuna deformazione; i denti pure sono al completo ed in buonissimo stato. Manca la mandibola.

Alla descrizione dettagliata di questo cranio, preferisco il suo confronto col cranio delle due forme attualmente viventi di castoro, cioè la europea e la canadese.

Il cranio del Maspino presenta i seguenti caratteri differenziali

dal cranio di castoro canadese:	*dal cranio di castoro europeo:*
Cranio più grosso; più convesso superiormente e più largo nelle regioni frontale e nasale.	Cranio di uguali dimensioni; ugualmente convesso superiormente ed ugualmente largo nelle regioni frontale e nasale.
Arcate zigomatiche più ampie, col loro asse maggiore più obbliquo rispetto a quello del cranio; esse prendono origine più in alto; la loro massima larghezza trovasi nella parte posteriore, anzichè nel mezzo.	Arcate zigomatiche ugualmente ampie, col loro asse maggiore meno obbliquo; esse prendono origine alla stessa altezza; la loro massima larghezza è nella parte posteriore.

[1] Molinari F., *Nuove osservazioni sui minerali del granito di Baveno*. Atti Soc. ital. di Sc. nat. vol. XXVIII. 1885.

[2] Forsyth-Major, *Sul livello geologico del terreno in cui fu trovato il cosidetto cranio dell' Olmo* (Archivio per l'antropologia e l'etnologia, vol. VI, pag. 347, Firenze 1876).

[3] Rütimeyer, *Ueber Pliocän und Eisperiode auf beiden Seiten der Alpen*, pag. 52, Basel 1876.

dal cranio di castoro canadese:	*dal cranio di castoro europeo:*
Apofisi zigomatica dei temporali più lunga, più inclinata all' indietro, e con l'estremità esterna, sovrapposta al malare, che forma un rilievo assai più sviluppato.	Apofisi zigomatica dei temporali ugualmente lunga ed inclinata all' indietro, con estremità esterna ugualmente sviluppata.
Malari più alti, con processo post-orbitario che si avvicina assai più al corrispondente processo dei frontali.	Malari della stessa altezza, con processo post-orbitario ugualmente sviluppato.
Fossa sott'orbitaria dei mascellari più profonda e più obbliqua.	Fossa sott' orbitaria ugualmente profonda ed inclinata.
Creste parietali molto più sporgenti, che si ravvicinano più gradatamente e in modo da far supporre che la loro riunione nella cresta sagittale avvenisse alquanto più indietro.	Creste parietali ugualmente sporgenti e similmente disposte.
Frontali più larghi e più lunghi.	Frontali ugualmente lunghi, ed anteriormente ugualmente larghi, ma che si restringono assai più all' indietro.
Nasali più lunghi e più larghi con margine esterno assai meno convesso, quasi rettilineo.	Nasali di uguale forma, con margine esterno simile.
Premascellari con apofisi frontale più lunga ed apofisi palatina più larga.	Premascellari con apofisi palatina ugualmente larga, ma con apofisi frontale più lunga.
Apertura nasale alquanto più larga.	Apertura nasale un po' più larga.
Palatini più lunghi; palato che si allarga molto più sensibilmente dall' innanzi all' indietro.	Come contro.
Serie molare, proporzionalmente alle dimensioni del cranio, un po' più lunga.	Serie molare approssimativamente della stessa lunghezza.
Molari che decrescono assai più rapidamente di grossezza dall' avanti all' indietro; più sporgenti e più inclinati in fuori; pieghe di smalto che compaiono sulla superficie triturante sotto forma di linee sinuose, anzichè diritte.	Come contro.
Incisivi assai più larghi.	Come contro.

Risulta quindi che il castoro del Maspino è molto più vicino, per la

Fig. 1. — *Castor fiber* del Maspino, cranio visto dal lato destro ($^4/_5$ della grandezza naturale).

forma del cranio, al castoro europeo, di cui ha i principali caratteri che lo

Fig. 2. — *Castor fiber* del Maspino, cranio visto dal basso ($^4/_5$ della grandezza naturale).

differenziano da quello canadese, e cioè: la forma dei nasali, con margine

esterno solo leggermente curvo, la larghezza delle regioni frontale e nasale, lo sviluppo e la direzione delle creste parietali, l'ampiezza delle arcate zigomatiche, la convessità del cranio.

Differisce però da ambedue le forme: nel palato, molto più largo all'indietro che all'innanzi; negli incisivi, più larghi; nei molari, che decrescono

Fig. 3. — *Castor fiber* del Maspino, cranio visto dall'alto ($^4/_5$ della grandezza naturale).

rapidamente di grossezza dal primo all'ultimo, e sulla cui superficie triturante le pieghe di smalto si mostrano leggermente sinuose.

Per la forma del palato e per la decrescente grandezza dei molari il castoro del Maspino rammenta il *Trogontherium Cuvieri* Fischer; mentre per la larghezza degli incisivi e per la sinuosità delle pieghe di smalto dei molari esso è da ritenersi come una forma intermedia fra i viventi castori ad incisivi relativamente stretti ed a molari con pieghe liscie, ed il *Castor plicidens* Major, del pliocene superiore del Valdarno, caratterizzato da incisivi assai larghi e da molari con pieghe di smalto complesse [1].

[1] La descrizione del *C. plicidens* trovasi nella mia Memoria sui *Roditori pliocenici del Valdarno Superiore*, pubblicata nel vol. V (1899) della *Palaeontographia italica*, diretta dal prof. M. Canavari.

Il fatto però che tanto la larghezza quanto la forma speciale delle ossa nasali, come si riscontrano nel castoro d' Europa e che lo distinguono da quello d' America, si siano mantenute inalterate attraverso i tempi geologici, poichè si trovano anche nel castoro quaternario del Maspino ed in quello pliocenico del Valdarno Superiore, conferma una volta di più che hanno ragione quei naturalisti i quali separano specificamente il castoro d' Europa (*Castor fiber* Linn.) da quello d'America (*Castor canadensis* Kuhl) ([1]).

Misure.

	mm.
Massima larghezza del cranio misurata fra gli zigomi.	101
Minima larghezza del cranio fra le orbite.	29
Larghezza del cranio all'origine delle apofisi zigomatiche dei temporali.	53
Larghezza complessiva delle ossa nasali alla loro estremità anteriore.	22
Distanza dal margine alveolare alla sommità del cranio presso i processi post-orbitali	52
Distanza dal margine anteriore dei fori palatini anteriori alle ossa nasali.	36
Distanza dal margine posteriore della volta palatina al margine posteriore dei fori palatini anteriori.	55
Distanza dal margine posteriore dei fori palatini anteriori al margine anteriore degli alveoli degli incisivi	40
Lunghezza della serie molare	33
Distanza fra le faccie esterne dei $\underline{M}^{3}$	34
» » » » $\overline{\underline{\mathrm{Pr}}}$	26
Lunghezza dei fori palatini anteriori	15

([1]) Le questioni relative alla affinità dei castori d' Europa con quelli d'America sono state ampiamente trattate da S. A. Allen nella sua *Monography of the North-American Rodentia* (U. S. geological Survey of the Territories). Washington 1877.

INDICE DEL VOLUME XI, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1902 — 2° SEMESTRE.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

L

M

N

P

R

S

INDICE PER MATERIE

G

M

N